МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 531.38

Н. А. НАРБЕКОВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЗАРЯЖЕННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Периодические решения задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг закрепленной точки, соответствующие периодическим решениям задачи Эйлера – Пуансо, подробно изучались в [1]. В настоящей работе найдены новые периодические решения задачи о движении заряженного твердого тела вокруг закрепленной точки в постоянном по времени и однородном магнитном поле. Эти решения также порождаются периодическими решениями задачи Эйлера – Пуансо (для осесимметричного тела) и их исследование проводится с помощью теории Пуанкаре для гамильтоновых систем [2].

Рассмотрим движение заряженного тела P вокруг неподвижной точки в постоянном по времени и однородном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{B}$ [3]. Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат, ось Oz которой направим параллельно вектору $\mathbf{B}$, а $O\xi\eta\zeta$ – система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тела.

Вращательное движение заряженного тела P в осях $Oxyz$ будем описывать каноническими переменными Андуайе [4]: G, L, H, l, g, h. Рассматриваемая задача является обобщенно-потенциальной [5], в следствии чего в указанных переменных уравнения движения тела P можно представить в гамильтоновой форме. Гамильтониан задачи имеет вид

$$H=H_0+\omega_L H_1+\omega_L H_2 \tag{1}$$

$$H_0=\frac{G^2\sin^2\theta}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{A}+\frac{\cos^2 l}{B}\right)+\frac{G^2\cos^2\theta}{2C}$$

$$H_1=G\sin\theta\sin l(-A^*\gamma_1+b_3\gamma_2+b_2\gamma_3)+G\sin\theta\cos l(-B^*\gamma_2+ +b_3\gamma_1+b_1\gamma_3)+G\cos\theta(-C^*\gamma_3+b_2\gamma_1+b_1\gamma_2)$$

$$H_2={}^1/_2[(A^{*2}/A+b_3^2/B+b_2^2/C)\gamma_1^2+(B^{*2}/B+b_3^2/A+b_1^2/C)\gamma_2^2+(C^{*2}/C+ +b_2^2/A+b_1^2/B)\gamma_3^2-2\gamma_1\gamma_2(A^*b_3/A+B^*b_3/B-b_1b_2/C)-2\gamma_1\gamma_3(A^*b_2/A+C^*b_2/C- -b_1b_3/B)-2\gamma_2\gamma_3(B^*b_1/B+C^*b_1/C-b_2b_3/A)]$$

где ω_L – частота Лармора, A, B и C – главные моменты инерции тела соответствующие его осям $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$; A^*, B^*, C^* и b_1, b_2, b_3 – «осевые» и «центробежные» моменты распределенных зарядов [3]; γ_1, γ_2, γ_3 – направляющие косинусы вектора $\mathbf{B}$ в подвижных осях $O\xi\eta\zeta$. В переменных Андуайе последние величины определяются формулами [4]:

$$\gamma_1=\sin\rho(\cos l\sin g+\sin l\cos g\cos\theta)+\cos\rho\sin l\sin\theta \tag{2}$$

$$\gamma_2=-\sin\rho(\sin l\sin g-\cos l\cos g\cos\theta)+\cos\rho\cos l\sin\theta$$

$$\gamma_3=-\sin\rho\sin\theta\cos g+\cos\theta\cos\rho$$

где θ, ρ – углы между вектором $\mathbf{G}$ и осями $O\zeta$, Oz соответственно.

Перейдем к безразмерным переменным [6]:

$$l'=l,\quad g'=g,\quad h'=h,\quad L'=L/A\omega_0 \tag{3}$$

$$G'=G/A\omega_0,\quad H'=H/A\omega_0,\quad F'=F/A\omega_0^2,\quad \tau=\omega_0 t$$

где τ — новая независимая переменная, F' — преобразованный гамильтониан, $\omega_0=n_2^{(0)}=G_0/A$ — невозмущенная частота вращательного движения (G_0 — начальное значение величины кинетического момента). Предположим, что тело P по динамическому строению близко к осесимметричному, а величина ω_L/ω_0 является малой. Последнее условие соответствует случаю движения тела в слабом магнитном поле (или быстрому вращению тела).

Малый параметр μ введем по формулам: $(A-B/A=\mu\delta,\ \omega_L/\omega_0=\mu$ $(\delta\sim 0(1))$. В результате уравнения движения тела P приводится к стандартному виду гамильтоновых систем, для которых получила развитие теория периодических решений Пуанкаре [2].

Опуская для простоты штрихи у переменных (3) и используя формулы (1), (2), уравнения вращательного движения заряженного тела представим в виде

$$dL/d\tau=-\partial F/\partial l,\quad dG/d\tau=-\partial F/\partial g,\quad dH/d\tau=-\partial F/\partial h$$

$$dl/d\tau=\partial F/\partial L,\quad dg/d\tau=\partial F/\partial G,\quad dh/d\tau=\partial F/\partial H$$

$$F=F_0+\mu F_1+\mu^2 F_2,\quad F_0={}^1/_2G^2+{}^1/_2L^2(\varkappa-1) \tag{4}$$

$$F_1=\Sigma[f_{k_1k_2}\cos(k_1l+k_2g)+\overset{*}{f}_{k_1k_2}\sin(k_1l+k_2g)]$$

$$F_2=\Sigma[\varphi_{k_1k_2}\cos(k_1l+k_2g)+\overset{*}{\varphi}_{k_1k_2}\sin(k_1l+k_2g)]$$

где F_0 — гамильтониан невозмущенного движения тела, $\varkappa=A/C$, в разложении F_1 индексы суммирования принимают ззначения $k_1=0,\ 1,\ 2,\ k_2=0,\ \pm1$, а в разложении F_2: $k_1=0,\ 1,\ 2,\ k_2=0,\ \pm1,\ \pm2$. Коэффициенты разложений являются известными функциями переменных θ, ρ, $G(\cos\theta=L/G$, $\cos\rho=H/G)$, например

$$f_{1,0}={}^1/_2A^{-1}Gb_1\sin 2\theta\cos\rho(B^{-1}+C^{-1}),$$

$$f_{1,1}={}^1/_2A^{-1}Gb_1\sin\rho[C^{-1}\cos\theta(1+\cos\theta)-B^{-1}\sin^2\theta],\ldots$$

$$\overset{*}{\varphi}_{2,2}=-{}^1/_8A^{-1}(A^*b_3/A+B^*b_3/B-b_1b_2/C)\sin^2\rho(1-\cos\theta)^2$$

Уравнения (4), как и в задаче о вращении твердого тела в однородном поле тяжести, допускает два первых интеграла: $F=c_1$, $H=c_2$. Первый из них характеризует постоянство кинетической энергии тела, а второй — постоянство проекции вектора **G** на направление напряженности магнитного поля.

При $\mu=0$ уравнения (4) допускают периодические решения, соответствующие задаче Эйлера — Пуансо (при $A=B$):

$$L=L_0,\quad G=G_0,\quad H=H_0$$

$$l=n_1^{(0)}\tau+l_0,\quad g=n_2^{(0)}\tau+g_0,\quad h=h_0 \tag{5}$$

$$n_1^{(0)}=(\varkappa-1)L_0,\quad n_2^{(0)}=G_0,\quad G_0=(\varkappa-1)L_0N_1/N_2$$

$$N_1n_1^{(0)}=N_2n_2^{(0)},\quad T=2\pi N_1/n_2^{(0)}=2\pi N_2/n_1^{(0)}$$

где ноликом вверху обозначены начальные значения соответствующих переменных, $n_1^{(0)}$, $n_2^{(0)}$ — невозмущенные частоты Эйлеровских движений тела при $A=B$, N_1, N_2 — показатели соизмеримости, T — период.

Существование периодических решений уравнений (4) при малых значениях μ определяется условиями Пуанкаре [6]. Анализ этих условий позволяет обнаружить два семейства периодических решений для осесимметричного тела, которым соответствуют следующие соизмеримости невозмущенных значений частот $n_1^{(0)}$, $n_2^{(0)}$: $n_1^{(0)}=\pm n_2^{(0)}$, $2n_1^{(0)}=\pm n_2^{(0)}$. Основной соизмеримостью является $2:1$, так как соответствующие решения имеют место и в случае соосной ориентации эллипсоида инерции тела и поверхности второго порядка, которой можно охарактеризовать распределение зарядов (т. е. когда $b_1=b_2=b_3=0$).

В первом случае порождающие значения переменных определяются формулами

$$\begin{gathered} l_0-g_0=\alpha+\pi k \quad (k=0,\ 1,\ldots) \\ \sin\alpha=b_2(b_1^2+b_2^2)^{-1/2}, \qquad \cos\alpha=b_1(b_1^2+b_2^2)^{-1/2} \\ \operatorname{ctg}\rho_0=[\sin^2\theta_0(A^*+B^*)+2\varkappa C^*\cos^2\theta_0]\,[\varkappa\cos\theta_0(-1+ \\ +\cos\theta_0)-\sin^2\theta_0]^{-1}(b_1^2+b_2^2)^{-1/2}\varepsilon^{-1} \\ \varepsilon=\cos(l_0-g_0-\alpha)=\pm1 \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь должны быть исключены те решения, для которых $b_1^2+b_2^2=0$, $\cos\rho=0$.

Во втором случае имеем

$$\begin{gathered} 2l_0-g_0=\beta+\pi k \qquad (k=0,\ 1,\ldots) \\ \sin\beta=2b_3[(B^*-A^*)^2+4b_3^2]^{-1/2}, \qquad \cos\beta=(B^*-A^*)[(B^*-A^*)+4b_3^2]^{-1/2} \\ \operatorname{ctg}\rho_0=2[\sin^2\theta_0(A^*+B^*)+2\varkappa C^*\cos^2\theta_0]\,[\sin\theta_0(-1+ \\ +\cos\theta_0)]^{-1}[(B^*-A^*)^2+4b_3^2]^{-1/2}\varepsilon^{-1} \\ \varepsilon=\cos(2l_0-g_0-\beta)=\pm1 \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь исключаются те решения, для которых одновременно $(B^*-A^*)=0$ и $b_3=0$. Значения $\theta=0,\ \pi,\ \rho=0,\ \pi$ должны исследоваться отдельно как особые случаи.

При достаточно малых значениях параметра μ решениями (5)—(7) порождаются периодические решения рассматриваемой задачи, которые представляются сходящимися рядами по целым степеням малого параметра μ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
2. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
3. *Лунев В. В.* Об однозначных решениях в задаче о движении твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // Сборник научно-методических работ по теоретической механике. М.: Высш. шк., 1981. Вып. 11. С. 147–154.
4. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
5. *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. 447 с.
6. *Баркин Ю. В.* Периодические и условно-периодические решения в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1981. Т. 45, вып. 3. С. 535–544.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1987