

УДК 531.8

Д. В. БАЛАНДИН

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОТИВОУДАРНЫХ АМОРТИЗАТОРОВ ДЛЯ КЛАССА ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Для упругодемпфированных нелинейных амортизаторов исследован вопрос определения ударных воздействий из заданного класса, доставляющих наибольшие значения ходу амортизации и перегрузке объекта защиты. Рассмотрены также задачи оптимизации параметров противоударных амортизаторов, поставленные как проблема гарантированного качества. Подобные задачи для некоторых частных видов характеристик амортизатора исследованы в [1].

1. Рассмотрим механическую систему, представляющую собой амортизируемый объект, связанный посредством амортизатора с прямолинейно движущимся основанием таким образом, что объект может перемещаться относительно основания в направлении его движения. Пусть основание подвергается ударному воздействию кинематического или динамического типа $\sigma(t)$. Согласно [1] уравнения движения амортизируемого объекта относительно основания имеют вид

$$x'' = -\Phi(x, \dot{x}, a) + \sigma(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (1.1)$$

здесь x — смещение объекта относительно основания, $\Phi(x, \dot{x}, a)$ — характеристика амортизатора, численно равная ускорению объекта относительно неподвижной системы координат, a — вектор упругих и демпфирующих параметров. Определим класс ударных воздействий $\sigma(t)$. Будем предполагать, что $\sigma(t)$ есть непрерывная или кусочно-непрерывная функция, заданная на $[0, T]$ ($\sigma(t) = 0$ при $t > T$). Кроме того, будем считать, что величина $J = \int_0^T |\sigma(t)| dt \leq J_0$, $t \in [0, T]$. Если $\sigma(t)$ знакопостоянная функция, то J (с точностью до множителя, равного массе объекта) есть величина ударного импульса, действующего на систему. Если $\sigma(t)$ знакопеременная функция, то J не имеет столь ясного физического смысла. Представим $\sigma(t)$ в виде $\sigma(t) = \sigma^+(t) - \sigma^-(t)$, где $\sigma^+(t) = 1/2[|\sigma(t)| + \sigma(t)] \geq 0$, а $\sigma^-(t) = 1/2[|\sigma(t)| - \sigma(t)] \geq 0$. Если ввести величины $J^+ = \int_0^T \sigma^+(t) dt$, $J^- = \int_0^T \sigma^-(t) dt$, $t \in [0, T]$, то каждую из них можно отождествить с величиной ударного импульса в положительном и отрицательном направлении, при этом $J^+ + J^- \leq J_0$. Описанный класс ударных воздействий будем обозначать L_0 . Если относительно ударных воздействий имеется более точная информация, нежели $J \leq J_0$, а именно $J^+ \leq J_0^+$, $J^- \leq J_0^-$, $J_0^+ + J_0^- = J_0$, то класс таких воздействий, являющийся подклассом L_0 , будем обозначать L_0^* .

Введем показатели качества противоударного амортизатора с заданной характеристикой $\Phi(x, \dot{x}, a)$: $S(a, \sigma) = \sup_{t \in [0, \infty)} |x(t, a, \sigma)|$ — максимальный ход амортизатора, $G(a, \sigma) = \sup_{t \in [0, \infty)} |\Phi[x(t, a, \sigma), \dot{x}(t, a, \sigma), a]|$ — максимум модуля абсолютного ускорения амортизируемого объекта, или перегрузка. Здесь $x(t, a, \sigma)$ — решение задачи Коши для уравнения (1.1) с заданным вектором a и заданным ударным воздействием $\sigma(t)$. Обозначим $S_0(a) = \sup_{\sigma \in L_0} S(a, \sigma)$, $G_0(a) = \sup_{\sigma \in L_0} G(a, \sigma)$. Задача определения $S_0(a)$ и $G_0(a)$ для заданной характеристики амортизатора и вектора a представляется весьма актуальной именно для ударных воздействий, характеризующихся большой амплитудой и способных при превышении $S(a, \sigma)$ или $G(a, \sigma)$ заранее установленных границ привести к выходу защищаемо-

го объекта из строя. Если окажется, что $S(a, \sigma)$ или $G(a, \sigma)$ при каком-либо $\sigma(t)$ выходят за эти границы, то возникает задача определения вектора a , который удовлетворял бы неравенствам $S_0(a) \leq S_0, G_0(a) \leq G_0$. Прежде чем пытаться искать решение системы неравенств, целесообразно рассмотреть вопрос о его существовании. Решить этот вопрос позволяют следующие оптимизационные задачи: найти вектор параметров a^0 , компоненты $\{a^0\}$ которого принадлежат множеству A , такой, что: $S_0(a^0) \leq S_0, G_0(a^0) = \min_{\{a\} \in A} G_0(a)$ (задача 1); $G_0(a^0) \leq G_0, S_0(a^0) = \min_{\{a\} \in A} S_0(a)$ (задача 2). Если после решения, например, задачи 1 окажется, что $G_0(a^0) \leq G_0$, то, очевидно, система неравенств имеет, по крайней мере, одно решение a^0 . В противном случае ни при каких $\{a\} \in A$ невозможно удовлетворить указанным требованиям и предстоит либо изменить S_0 или G_0 , либо принять другую характеристику амортизатора и повторить решение задачи 1.

Для многих реальных упругодемпфированных амортизаторов пассивного типа функцию $\Phi(x, \dot{x}, a)$ можно представить в виде: $q\dot{x} + b z(x) + \varphi(k, x) + c \operatorname{sign} x$ [2]. Здесь $z(x)$ — характеристика типа сухого трения, $\varphi(k, x)$ — характеристика упругого элемента, $q, b \geq 0$ — параметры, характеризующие вязкое и сухое трение, $k \geq 0$ — параметр упругого элемента, $c \geq 0$ — параметр, характеризующий начальное усилие в амортизаторе. Аналогично [1]:

$$z(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0 \\ v/b, & x = 0, |v| \leq b \\ \operatorname{sign} v, & x = 0, |v| > b \end{cases} \quad (1.2)$$

где $v = -[q\dot{x} + \varphi(k, x) + c \operatorname{sign} x] + \sigma(t)$ — величина, равная (с точностью до множителя, равного массе объекта) сумме всех сил, действующих на объект, исключая силу сухого трения. Отметим, что компоненты вектора a есть q, b, k, c . Будем считать, что функция $\varphi(k, x)$ определена и непрерывна по x на некотором интервале, содержащем $x=0$, кроме того, $\varphi(k, x)$ неубывающая по x функция и $\varphi(k, 0) = 0$; $\Phi(k, |x|)$ монотонно возрастающая по k и $\varphi(0, x) = 0$.

2. Наряду с внешними воздействиями из классов L_0 и L_0^* будем рассматривать импульсные воздействия, состоящие из последовательностей дельта-функций Дирака $\delta(t)$ типа $\Delta_n(t) = I_1 \delta(t - \tau_1) + \dots + I_n \delta(t - \tau_n)$ ($|I_1| + \dots + |I_n| = J_n \leq J_0, I_i \neq 0, \tau_{i+1} > \tau_i$), которые будем описывать как класс L_1 , и типа $\Delta_{l,r}(t) = [I_1^+ \delta(t - \tau_1^+) + \dots + I_l^+ \delta(t - \tau_l^+)] - [I_1^- \delta(t - \tau_1^-) + \dots + I_r^- \delta(t - \tau_r^-)$; ($I_1^+ + \dots + I_l^+ = J_l^+ \leq J_0^+, I_1^- + \dots + I_r^- = J_r^- \leq J_0^-, I_i^+, I_j^- > 0, l+r = n \geq 1, \tau_{i+1}^+ > \tau_i^+, \tau_{j+1}^- > \tau_j^-, \tau_i^+ \neq \tau_i^-$), которые будем описывать как класс L_1^* , являющийся подклассом L_1 . Покажем, что для любого воздействия $\sigma \in L_0^*$ найдутся импульсные воздействия $\Delta, \Delta' \in L_1^*$, такие, что

$$S(a, \Delta) \geq S(a, \sigma), G(a, \Delta') \geq G(a, \sigma) \quad (2.1)$$

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений, эквивалентную (1.1)

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\Phi(x, y, a) + \xi(t) \quad (2.2)$$

с начальными условиями $x(0) = y(0) = 0$. В зависимости от ситуации под функцией $\xi(t)$ будем понимать либо $\Delta_n(t)$, либо $\sigma(t)$. Считая вектор параметров a в ходе доказательства (2.1) (и далее, где это не вызовет недоразумений) постоянным, будем опускать его под знаком функций Φ, S, G . На $[0, T]$ рассмотрим различные варианты расположения участков знакоопределенности функций $\sigma(t), y(t, \sigma), \theta(t, \sigma) = \varphi[k, x(t, \sigma)] + c \operatorname{sign}[x(t, \sigma)] + b \operatorname{sign}[y(t, \sigma)]$. Отметим, что если $c > b$ (т. е. зона застоя, связанная с сухим трением, отсутствует), то вместо функции $\theta(t, \sigma)$ можно рассматривать $x(t, \sigma)$. Исследуем сначала варианты, когда на рассматриваемых интервалах функции $\sigma(t) > 0$ непрерывны. Пусть на некотором интервале (t_1, t_2) :

$$\theta(t, \sigma) > 0, y(t, \sigma) > 0 \quad (2.3)$$

Обозначим $x(t_1, \sigma) = x_1$, $x(t_2, \sigma) = x_2$, $y(t_1, \sigma) = y_1$, $y(t_2, \sigma) = y_2$, $\int \sigma(t) dt = I_1$, $t \in [t_1, t_2]$. Поскольку $y(t, \sigma) > 0$, то $x = x(t, \sigma)$ монотонно возрастающая функция от t и можно определить обратную функцию $t = t_\sigma(x)$ на $[x_1, x_2]$. Определим также функции $\sigma_0(x) = \sigma[t_\sigma(x)]$ и $y_0(x, \sigma_0) = y[t_\sigma(x), \sigma_0(x)]$. Функция $y_0(x, \sigma_0)$ удовлетворяет уравнению

$$dy/dx = -\Phi(x, y)/y + \sigma_0(x)/y \quad (2.4)$$

с начальным условием $y(x_1) = y_1$. Рассмотрим систему (2.2) с импульсным воздействием $\xi(t) = I\delta(t - t_1)$, $I > 0$ и начальными условиями $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$. Эта система эквивалентна системе (2.1) с $\xi(t) = 0$ и начальными условиями $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1 + I$, решение которой будем обозначать $x = x(t, I)$, $y = y(t, I)$. Рассмотрим это решение на $[t_1, t_1^*]$, где t_1^* первый после t_1 момент обращения в нуль $y(t, I)$. Определим обратную к $x = x(t, I)$ функцию $t = t_I(x)$, а также $y_*(x, I) = y[t_I(x), I]$. Функция $y_*(x, I)$ удовлетворяет уравнению

$$dy/dx = -\Phi(x, y)/y \quad (2.5)$$

с начальным условием $y(x_1) = y_1 + I$. Покажем, что всегда найдется $I = I_1^* \leq I_1$, удовлетворяющее $y_*(x_2, I_1^*) = y_0(x_2, \sigma_0)$. Проинтегрируем (2.4) от $x = x_1$ до $x \leq x_2$, считая $y = y_0(x, \sigma_0)$, и получим

$$y_0(x, \sigma_0) = y_1 - \int_{x_1}^x \frac{\Phi[x, y_0(x, \sigma_0)]}{y_0(x, \sigma_0)} dx + \int_{x_1}^x \frac{\sigma_0(x)}{y_0(x, \sigma_0)} dx \quad (2.6)$$

$$\int_{x_1}^x \frac{\sigma_0(x)}{y_0(x, \sigma_0)} dx = \int_{t_1}^t \sigma(t) dt \leq I_1$$

Проинтегрируем (2.5) от $x = x_1$ до $x \leq x_2$, считая $y = y_*(x, I_1)$ и получим

$$y_*(x, I_1) = y_1 + I_1 - \int_{x_1}^x \frac{\Phi[x, y_*(x, I_1)]}{y_*(x, I_1)} dx \quad (2.7)$$

Предположим, что существует $x_1^* \in (x_1, x_2]$ такое, при котором $y_*(x, I_1) > y_0(x, \sigma_0) \forall x \in [x_1, x_1^*)$, а $y_*(x_1^*, I_1) = y_0(x_1^*, \sigma_0)$. Вычтем из (2.7) (2.6), будем иметь при $x = x_1^*$:

$$y_*(x_1^*, I_1) - y_0(x_1^*, \sigma_0) = I_1 - \int_{x_1}^{x_1^*} \frac{\sigma_0(x)}{y_0(x, \sigma_0)} dx - \int_{x_1}^{x_1^*} \eta(x, I_1) dx$$

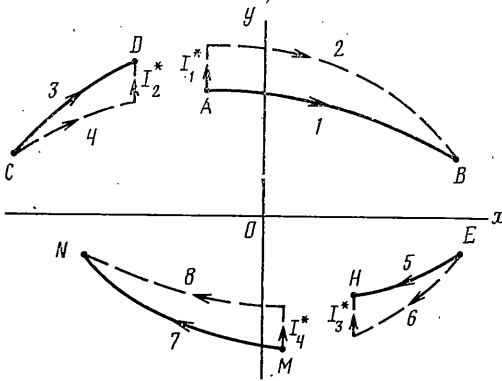
$$\begin{aligned} \eta(x, I_1) &= \Phi[x, y_*(x, I_1)]/y_*(x, I_1) - \Phi[x, y_0(x, \sigma_0)]/y_0(x, \sigma_0) = \\ &= [b + \varphi(k, x) + c \operatorname{sign} x] \times \\ &\times [y_0(x, \sigma_0) - y_*(x, I_1)] [y_*(x, I_1) y_0(x, \sigma_0)]^{-1} \end{aligned}$$

Согласно предположению, $y_0(x, \sigma_0) < y_*(x, I_1)$ при $x \in [x_1, x_1^*)$, а с учетом (2.3) $b + \varphi(k, x) + c \operatorname{sign} x > 0$, значит, $\eta(x, I_1) < 0$, откуда $\int \eta(x, I_1) \times dx < 0$, $x \in [x_1, x_1^*]$ и, следовательно, получаем противоречие $y_*(x_1^*, I_1) > y_0(x_1^*, \sigma_0)$. Таким образом, $y_*(x, I_1) > y_0(x, \sigma_0) \forall x \in [x_1, x_2]$. Положим $I = 0$, определим $x_2^* > x_1$, при котором функция $y_*(x, 0)$ обращается в нуль. Применяя теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [3], будем иметь $y_*(x, 0) < y_0(x, \sigma_0) \forall x \in (x_1, x_2^*]$. Следовательно, в силу непрерывной зависимости $y_*(x, I)$ от I всегда можно подобрать такое $I_1^* \in (0, I_1)$, что $y_*(x_2, I_1^*) = y_0(x_2, \sigma_0)$. На фазовой плоскости $\{x, y\}$ (фигура) кривая I (решение системы (2.2) с $\xi(t) = \sigma(t)$) проходит ниже кривой 2 (решение системы (2.2) с $\xi(t) = I_1^* \delta(t - t_1)$), оба решения выходят из точки $\{x_1, y_1\}$ (A) и пересекаются в точке $\{x_2, y_2\}$ (B).

Пусть на интервале (t_3, t_4) :

$$\theta(t, \sigma) < 0, \quad y(t, \sigma) > 0 \quad (2.8)$$

Обозначим $x(t_3, \sigma) = x_3$, $x(t_4, \sigma) = x_4$, $y(t_3, \sigma) = y_3$, $y(t_4, \sigma) = y_4$, $\int \sigma(t) dt = I_2$, $t \in [t_3, t_4]$. Аналогично случаю (2.3) получим функцию $y = y_0(x, \sigma_0)$, удовлетворяющую (2.4) с начальным условием $y(x_3) = y_3$. С таким же начальным условием рассмотрим уравнение (2.5), решение которого будем обозначать $y = y_*(x, 0)$. Покажем, что $y_0(x_4, \sigma_0) - y_*(x_4, 0) < I_2$. Согласно теореме о дифференциальных неравенствах $y_*(x, 0) < y_0(x, \sigma_0)$ при $x \in (x_3, x_4)$. Составим разность $y_0(x_4, \sigma_0) - y_*(x_4, 0)$, используя выражения (2.6) и (2.7) с соответствующей заменой пределов интегрирования. Получим



$$\begin{aligned} y_0(x_4, \sigma_0) - y_*(x_4, 0) &= \\ &= I_2 + \int_{x_3}^{x_4} \eta(x, 0) dx = I_2^* \end{aligned}$$

В силу $y_0(x, \sigma_0) > y_*(x, 0)$ и (2.8) $\eta(x, 0) < 0$ и, следовательно, $y_0(x_4, \sigma_0) - y_*(x_4, 0) < I_2$. Для системы (2.2) с $\xi(t) = 0$ и начальными условиями $x(t_3) = x_3$, $y(t_3) = y_3$ определим $t_3^* > t_3$, при

котором $x(t_3^*, 0) = x_4$, тогда ударный импульс $I_2^* \delta(t - t_3^*)$ переведет систему в точку $\{x_4, y_4\}$. На фазовой плоскости кривая 3 (решение системы (2.2) с $\xi(t) = \sigma(t)$) проходит выше кривой 4 (решение системы (2.2) с $\xi(t) = I_2^* \delta(t - t_3^*)$), оба решения выходят из точки $\{x_3, y_3\}$ (C) и попадают в точку $\{x_4, y_4\}$ (D) (фигура).

Если на интервале (t_5, t_6) $\theta(t, \sigma) > 0$, $y(t, \sigma) < 0$, а на интервале (t_7, t_8) $\theta(t, \sigma) < 0$, $y(t, \sigma) < 0$, то, производя в системе (2.2) замену переменных $x' = x$, $y' = -y$, $t' = t_6 - t$ (или $t' = t_8 - t$) и рассуждая аналогично случаям (2.3) и (2.8), определим $I_3^* < \int \sigma(t) dt$ ($t \in [t_5, t_6]$), $I_4^* < \int \sigma(t) dt$ ($t \in [t_7, t_8]$). Возвращаясь к переменным x, y, t , получим: кривая 5 (решение системы (2.2) с $\xi(t) = \sigma(t)$) проходит выше кривой 6 (решение системы (2.2) с $\xi(t) = I_3^* \delta(t - t_5^*)$, здесь t_5^* — корень уравнения $x(t, 0) = x_5$), оба решения выходят из точки $\{x_5, y_5\}$ (E) и попадают в точку $\{x_6, y_6\}$ (H); кривая 7 (решение системы (2.2) с $\xi(t) = \sigma(t)$) проходит ниже кривой 8 (решение системы (2.2) с $\xi(t) = I_4^* \delta(t - t_7)$), оба решения выходят из точки $\{x_7, y_7\}$ (M) и пересекаются в точке $\{x_8, y_8\}$ (N) (фигура).

Если $\sigma(t) < 0$, то заменой переменных

$$x'' = -x, \quad y'' = -y \quad (2.9)$$

приходим к случаю $\sigma(t) > 0$.

Пусть для заданного $\sigma(t)$ определены $S(\sigma) = |x(T^*, \sigma)|$ и $G(\sigma) = |\Phi[x(T^0, \sigma), y(T^0, \sigma)]|$. Тогда, анализируя участки знакоопределенности $\sigma(t)$, $\theta(t, \sigma)$ и $y(t, \sigma)$ и, определяя на каждом из них импульсные воздействия, можно найти $\Delta, \Delta' \in L_1^*$ такие, что в моменты времени T_s^*, T_g^0 будут справедливы равенства $x(T^*, \sigma) = x(T_s^*, \Delta)$, $y(T^*, \sigma) = y(T_s^*, \Delta)$, $x(T^0, \sigma) = x(T_g^0, \Delta')$, $y(T^0, \sigma) = y(T_g^0, \Delta')$. Следовательно, справедливы и неравенства (2.1).

3. Попытаемся найти $\Delta_*, \Delta_*' \in L_1$, для которых $S(\Delta_*) = \sup_{\Delta \in L_1} S(\Delta)$, $G(\Delta_*') = \sup_{\Delta \in L_1} G(\Delta)$. Покажем, что $\sup_{\Delta \in L_1} S(\Delta) = \sup_{|I_1| \leq J_0} S(\Delta_1)$, $\sup_{\Delta \in L_1} G(\Delta) = \sup_{|I_1| \leq J_0} G(\Delta_1)$, $\Delta_1 = I_1 \delta(t)$. Докажем предварительно ряд утверждений.

Утверждение 1. $W(t) \leq J_n^2/2 \quad \forall t \geq 0$, где

$$W(t) = y^2(t, \Delta_n)/2 + \int_0^{x(t, \Delta_n)} [\varphi(k, x) + c \operatorname{sign} x] dx$$

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Вследствие диссипативности системы (2.2) при $\xi(t) = I_1 \delta(t)$ справедливо неравенство $W(t) \leq I_1^2/2 \quad \forall t \geq 0$. Предположим, что утверждение 1 справедливо при $n=m$ и покажем, что оно также справедливо при $n=m+1$. Обозначим W^- значение $W(t)$ непосредственно перед ударным импульсом $I_{m+1} \delta(t - \tau_{m+1})$ и W^+ значение $W(t)$ сразу после удара. Имеем

$$\begin{aligned} W^+ &= \frac{1}{2} [y(\tau_{m+1}, \Delta_m) + I_{m+1}]^2 + \int_0^{x(\tau_{m+1}, \Delta_m)} [\varphi(k, x) + c \operatorname{sign} x] dx = \\ &= W^- + y(\tau_{m+1}, \Delta_m) I_{m+1} + I_{m+1}^2/2. \end{aligned}$$

Так как $|y(\tau_{m+1}, \Delta_m)| \leq J_m$, то $W^+ \leq J_m^2/2 + J_m |I_{m+1}| + I_{m+1}^2/2 = (J_m + |I_{m+1}|)^2/2 = J_{m+1}^2/2$ и $W(t) \leq J_{m+1}^2/2 \quad \forall t \geq 0$. Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим на фазовой плоскости $\{x, y\}$ две траектории, отвечающие решениям (2.2) с $\xi(t) = J_n \delta(t)$ и $\xi(t) = -J_n \delta(t)$ ($n \geq 1$). Выделим начальные участки этих траекторий, лежащие соответственно в первом и третьем квадрантах фазовой плоскости, которые обозначим $F(J_n)$, $F(-J_n)$. Пусть $F(J_n)$ задается уравнением $y = y_0^+(x, J_n)$, а $F(-J_n) - y = y_0^-(x, -J_n)$. Определим корни уравнений $y_0^+(x, J_n) = 0$, $y_0^-(x, -J_n) = 0$, которые обозначим $\lambda(J_n)$, $\lambda(-J_n)$. Если фазовая траектория Ψ_n системы (2.2) с $\xi(t) = \Delta_n(t)$ проходит в первом квадранте не выше $F(J_n)$, то символически будем записывать $\Psi_n \leq F(J_n)$. Если в третьем квадранте Ψ_n проходит не ниже $F(-J_n)$, то символически $|\Psi_n| \leq |F(-J_n)|$. Определим на фазовой плоскости области, ограниченные кривыми $F(J_n)$, $F(-J_n)$ и осями координат, обозначим $D(J_n)$ и $D(-J_n)$ замыкание этих областей. Пусть при некотором $t^* > \tau_n$, $x^*, y^* \in \Psi_n$ (здесь $x^* = x(t^*, \Delta_n)$, $y^* = y(t^*, \Delta_n)$), тогда в силу непересекаемости Ψ_n с $F(J_n)$ и $F(-J_n)$ при $t > \tau_n$ справедливо:

$$\text{если } x^*, y^* \in D(J_n), \text{ то } \Psi_n \leq F(J_n) \quad \forall t > t^* \quad (3.1)$$

$$\text{если } x^*, y^* \in D(-J_n), \text{ то } |\Psi_n| \leq |F(-J_n)| \quad \forall t > t^*$$

Утверждение 2. $\forall x \in (0, \lambda(J_n)] : y_0^+(x, J_{n+1}) - y_0^+(x, J_n) > |I_{n+1}|$, $\forall x \in [\lambda(-J_n), 0) : |y_0^-(x, -J_{n+1})| - |y_0^-(x, -J_n)| > |I_{n+1}|$.

Доказательство проводится аналогично случаю (2.3) с использованием соотношений (2.6), (2.7).

Утверждение 3. $\Psi_n \leq F(J_n)$, $|\Psi_n| \leq |F(-J_n)|$.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. При $n=1$ утверждение 3 является следствием (3.1). Предположим, что утверждение 3 справедливо при $n=m$, докажем его справедливость при $n=m+1$. Пусть $\Delta_{m+1}(t) = \Delta_m(t) + I_{m+1} \delta(t - \tau_{m+1})$ и непосредственно перед $m+1$ -м

ударом $x = x_{m+1}$, $y = y_{m+1}^-$, а сразу после удара $x = x_{m+1}$, $y = y_{m+1}^+ = y_{m+1}^- + I_{m+1}$.

Рассмотрим различные варианты расположения точек $\{x_{m+1}, y_{m+1}^-\}$ и $\{x_{m+1}, y_{m+1}^+\}$ на фазовой плоскости. Предположим, что

$$x_{m+1} < 0, \quad y_{m+1}^- \geq 0 \quad (3.2)$$

тогда выполняется одно из неравенств

$$y_{m+1}^+ > 0 \quad y_{m+1}^+ \leq 0 \quad (3.3)$$

Рассмотрим сначала первое из неравенств (3.3). Возможны два варианта поведения фазовой траектории при $t > \tau_{m+1}$: (а) в некоторый мо-

мент $t=\tau_x$ фазовая траектория, не выходя из четвертого квадранта, попадает в точку $\{x_t, 0\}$, которая либо является состоянием равновесия ($x_t=0$), либо принадлежит области застоя, связанной с сухим трением; (б) в некоторый момент $t=\tau_y$ фазовая траектория переходит из четвертого квадранта в первый. Если реализуется вариант (а), то в отсутствие внешних воздействий при $t>\tau_{m+1}$ система остается в точке $\{x_t, 0\}$ и в данном случае утверждение 3 справедливо. Если реализуется вариант (б), то в силу утверждения 1 $|y(\tau_y, \Delta_{m+1})| \leq J_{m+1}$ и вследствие (3.1) утверждение 3 справедливо. Рассмотрим теперь второе из неравенств (3.3). В силу предположения для $n=m$ справедливы неравенства $|x_{m+1}| \leq |\lambda(-J_m)|$ и $|y_{m+1}^-| \leq |y_0^-(x_{m+1}, -J_m)|$, тогда $|y_{m+1}^+| \leq |y_0^-(x_{m+1}, -J_m)| + |I_{m+1}|$, а с учетом утверждения 2 $|y_{m+1}^+| < |y_0^-(x_{m+1}, -J_{m+1})|$, откуда с учетом (3.1) и следует справедливость утверждения 3. Предположим теперь, что

$$x_{m+1} \geq 0, \quad y_{m+1}^- \geq 0 \quad (3.4)$$

тогда опять возможно одно из неравенств (3.3). Пусть выполняется первое из них, тогда в силу утверждения 2 $y_{m+1}^+ \leq y_0^+(x_{m+1}, J_m) + I_{m+1} < y_0^+(x_{m+1}, J_{m+1})$, и утверждение 3 справедливо. Если выполняется второе неравенство при условии (3.4), то возможны два варианта поведения фазовой траектории при $t > \tau_{m+1}$: вариант (в) аналогичный варианту (а), вариант (г), аналогичный варианту (б) с точностью до замены четвертого квадранта на второй, а первого — на третий. Варианты (в), (г) рассматриваются подобно (а) и (б). Осталось рассмотреть случаи $x_{m+1} > 0$, $y_{m+1}^- \leq 0$ и $x_{m+1} \leq 0$, $y_{m+1}^- \leq 0$. Однако заменой переменных $x'' = -x$, $y'' = -y$ эти случаи сводятся соответственно к (3.2) и (3.4). Утверждение 3 доказано. В качестве следствия утверждения 3 с учетом (3.1) получим

$$\sup_{\Delta \in L_1} S(\Delta) = \max \{ \lambda(J_0), |\lambda(-J_0)| \} \quad (3.5)$$

Покажем, что для любой точки $\{x^*, y^*\}$, принадлежащей траектории системы (2.2) с $\xi(t) = \Delta_n(t)$, найдется точка $\{x_0^*, y_0^*\}$, принадлежащая либо $F(J_0)$, либо $F(-J_0)$, для которой $|\Phi(x^*, y^*)| \leq |\Phi(x_0^*, y_0^*)|$. Пусть $x^* \geq 0$, $y^* \geq 0$ (первый квадрант), тогда в силу утверждения 3 $y_0^+(x^*, J_0) > y^*$, а значит, с учетом монотонности $\Phi(x, y)$ по y справедливо неравенство $\Phi[x^*, y_0^+(x^*, J_0)] \geq \Phi(x^*, y^*)$. Пусть $x^* \geq 0$, $y^* < 0$ (второй квадрант), тогда в силу (3.5) $x^* < \lambda(J_0)$, а в силу утверждения 1 $|y^*| < J_0$, кроме того, $|\Phi(x^*, y^*)| \leq \max \{ q|y^*| + b, \varphi(k, x^*) + c \}$, а значит, $|\Phi(x^*, y^*)| \leq \max \{ \Phi(0, J_0), \Phi[\lambda(J_0), 0] \}$. Если $\{x^*, y^*\}$ находится в третьем или четвертом квадрантах, то заменой (2.9) придем к рассмотренным случаям первого и второго квадрантов. Обозначим $g(J_0) = \max_{x \in [0, \lambda(J_0)]} \Phi[x, y_0^+(x, J_0)]$, $g(-J_0) = \max_{x \in [\lambda(-J_0), 0]} |\Phi[x, y_0^-(x, -J_0)]|$. Будем иметь

$$\sup_{\Delta \in L_1} G(\Delta) = \max \{ g(J_0), g(-J_0) \} \quad (3.6)$$

Итак, с учетом (3.5), (3.6) $\forall \sigma \in L_0$ справедливы неравенства

$$S(\sigma) \leq \max \{ \lambda(J_0), |\lambda(-J_0)| \}, \quad G(\sigma) \leq \max \{ g(J_0), g(-J_0) \} \quad (3.7)$$

Для установления равенств $\sup_{\sigma \in L_0} S(\sigma) = \sup_{\Delta \in L_1} S(\Delta)$, $\sup_{\sigma \in L_0} G(\sigma) = \sup_{\Delta \in L_1} G(\Delta)$ достаточно рассмотреть воздействие типа $\sigma^*(t) = \sigma_0^*(t \leq T)$ и $\sigma^*(t) = 0$ ($t > T$), где $T = J_0/\sigma_0^*$. Устремляя σ_0^* к $\pm\infty$, получим $\lim S(\sigma^*) = |\lambda(\pm J_0)|$, $\lim G(\sigma^*) = g(\pm J_0)$, $\sigma_0^* \rightarrow \pm\infty$.

Обратимся к задачам оптимизации, сформулированным в начале статьи. Пусть $q, k, b, c \geq 0$, тогда согласно [1] решением задачи 1 является $q^0 = 0$, $k^0 = 0$, $b^0 + c^0 = J_0^2/(2S_0)$, а решением задачи 2 — $q^0 = 0$, $k^0 = 0$, $b^0 + c^0 = G_0$. При этом характеристика

$$\Phi(x, y) = bz(y) + c \operatorname{sign} x \quad (3.8)$$

дает решение задачи о предельных возможностях противоударной амортизации для класса L_0 . Если же $q, k \geq 0$, а b, c заранее заданы, либо

$b, c=0$, то для широкого класса характеристик $\varphi(k, x)$, описанного в [4, 5], применимы изложенные там алгоритмы решения задач 1, 2.

4. Знание величин J_0^+ и J_0^- вместо одной J_0 позволяет в некоторых случаях дать более точные оценки для $\sup_{\sigma \in L_0} S(\sigma)$, $\sup_{\sigma \in L_0} G(\sigma)$, нежели (3.7). Рассмотрим один из таких случаев. Пусть $\Phi(x, y)$ имеет вид (3.8), причем $b > c$. Фазовую траекторию системы (2.2) с $\xi(t) = \Delta_{l,r}(t)$ будем обозначать $\Psi_{l,r}$. Отметим одну важную особенность траекторий $\Psi_{l,r}$. Пусть $t^* > \max\{\tau_l^+, \tau_r^-\}$, тогда

$$\begin{aligned} y(t^*, \Delta_{l,r}) \geq 0 &\rightarrow y(t, \Delta_{l,r}) \geq 0 \quad \forall t \geq t^* \\ y(t^*, \Delta_{l,r}) \leq 0 &\rightarrow y(t, \Delta_{l,r}) \leq 0 \quad \forall t \geq t^* \end{aligned} \quad (4.1)$$

Физически (4.1) означает, что фазовая траектория в отсутствие внешних воздействий при $t > t^*$, попадая в точку на оси абсцисс, которая при $b > c$ вся является зоной застоя, остается в этой точке бесконечно долго.

Утверждение 4. $\Psi_{l,r} \leq F(J_{l+1}^+)$, $|\Psi_{l,r}| \leq |F(-J_r^-)|$.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\forall x, y \in \Psi_{l,r} \quad 0 \leq y \leq J_{l+1}^+, \text{ либо } -J_r^- \leq y \leq 0 \quad (4.2)$$

Для $\Delta_{1,0}(t)$ и $\Delta_{0,1}(t)$ фазовые траектории $\Psi_{1,0}$ и $\Psi_{0,1}$ совпадают с $F(J_1^+)$ и $F(-J_1^-)$, для которых (4.2) справедливо. Пусть (4.2) выполняется для $\Delta_{l,r}(t)$, покажем, что (4.2) также выполняется для $\Delta_{l+1,r}(t)$ и $\Delta_{l,r+1}(t)$. Рассмотрим для определенности $\Delta_{l+1,r}(t)$. Предположим, что непосредственно перед последним импульсом $I_{l+1}^+ \delta(t - \tau_{l+1}^+)$ состояние системы $x = x_{l+1}$, $y = y_{l+1}^-$, а сразу после удара $x = x_{l+1}$, $y = y_{l+1}^+ = y_{l+1}^- + I_{l+1}^+$.

Исследуем различные варианты расположения точек $\{x_{l+1}, y_{l+1}\}$ и $\{x_{l+1}, y_{l+1}^+\}$ на фазовой плоскости.

Пусть $y_{l+1}^- \geq 0$, тогда и $y_{l+1}^+ > 0$. При $t > \tau_{l+1}^+$ функция $y(t, \Delta_{l+1,r})$ монотонно убывает, так как $y' = -\Phi(x, y) < 0 \quad \forall y > 0$. Поскольку $y_{l+1}^- \leq J_{l+1}^+$, то $0 \leq y \leq y_{l+1}^+ \leq J_{l+1}^+$, а с учетом (4.1) $-J_r^- \leq y \leq 0$. Аналогичным образом проверяется справедливость (4.2) в случае $y_{l+1}^- \leq 0$, а также для $\Delta_{l,r+1}(t)$. Обратимся к доказательству утверждения 4, которое также проведем по индукции. Для $\Delta_{1,0}(t)$ и $\Delta_{0,1}(t)$ утверждение 4 очевидно. Предположим, что утверждение 4 справедливо для $\Delta_{l,r}(t)$ и покажем, что оно также справедливо для $\Delta_{l+1,r}(t)$ и $\Delta_{l,r+1}(t)$. Рассмотрим для определенности $\Delta_{l+1,r}(t)$. Исследуем опять различные варианты расположения точек $\{x_{l+1}, y_{l+1}^-\}$ и $\{x_{l+1}, y_{l+1}^+\}$ на фазовой плоскости. Пусть $y_{l+1}^- \geq 0$, а $x_{l+1} < 0$, тогда в силу (4.2), с учетом (3.1) и (4.1) утверждение 4 справедливо.

Если же $x_{l+1} \geq 0$, то с учетом утверждения 2 $y_0^+(x_{l+1}, J_{l+1}^+) - y_{l+1}^+ > 0$ и в силу (3.1) и (4.1) утверждение 4 справедливо. В случае $y_{l+1}^- < 0$, принимая во внимание, что $\lambda(-J_r^-) \leq x_{l+1} \leq \lambda(J_{l+1}^+)$, справедливость утверждения 4 показывается аналогичным образом. Если $\xi(t) = \Delta_{l,r+1}(t)$, то заменой (2.9) приходим к уже рассмотренному случаю, когда последний $(l+r+1)$ -й импульс является положительным. Утверждение 4 доказано.

В качестве следствия утверждения 4 получим

$$\sup_{\sigma \in L_0} S(\sigma) \leq \max\{\lambda(J_0^+), |\lambda(-J_0^-)|\}, \quad \sup_{\sigma \in L_0} G(\sigma) = b + c.$$

Сформулируем две задачи: найти b^0, c^0 такие, что $S^*(b, c) = \sup_{\Delta \in L_1} S(b, c, \Delta) \leq S_0$, $G^*(b, c) = \sup_{\Delta \in L_1} G(b, c, \Delta) \rightarrow \min$ (задача 1*); $G^*(b, c) \leq G_0$, $S^*(b, c) \rightarrow \min$ (задача 2*). С учетом результатов [1] получим, что в задаче 1*: $b^0 + c^0 = (J_0^*)^2 / (2S_0)$, где $J_0^* = \max\{J_0^+, J_0^-\}$, причем $G^*(b^0, c^0) = b^0 + c^0$; в задаче 2*: $b^0 + c^0 = G_0$, а $S^*(b^0, c^0) = (J_0^*)^2 / (2G_0)$.

Сравним результаты решения задач 2, 2*: в той и другой задачах получается $b^0 + c^0 = G_0$, однако, $S_\sigma(b^0, c^0) = J_0^2 / (2G_0)$ и $S_\sigma(b^0, c^0) / S^*(b^0, c^0) = J_0^2 (J_0^*)^{-2} = \mu$. Покажем, что $\mu \leq 4$. Действительно, если $J_0^+ > J_0^-$, то $\mu = (J_0^+ + J_0^-)^2 (J_0^+)^{-2} = (1 + J_0^- / J_0^+)^2 < 4$, если $J_0^+ < J_0^-$, то $\mu = (1 + J_0^+ / J_0^-)^2 < 4$, если $J_0^+ = J_0^- = J_0 / 2$, то $\mu = 4$. Таким образом, наличие информации о величинах J_0^+ , J_0^- позволяет уменьшить линейные размеры противоударного амортизатора в μ раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотник Н. Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
2. Вибрации в технике: Справочник. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. М.: Машиностроение, 1981. 456 с.
3. Бельяк В. Н. Качественные методы теории нелинейных колебаний сосредоточенных систем. Горький: Изд-во ГГУ, 1980. 98 с.
4. Баландин Д. В., Марков А. А. Оптимизация параметров нелинейных противоударных амортизаторов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 61–66.
5. Баландин Д. В., Малов Ю. Я. Оптимизация параметров амортизаторов при случайных ударных воздействиях // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 27–33.

Горький

Поступила в редакцию
6.X.1987