МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 534.13

А. В. СТЕПАНОВ

О ВЫВОДЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБЩЕГО ВИДА С ЗАТУХАНИЕМ

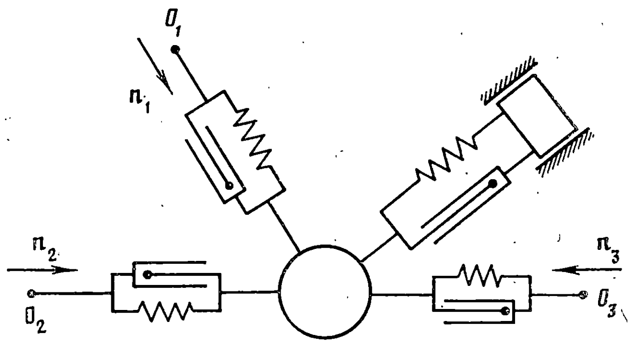
Для демпфирования свободных колебаний упругих систем теоретический и практический интерес представляет использование упруго-вязких гасителей. В настоящей работе выводится уравнение, решая которое, можно находить собственные частоты линейной упругой системы с присоединенным к ней линейным гасителем весьма общего вида и соответствующие этим частотам коэффициенты затухания. Самостоятельный интерес представляет нахождение передаточной функции гасителя в виде совокупности точечных масс, последовательно соединенных между собой демпферами и пружинами.

1. В [1, 2] исследовано гашение свободных колебаний линейных упругих систем при помощи гасителя в виде точечной массы, присоединенной к упругой системе линейными упругим и вязким элементами. Показано, что, если масса гасителя m мала по сравнению с массой M упругой системы, то при соответствующим образом подобранных параметрах связей коэффициент затухания свободных колебаний, соответствующих наименьшей собственной частоте, может быть пропорционален с точностью до малых более высокого порядка величине $(m/M)^{1/2}$. Однако коэффициенты, соответствующие более высоким собственным частотам, будут в этом случае пропорциональны $(m/M)^{3/2}$, т. е. значительно меньше. Можно попытаться, подбирая параметры связей, максимизировать минимальный из коэффициентов затухания, соответствующих всем собственным частотам или заданной части их. Этот максимум будет пропорционален m/M.

Таким образом, чтобы обеспечить более быстрое, чем с помощью одного простейшего гасителя, затухание свободных колебаний на всех собственных частотах или даже на части их, к упругой системе необходимо присоединять либо несколько гасителей, либо хотя бы и один, но более сложный. Наконец, если в упругой системе есть кратные собственные частоты, то на них возможны незатухающие свободные колебания при любых параметрах гасителя и любой точке его присоединения. Простейший гаситель малоэффективен и в том случае, когда в упругой системе есть близкие друг к другу собственные частоты.

Выведем характеристическое уравнение для упругой системы, к которой присоединены линейные гасители общего вида (обладающие несколькими степенями свободы, имеющие несколько точек присоединения и т. д.). Для этого необходимо ввести понятия передаточной функции и передаточной матрицы.

Рассмотрим систему масс, связанных демпферами и пружинами друг с другом, с неподвижным основанием и с несколькими подвижными точками $O_1, O_2, \ldots, O_R$ (фиг. 1); пусть для $k=1, 2, \ldots, R$ точка O_k может перемещаться в направлении единичного вектора $\mathbf{n}_k$ (все векторы здесь и далее будем считать столбцами). Если для некоторого k перемещение точки O_k относительно положения равновесия системы масс в направлении $\mathbf{n}_k$ имеет вид $x_k(t)=x_0e^{\lambda t}$, где λ — параметр, а для всех $j\neq k$ точки O_j неподвижны, то при надлежащем выборе начальных условий (перемещений, скоростей) для масс на каждую точку O_j $(j=1, 2, \ldots, R)$ со стороны системы масс будет действовать в направлении $\mathbf{n}_j$ сила $F_{jk}(t)=F_{0jk}e^{\lambda t}$, где F_{0jk} пропорционально x_0. Можно образовать матрицу Φ порядка R, эле-



Фиг. 1

менты которой имеют вид $\varphi_{jk}=-F_{0jk}/x_0$ и являются функциями λ. Назовем эту матрицу передаточной матрицей рассматриваемой системы масс.

Понятие передаточной матрицы (для случая $R=1$ — передаточной функции), введенное таким образом, аналогично соответствующему понятию теории автоматического регулирования; при этом входными величинами являются начальные перемещения точек $O_1, O_2, \ldots, O_R$, а выходными — начальные значения сил, действующих на эти точки со стороны присоединенных к ним масс [3]; если $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{F}_0$—R-мерные векторы начальных значений перемещений и сил соответственно, то $F_0=-\Phi x_0$.

Этим же способом передаточная матрица строится в случае, если какие-либо из точек $O_1, O_2, \ldots, O_R$ имеют по нескольку степеней свободы. Для этого нужно рассматривать единичные векторы возможных перемещений этих точек $n_1, n_2, \ldots, n_Q$ (те из них, которые относятся к одной и той же точке, должны быть попарно ортогональными; $Q>R$), а силы, действующие на эти точки вследствие перемещения каждой из них (при этом каждая точка должна перемещаться лишь вдоль одного из относящихся к ней векторов, а другие точки — оставаться неподвижными), раскладывать по относящимся к этой точке векторам. Передаточная матрица в этом случае будет иметь порядок Q.

2. Рассмотрим теперь линейную консервативную систему общего вида, занимающую заданный объем V и обладающую известными упругими и инерционными свойствами. Первые могут быть заданы матрицей влияния $K(N, N')$, а вторые — матрицей обобщенных плотностей $\rho(N)$ (N, N' — произвольные точки объема V). Вид этих матриц зависит от системы координат.

В любой ортонормированной системе координат движение упругой системы может быть описано интегро-дифференциальным уравнением

$$\mathbf{U}(N,t)=\int\limits_V K(N,N')\left[-\rho(N)\frac{\partial^2\mathbf{U}(N',t)}{\partial t^2}+\mathbf{F}(N',t)\right]dV(N') \qquad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{U}(N, t)$ — перемещение точки N в момент t по отношению к положению равновесия, $\mathbf{F}(N', t)$ — внешняя сила, отнесенная к единице объема, действующая на точку N' в тот же момент, $dV(N')$ — элемент объема в точке N'. Сила $\mathbf{F}$ может также зависеть от $\mathbf{U}(N', t)$ и $\partial\mathbf{U}(N', t)/\partial t$.

Известно, что $K(N, N')=K^T(N', N)$ [4], $\rho(N)=\rho^T(N)$ (знак T обозначает транспозицию) и если полная масса упругой системы M конечна, то для матриц K и ρ существуют спектры ортонормированных собственных функций и собственных чисел, удовлетворяющих соотношениям

$$\mathbf{u}_j(N)=\Omega_j^2\int\limits_V K(N,N')\rho(N')\mathbf{u}_j(N')dV(N')$$

$$\int\limits_V \mathbf{u}_j^T(N)\rho(N)\mathbf{u}_k(N)dV(N)=M\delta_{jk} \qquad (2.2)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера; $1 \leqslant j,\ k \leqslant S$, где $S \leqslant \infty$ — число степеней свободы упругой системы.

Матрица влияния может быть представлена в виде

$$K(N, N') = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{S} \mathbf{u}_j(N) \mathbf{u}_j^T(N') \Omega_j^{-2} \tag{2.3}$$

Для несвободной и динамически устойчивой системы все Ω_j — вещественные (собственные частоты системы; без ограничения общности — положительные).

Пусть к рассматриваемой упругой системе в точках $L_1, L_2, \ldots, L_R$ присоединен гаситель в виде системы точечных (или распределенных) масс, связанных с этими точками, друг с другом и с неподвижным основанием; $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_R$ — единичные векторы, в направлении которых со стороны гасителя на упругую систему могут действовать силы. Среди точек $L_1, L_2, \ldots, L_R$ могут быть и совпадающие, тогда относящиеся к таким точкам векторы из числа $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_R$ должны быть попарно ортогональными. Предположим, что для $k, l=1, 2, \ldots, R$ все компоненты $K(L_k, L_l)$ конечны, и выведем для упругой системы с таким гасителем характеристическое уравнение.

Пусть $\Phi(\lambda)$ — передаточная матрица рассматриваемого гасителя, порядок которой R, для $1 \leqslant k \leqslant R$, $1 \leqslant l \leqslant S$: $v_{kl} = \mathbf{n}_k^T \mathbf{u}_l(L_k)$, а перемещение произвольной точки $N \in V$ в момент t имеет вид

$$\mathbf{U}(N, t) = \mathbf{U}_0(N) e^{\lambda t} \tag{2.4}$$

функция $\mathbf{U}_0(N)$ и характеристический показатель λ пока неизвестны. Тогда проекция перемещения точки L_l $(1 \leqslant l \leqslant R)$ на $\mathbf{n}_l$ имеет вид

$$x_l(t) = x_{0l} e^{\lambda t}, \quad x_{0l} = \mathbf{n}_l^T \mathbf{U}_0(L_l) \tag{2.5}$$

На точку L_k в направлении $\mathbf{n}_k$ со стороны гасителя при соответствующем выборе начальных условий для него может действовать сила $F_k(t) = F_{0k} e^{\lambda t}$; в общем случае между R-мерными векторами $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{F}_0$, компонентами которых являются x_{0k} и F_{0k} $(k=1, 2, \ldots, R)$ соответственно, имеет место соотношение

$$\mathbf{F}_0 = -\Phi(\lambda) \mathbf{x}_0 \tag{2.6}$$

Функция $\mathbf{U}(N, t)$, имеющая вид (2.4), должна быть решением уравнения (2.1), если входящая в его правую часть сила $\mathbf{F}$ представляет собой совокупность R сосредоточенных сил вида $F_{0k} \mathbf{n}_k e^{\lambda t}$, приложенных к точкам L_k $(k=1, 2, \ldots, R)$, иными словами,

$$\mathbf{F}(N', t) = e^{\lambda t} \sum_{1}^{R} F_{0k} \mathbf{n}_k \delta(N', L_k) \tag{2.7}$$

где $\delta(N', L_k)$ — дельта-функция. Подставляя (2.3), (2.4) и (2.7) в (2.1), получаем

$$\mathbf{U}_0(N) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{R} \sum_{l=1}^{S} v_{kl} F_{0k} \mathbf{u}_l(N) (\lambda^2 + \Omega_l^2)^{-1} \tag{2.8}$$

Умножим обе части (2.8) на $\mathbf{n}_j^T$ $(1 \leqslant j \leqslant R)$ при $N=L_j$, тогда с учетом (2.5):

$$x_{0j} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{R} \sum_{l=1}^{S} v_{jl} v_{kl} F_{0k} (\lambda^2 + \Omega_l^2)^{-1} \tag{2.9}$$

Если ввести матрицу $G(\lambda)$ порядка R, в которой

$$g_{jk}(\lambda)=\frac{1}{M}\sum_{l=1}^{S} v_{jl}v_{kl}(\lambda^2+\Omega_l^2)^{-1} \tag{2.10}$$

то (2.9) с учетом (2.6) можно записать так

$$\mathbf{x}_0=G(\lambda)\mathbf{F}_0=-G(\lambda)\Phi(\lambda)\mathbf{x}_0 \tag{2.11}$$

Матрица $G(\lambda)$ представляет собой матрицу податливости упругой системы. Равенство (2.11) может иметь место для ненулевого вектора $\mathbf{x}_0$ только в том случае, если

$$\det[E+G(\lambda)\Phi(\lambda)]=0 \tag{2.12}$$

где E — единичная матрица порядка R. Раскрывая определитель и устраняя возможные полюсы, получаем характеристическое уравнение (первая сумма по $1\leqslant j\leqslant R$, $1\leqslant k\leqslant R$, $1\leqslant l\leqslant S$, вторая по $1\leqslant j_1<j_2\leqslant R$, $1\leqslant k_1<k_2\leqslant R$, $1\leqslant l_1<l_2\leqslant S$:

$$\left[\prod_{j=1}^{N}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\right]\left[\prod_{j=1}^{S}\left(1+\frac{\lambda^2}{\Omega_j^2}\right)\right]\left\{1+\frac{1}{M}\sum v_{jl}v_{kl}\varphi_{jk}(\lambda)(\lambda^2+\Omega_l^2)^{-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{M^2}\sum\begin{vmatrix} v_{j_1l_1} & v_{j_2l_1}\\ v_{j_1l_2} & v_{j_2l_2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} v_{k_1l_1} & v_{k_2l_1}\\ v_{k_1l_2} & v_{k_2l_2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \varphi_{j_1k_1}(\lambda) & \varphi_{j_2k_1}(\lambda)\\ \varphi_{j_1k_2}(\lambda) & \varphi_{j_2k_2}(\lambda)\end{vmatrix}(\lambda^2+\Omega_{l_1}^2)^{-1}(\lambda^2+\Omega_{l_2}^2)^{-1}+\ldots\right\}=0 \tag{2.13}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ — характеристические числа гасителя при неподвижных точках $L_1, L_2, \ldots, L_R$; каждое из них берется столько раз, какова его кратность.

Если для $k=1, 2, \ldots, R$ к точке L_k присоединена при помощи пружины жесткости c_k и демпфера с коэффициентом вязкого трения h_k масса m_k так, чтобы иметь возможность перемещаться в направлении единичного вектора $\mathbf{n}_k$ и точки $L_1, L_2, \ldots, L_R$ попарно различны, то передаточная матрица имеет диагональный вид и в ней $\varphi_{kk}(\lambda)=m_k\lambda^2(h_k\lambda+c_k)(m_k\lambda^2+h_k\lambda+c_k)^{-1}$. В безразмерных величинах

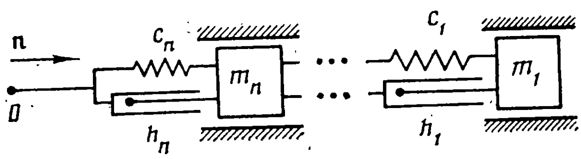
$$r=-\lambda/\Omega_1,\quad z_k=h_k/(m_k\Omega_1),\quad \sigma_k=c_k/(m_k\Omega_1^2)$$
$$\theta_k=m_k/M\ \ (k=1, 2, \ldots, R),\ \omega_l=\Omega_l/\Omega_1\ \ (l=1, 2, \ldots, S) \tag{2.14}$$

уравнение (2.13) примет вид (первая сумма по $1\leqslant k\leqslant R$, $1\leqslant l\leqslant S$, вторая по $1\leqslant k_1<k_2\leqslant R$, $1\leqslant l_1<l_2\leqslant S$):

$$\left[\prod_{j=1}^{R}(r^2-z_jr+\sigma_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{S}\left(1+\frac{r^2}{\omega_j^2}\right)\right]\left\{1+r^2\sum v_{kl}^2\theta_k(\sigma_k-z_kr)(r^2-z_kr+\sigma_k)^{-1}\times\right.$$
$$\times(r^2+\omega_l^2)^{-1}+r^4\sum\begin{vmatrix} v_{k_1l_1} & v_{k_2l_1}\\ v_{k_1l_2} & v_{k_2l_2}\end{vmatrix}^2\theta_{k_1}\theta_{k_2}(\sigma_{k_1}-z_{k_1}r)(\sigma_{k_2}-z_{k_2}r)\times$$
$$\left.\times[(r^2-z_{k_1}r+\sigma_{k_1})(r^2-z_{k_2}r+\sigma_{k_2})(r^2+\omega_{l_1}^2)(r^2+\omega_{l_2}^2)]^{-1}+\ldots\right\}=0 \tag{2.15}$$

Такое же уравнение получается и в случае, если среди точек L_1, $L_2, \ldots, L_R$ есть совпадающие.

3. В качестве примера найдем передаточную функцию для системы n масс, последовательно соединенных друг с другом и с подвижной точкой O демпферами и пружинами; все эти массы и точка O могут перемещаться в направлении одного и того же единичного вектора $\mathbf{n}$ (фиг. 2). Пусть для аналогичной системы , но без массы m_n, пружины c_n и демпфера h_n передаточная функция $\varphi_{n-1}(\lambda)$ найдена; если $x_0(t)$ и $x_n(t)$ — перемещения



Фиг. 2

точки O и массы m_n в направлении $\mathbf{n}$, а $F(t)$ — сила, действующая со стороны массы m_{n-1} на массу m_n в том же направлении, то должно быть

$$m_n x_n^{\cdot\cdot} = (c_n + h_n d/dt)(x_0 - x_n) + F \tag{3.1}$$

Если $x_0(t) = X_0 e^{\lambda t}$, $x_n(t) = X_n e^{\lambda t}$, $F(t) = -\varphi_{n-1}(\lambda) x_n(t)$, то из (3.1) можно найти

$$X_n = (h_n\lambda + c_n)[m_n\lambda^2 + h_n\lambda + c_n + \varphi_{n-1}(\lambda)]^{-1} X_0 \tag{3.2}$$

$$\varphi_n(\lambda) = (h_n\lambda + c_n)(X_0 - X_n)/X_0 = (h_n\lambda + c_n)[m_n\lambda^2 + \varphi_{n-1}(\lambda)][m_n\lambda^2 + h_n\lambda + \\ + c_n + \varphi_{n-1}(\lambda)]^{-1}$$

$$\varphi_0(\lambda) = 0 \tag{3.3}$$

а при $n > 0$ функция $\varphi_n(\lambda)$, находимая по рекуррентной формуле (3.3), представляет собой отношение двух многочленов от λ. Если ввести безразмерные величины

$$s_k = c_k/(M\Omega_1^2), \quad \zeta_k = h_k\Omega_1/c_k$$

$$p_k = m_k\Omega_1^2/c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.4}$$

а r, M, Ω_1 — те же, что и выше, то $\varphi_n(\lambda) = M\Omega_1^2 r^2 f_{1n}(r)/f_{2n}(r)$, где $f_{10}(r) = 0$, $f_{20}(r) = 1$, а многочлены $f_{1n}(r)$ и $f_{2n}(r)$ определяются рекуррентными формулами

$$f_{1n}(r) = (-\zeta_n r + 1) s_n p_n f_{2,\, n-1}(r) + f_{1,\, n-1}(r) \tag{3.5}$$

$$f_{2n}(r) = (p_n r^2 - \zeta_n r + 1) f_{2,\, n-1}(r) + (r^2/s_n) f_{1,\, n-1}(r)$$

Преимущество замены переменных (3.4) перед (2.14) в том, что $f_{2n}(0) = 1$ при всех n.

Исследуя корни уравнения (2.13), можно решать весьма широкий класс задач оптимизации затухания свободных колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нагаев Р. Ф., Степанов А. В.* Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 24–28.
2. *Степанов А. В.* Об оптимальном линейном гасителе первой моды собственных колебаний консервативных систем // Динамика систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1982. С. 80–95.
3. *Айзерман М. А.* Теория автоматического регулирования. М.: Наука, 1966. 452 с.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 27.II.1987