

С. А. МИХАЙЛОВ, О. Л. САТОВСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ
АНТРОПОМОРФНОГО МАНИПУЛЯТОРА

Излагается методика расчета матрицы потенциальной энергии для произвольного криволинейного стержня с распределенной (упругость звеньев) и сосредоточенной (упругость шарниров и фланцев) податливостью. Определены частоты и формы собственных колебаний упругого двузвенника в квазистатическом приближении. Вычислены частоты и формы свободных колебаний двузвенника с учетом собственной массы звеньев.

Задача о свободных упругих колебаниях антропоморфного манипулятора исследовалась в [1-3].

1. Рассмотрим криволинейный стержень, нейтральная линия которого образует пространственную кривую. Поперечное сечение стержня — кольцевое или круговое. Один конец стержня заделан — на другом жестко укреплено абсолютно твердое тело (груз). Пусть M и m — массы груза и стержня ($M \gg m$). Число низких частот, обусловленных наличием груза, равно числу степеней свободы перемещаемого груза. Частоты, соответствующие упругим волнам в стержне в силу допущения $M \gg m$ много больше низких частот, отвечающих колебаниям груза. Поэтому можно пренебречь собственными колебаниями стержня и рассчитывать матрицу потенциальной энергии системы в квазистатическом приближении.

Предположим, что смещения груза L и упругие деформации стержня малы по сравнению с длиной стержня. Это позволяет использовать линейную теорию деформирования упругих стержней. Продольными упругими смещениями пренебрегаем по сравнению с поперечными. Наряду с распределенной упругостью стержня учитывается сосредоточенная жесткость шарниров и фланцев, расположенных вдоль оси стержня.

Для вычисления матрицы потенциальной энергии определим момент изгиба и кручения относительно произвольной точки оси стержня. Обозначим через V_0 , M_0 — главный вектор и главный момент упругих сил, действующих со стороны стержня на тело, через V и M — упругие реакции, действующие в сечении A . Рассмотрим некоторый элемент стержня AL и запишем условия равновесия выделенного элемента под действием приложенных сил и моментов

$$M = M_0 - [r(s) \times V_0], \quad V = V_0 \quad (1.1)$$

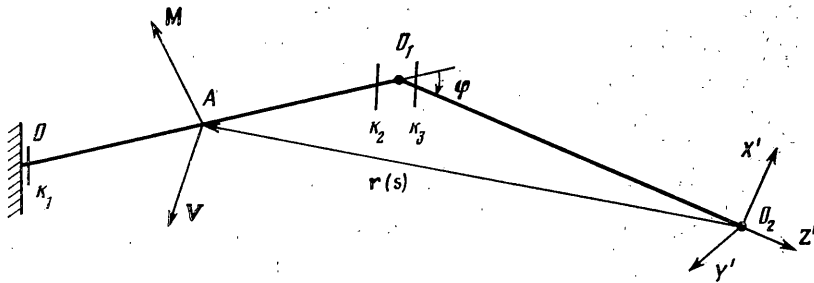
Здесь $r(s)$ — радиус-вектор, проведенный из точки L тела в точку A на оси стержня, s — координата текущей точки A .

Введем систему координат $AXYZ$ с началом в текущей точке A оси недеформированного стержня. Ось Z направлена по касательной к оси стержня, проведенной в точке A ; оси X и Y лежат в плоскости сечения стержня и вместе с осью Z образуют правую ортогональную систему координат.

Спроектируем первое векторное равенство (1.1) на оси системы координат $AXYZ$ и обозначим M_i ($i=1, 2, 3$) проекции главного момента на оси X, Y, Z .

Потенциальная энергия упругих деформаций стержня складывается из потенциальной энергии изгиба, кручения и потенциальной энергии фланцев

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l \left[\frac{M_1^2(s)}{EI} + \frac{M_2^2(s)}{EI} + \frac{M_3^2(s)}{c} \right] ds + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N \frac{M_i^2(s_j)}{k_j^i} \right\} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

где E — модуль Юнга материала стержня, I — момент инерции поперечного сечения стержня относительно диаметра, c — жесткость стержня на кручение, k_j^i — угловые жесткости фланцев. Индекс j соответствует номеру фланца ($j=1, N$), индекс i обозначает номер оси координат ($i=1, 2, 3$).

Введем вектор обобщенных сил $Q=(V_0, M_0)$, компоненты которого есть проекции V_0, M_0 на оси системы координат $LX'Y'Z'$, связанной с телом $Q=\{Q_k\}$ ($k=1, \dots, 6$). Матрицу перехода из системы координат $LX'Y'Z'$ в систему координат $AXYZ$ обозначим $T(s)$. Тогда в проекциях на оси координат X, Y, Z главный момент определится по формуле

$$M(s)=T(s)(M_0-[r(s)\times V_0]) \quad (1.3)$$

Подставим в формулу (1.2) моменты $M_i(s)$ из (1.3). Выражение для потенциальной энергии запишем в виде квадратичной формы обобщенных сил Q_k ($k=1, \dots, 6$):

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^6 b_{ij} Q_i Q_j, \quad B = \{b_{ij}\} \quad (i, j=1, \dots, 6) \quad (1.4)$$

Матрица B , составленная из коэффициентов квадратичной формы (1.4), называется матрицей податливости (матрицей влияния). Коэффициенты матрицы податливости зависят от геометрической формы оси стержня и жесткостных параметров EI, c, k_j^i ($i=1, \dots, N, j=1, 2, 3$). Матрица жесткости является обратной матрицей податливости $C=B^{-1}$.

Приведенные соотношения позволяют рассчитывать коэффициенты матрицы жесткости произвольного криволинейного стержня с сосредоточенными и распределенными упругими характеристиками.

2. Определим потенциальную энергию упругого двузвенника OO_1O_2 (фиг. 1). Стержни OO_1 (1) и O_1O_2 (2) жестко соединены в точке O_1 . Угол φ отсчитывается от продолжения оси первого звена ко второму звену против часовой стрелки и может принимать произвольные значения, но в силу симметрии задачи можно считать $0 \leq \varphi \leq \pi$. Длины обоих стержней одинаковы и равны l . Обозначим $E_i I_i$ жесткость на изгиб i -го стержня ($i=1, 2$); C_i — жесткость на кручение. Фланец k_1 расположен в точке O , фланцы k_2 и k_3 — по обеим сторонам от точки соединения стержней. Перемещаемый груз считается материальной точкой; обозначим его массу m . В условиях равновесия (1.1) для случая материальной точки $M_0=0$. Спроецируем радиус-вектор произвольной точки A стержня на оси координат $O_2X'Y'Z'$:

$$r_1(s)=(0, (s-l) \sin \varphi, l+(s-l) \cos \varphi), \quad r_2(s)=(0, 0, s) \quad (2.1)$$

Используя (1.1), (1.3), (2.1), запишем выражения для моментов упругих сил в текущей системе координат $AXYZ$ для первого и второго стержней.

$$M_1(s)=(V_y[l+(s-l) \cos \varphi]-V_z(s-l) \sin \varphi, V_x(l-s-l \cos \varphi), -V_x l \sin \varphi) \quad (2.2)$$

$$M_2(s)=(V_y s, -V_x s, 0)$$

Здесь V_x, V_y, V_z — компоненты вектора V в системе координат $O_2X'Y'Z'$.

Подставляя (2.2) в выражение для потенциальной энергии (1.2) и используя (1.4), вычислим компоненты матрицы влияния

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

$$b_{11} = l^3 (3E_2 I_2)^{-1} [(1+3 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi) + 3 \sin^2 \varphi / \zeta + 1/\xi + 3(1+2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) / \eta_1^2 + 3 \cos^2 \varphi / \eta_2^2 + 3 / \eta_3^2 + 3 \sin^2 \varphi / \eta_1^3 + 3 \sin^2 \varphi / \eta_2^3]^{-1}$$

$$b_{22} = l^3 (3E_2 I_2)^{-1} [(3+3 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + 1/\xi + 3(1+2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) / \eta_1^4 + 3 / \eta_2^4 + 3 / \eta_3^4]^{-1}$$

$$b_{23} = b_{32} = -l^3 (3E_2 I_2)^{-1} [\sin \varphi (\frac{3}{2} + \cos \varphi) + 3 \sin \varphi (1 + \cos \varphi) / \eta_1^4]^{-1}$$

$$b_{33} = l^3 (3E_2 I_2)^{-1} [\sin^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi / \eta_1^4]^{-1}$$

$$\xi = E_1 I_1 / E_2 I_2, \quad \zeta = c_1 / E_2 I_2, \quad \eta_j^i = k_j^i l / E_2 I_2$$

Заметим, что величины, обусловленные упругостью различных элементов системы, входят в коэффициенты матрицы влияния аддитивно. Матрица B симметрическая и неотрицательно определенная. Обращая матрицу податливости B , определим коэффициенты матрицы жесткости $C = B^{-1}$. Таким образом, определена потенциальная энергия системы в виде квадратичной формы упругих смещений u точки O_2 : $\Pi = \frac{1}{2} (Cu, u)$. Кинетическая энергия системы есть $T = \frac{1}{2} (Au', u')$, $A = mE$, где E — единичная матрица размерности 3×3 .

Составим уравнения Лагранжа с функцией Лагранжа $L = T - \Pi$ и получим систему трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$Au'' + Cu = 0 \quad (2.4)$$

Частное решение системы (2.4) запишем в виде $u(t) = d \sin(\omega t + \psi)$, где ω — частота, d — амплитудный вектор, ψ — начальная фаза. Подставив это решение в (2.4), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно d :

$$(C - \omega^2 A)d = 0 \quad (2.5)$$

Приравняв нулю определитель этой системы, составим характеристическое уравнение $(c_{11} - m\omega^2)[m^2\omega^4 - (c_{22} + c_{33})m\omega^2 + c_{22}c_{33} - c_{23}^2] = 0$. Отсюда имеем выражения для ω_i^2 — квадратов частот собственных колебаний системы

$$\omega_1^2 = c_{11}/m$$

$$\omega_{2,3}^2 = (2m)^{-1} \{ (c_{22} + c_{33}) \pm [(c_{22} + c_{33})^2 - 4(c_{22}c_{33} - c_{23}^2)]^{1/2} \}$$

Эти величины могут быть выражены через коэффициенты матрицы податливости

$$\omega_1^2 = (mb_{11})^{-1}$$

$$\omega_{2,3}^2 = 2\{m[b_{22} + b_{33} \pm ((b_{22} - b_{33})^2 + 4b_{23}^2)^{1/2}]\}^{-1}$$

Подставляя ω_i^2 в уравнение (2.5), определим собственные векторы d_i , которые удобно представить в виде столбцов матрицы N :

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

$$\beta = \operatorname{sgn}(\sin \varphi) \arccos[(P+1)/2P]^{1/2}$$

$$P = [1 + (2b_{23}/(b_{33} - b_{22}))^2]^{1/2}$$

Система нормальных координат представляет собой декартову систему, повернутую на угол β вокруг оси X .

Спектр частот разделился на две части: колебания в плоскости недеформированного двузвенника с частотами ω_2, ω_3 и колебания с частотой ω_1 в направлении, перпендикулярном этой плоскости.

Зависимости безразмерных частот $\Omega_i = \omega_i (ml^3/3E_2I_2)^{1/2}$ от угла φ представлены на фиг. 2. Безразмерные параметры, входящие в выражение (2.3), равны: $\xi = 1,5$; $\xi = 1,1$; $\eta_1^1 = \eta_1^3 = 0,02$; $\eta_1^2 = 0,05$; $\eta_2^1 = 0,056$; $\eta_2^2 = \eta_2^3 = \eta_3^2 = \eta_3^3 = \eta_3^4 = 0,1$. Заметим, что $\omega_3 \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \pi$. Это объясняется наложением дополнительной связи при распрямленной или полностью сложенной конфигурации звеньев манипулятора.

3. В предыдущих пунктах одним из основных было предположение о малости массы стержня по сравнению с массой груза. Это упрощение позволяет вычислять частоты собственных колебаний в квазистатическом приближении. Для приложений необходимо также исследовать частотные характеристики манипулятора без груза или массой груза, сравнимой с массой манипулятора. В этих случаях квазистатическое приближение неприменимо. Решение задачи в полной постановке представляется затрудненным. В то же время обычно бывает достаточно знать наименьшую первую частоту — частоту колебания основного тона. С достаточной точностью ее можно найти, пользуясь методом Ритца [4].

Дополнительно к допущениям п. 2 предположим, что в точке O_1 находится точечная масса M_1 . На величины M_1 и M_2 не накладывается ограничений. Считается также, что сосредоточенные жесткости отсутствуют. Обозначим через $u_i(s)$ — вектор упругого смещения точек оси i -го стержня, $\theta_i(s)$ — угол поворота сечения i -го стержня вокруг его оси; аргумент s — длина стержня, отсчитанная от его левого конца ($0 \leq s \leq l$), индекс $i=1$ всюду относится к звену OO_1 , $i=2$ — к звену O_1O_2 .

Кривые прогиба $u_i(s)$ зададим в виде полиномов третьей степени с неопределенными коэффициентами α^i, β^i , а угол поворота $\theta_i(s)$ считаем линейной функцией координаты s

$$u_i(s) = \alpha^i l s^2 + \beta^i s^3, \quad \alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i), \quad \beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i), \quad \theta_i(s) = \gamma_i l s \quad (3.1)$$

Эти функции удовлетворяют кинематическим краевым условиям (жесткая заделка в точке O и жесткое соединение стержней в точке O_1), а также уравнениям статического равновесия двузвенника. Выпишем абсолютные смещения точек оси второго звена

$$r_2(s) = u_1(l) + s[\psi \times k_2] + u_2(s) \quad (3.2)$$

где k_2 — вектор, направленный по оси второго звена при недеформированной конфигурации двузвенника, ψ — вектор упругого поворота конца первого звена.

Используя (3.1), (3.2), запишем потенциальную энергию и выражение, соответствующее кинетической энергии системы [4]:

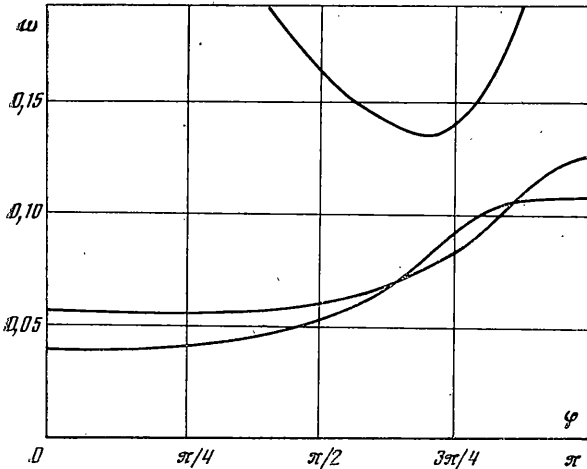
$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho_1 F_1}{2} \int_0^l u_1^2(s) ds + \frac{M_1}{2} u_1^2(l) + \frac{\rho_2 F_2}{2} \int_0^l r_2^2(s) ds + \\ &+ \frac{M_2}{2} r_2^2(l) + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{J_i}{2} \int_0^l \theta_i^2(s) ds \right] \quad (3.3) \\ \Pi &= \sum_{i=1}^2 \left[\frac{E_i I_i}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u_i(s)}{\partial s^2} \right)^2 ds + \frac{c_i}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial s} \right)^2 ds \right] \end{aligned}$$

где ρ_i — плотность материала, F_i — площадь поперечного сечения i -го звена, J_i — момент инерции i -го стержня относительно его оси.

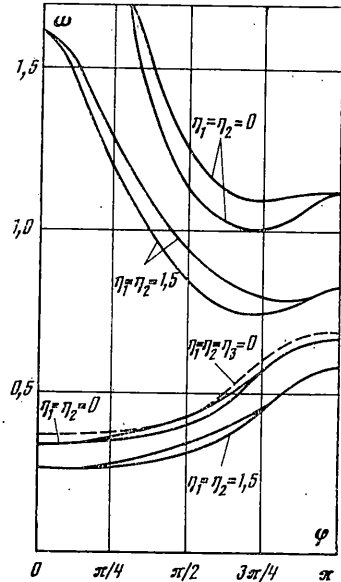
Вычислим интегралы, входящие в выражение (3.3), и определим матрицу кинетической и матрицу потенциальной энергии системы $T =$

$$= \frac{1}{2}(A\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \Pi = \frac{1}{2}(C\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad A = \{a_{ij}\}, \quad C = \{c_{ij}\} \quad (i, j=1, \dots, 10), \quad \mathbf{v} = (\alpha_1^1, \alpha_1^2, \beta_1^1, \beta_1^2, \alpha_2^1, \alpha_2^2, \beta_2^1, \beta_2^2, \gamma_1, \gamma_2).$$

Составим выражение $\omega^2 = (C\mathbf{v}, \mathbf{v}) / (A\mathbf{v}, \mathbf{v})$ и найдем минимум этого выражения по \mathbf{v} . Получим систему линейных уравнений $(C - \omega^2 A)\mathbf{v} = 0$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Приравняв нулю определитель этой системы, составим характеристическое уравнение

$$\det(C - \omega^2 A) = 0 \quad (3.4)$$

Заметим, что в силу предположения о малости упругих смещений, деформация двузвенника в плоскости OO_1O_2 и в перпендикулярном направлении независимы. Поэтому характеристическое уравнение (3.4) распадается на три независимых части. Уравнение четвертого порядка, соответствующее колебаниям в плоскости недеформированного двузвенника, и уравнение пятого порядка, описывающее колебания в направлении, перпендикулярном плоскости недеформированного двузвенника, имеют вид

$$\det(C_4 - \omega^2 A_4) = 0, \quad \det(C_5 - \omega^2 A_5) = 0 \quad (3.5)$$

Линейное уравнение, соответствующее крутильным колебаниям второго звена, есть $c_2 - \omega^2 J_2 l = 0$. Корни уравнений (3.5) определялись методом диагонализации Якоби. На фиг. 3 изображены частоты колебаний в плоскости недеформированного двузвенника (в безразмерном виде $\Omega_i = \omega_i (M_2 l^3 / 3E_2 I_2)^{1/2}$) и в перпендикулярном направлении. Безразмерные параметры, определяющие жесткостные свойства двузвенника, считались равными $\xi = 1$, $\zeta_1 = 3/4$, $\zeta_2 = 3/4$, $M_1/M_2 = \eta_3 = 1.5$. Численные значения параметров $\eta_1 = \rho_1 F_1 l / M_2$, $\eta_2 = \rho_2 F_2 l / M_2$ показаны рядом с кривыми.

Сравнение с результатами расчетов в квазистатическом приближении $\eta_i = 0$ ($i=1, 2, 3$) и с некоторыми точными решениями показали, что метод Ритца позволяет с достаточной точностью оценить сверху две частоты низшего тона (в плоскости недеформированного двузвенника и перпендикулярно ей), а также две следующие частоты собственных колебаний двузвенника.

Результаты расчетов позволяют судить о характере и амплитуде колебаний, возникающих в процессе рабочих движений манипулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сливеде П. Б., Иткин В. М., Аузиньш Я. П.* Алгоритм расчета на ЭЦВМ колебательных характеристик манипуляционных роботов. *Машиноведение*. 1984. № 2. С. 48–53.
2. *Корытко О. Б., Юдин В. И.* К расчету собственных частот манипулятора промышленного робота в общем случае. *Управление робототехническими системами и их очувствление*. М.: Наука, 1983. С. 224–231.
3. *Михайлов С. А.* Собственные колебания упругого двузвенника с точечной массой. *Изв. АН СССР*. 1983. № 2. С. 72–75.
4. *Работнов Ю. Н.* *Механика деформируемого твердого тела*. М.: Наука, 1979. С. 744.

Москва

Поступила в редакцию
16.II.1987