МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 531.36

А. С. СУМБАТОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ВАЛА В ОПОРАХ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Рассматривается плоскопараллельное движение твердого тела по неподвижной поверхности с сухим трением. Приведены общие уравнения движения тела в режиме качения со скольжением, которые не содержат реакции связи. На основании этих уравнений решаются две задачи об устойчивости стационарных вращений тела с круглым отверстием, надетым на неподвижный круговой цилиндр, и тела с цапфами, опирающимися на две соосные круговые цилиндрические поверхности. Во второй задаче для случая малых значений коэффициента трения получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных вращений.

1. Пусть твердое тело скользит по неподвижной поверхности. Предположим, что в любой момент времени мгновенные скорости всех точек тела параллельны некоторой фиксированной плоскости.

Рассмотрим сечение этой плоскостью, проведенной через какую-либо точку P соприкосновения тела с опорной поверхностью. Пусть регулярная замкнутая выпуклая кривая PS — контур тела в этом сечении, PS_1 — опорная кривая, точка G — ортогональная проекция центра масс тела на плоскость сечения.

Чтобы составить уравнения движения тела, необходимо знать ускорение какой-либо одной из его точек. Вычислим ускорение точки тела, которая совпадает с мгновенным центром C вращения в рассматриваемом плоском сечении.

В подвижной правой системе координат Pxy с осью Py, направленной внутрь движущегося тела, точка C имеет координаты $X=0$, $Y=v/\omega$, где v — алгебраическое значение скорости точки P тела, ω — угловая скорость. Искомое ускорение $\mathbf{a}_C=(\omega u_y,\ -\omega u_x)$, $\mathbf{u}$ — скорость движения мгновенного центра вращения по неподвижной центроиде [1]. Очевидно

$$u_x=wk_1(1/k_1-v/\omega),\quad u_y=v^{\cdot}/\omega-v\omega^{\cdot}/\omega^2$$
$$w=(kv-\omega)/(k-k_1) \qquad (1.1)$$

где k и k_1 — кривизны (со знаком) соответственно кривых PS и PS_1.

Формула (1.1) выражает величину скорости w видимого образа — геометрической точки P. Действительно, обозначим через ds_1 и ds элементы пути, пройденные геометрической точкой P вдоль соответственно опорной и контурной кривых (положительным считается направление оси Px), через $d\alpha$ — малый угол поворота контура по отношению к касательной Px, через $d\beta$ — малый угол поворота касательной Px, обкатывающей опорную кривую. Имеем

$$w=ds_1/dt,\ v=ds_1/dt-ds/dt,\ d\alpha=-kds,\ d\beta=k_1ds_1$$

Подстановкой этих выражений в соотношение $\omega dt=d\alpha+d\beta$ приходим к формуле (1.1).

Зная $\mathbf{a}_C$, можно вычислить по теореме Ривальса ускорение точки G тела $\mathbf{a}_G=(v^{\cdot}-\omega^{\cdot}\eta-\omega^2\xi,\ \omega^2 l+\omega^{\cdot}\xi-\omega^2\eta)$, $(\xi,\ \eta)$ — координаты точки G в осях Pxy:

$$l=1/k+kk_1(k-k_1)^{-1}(Y-1/k)^2$$

Точка A тела с координатами $(0, l)$ принадлежит окружности перегибов [1]. Главный вектор сил инерции равен $-m\mathbf{a}_G$ (m — масса тела), главный момент сил инерции имеет выражение $-m\varkappa^2\omega^{\cdot}$ ($\varkappa$ — центральный радиус инерции тела).

Для составления уравнений движения тела воспользуемся принципом Даламбера, согласно которому активные силы, силы реакции связей и силы инерции в любой момент времени образуют нулевую систему, следовательно, необходимо равенство нулю сумм моментов указанных сил относительно каждой из двух произвольных точек (полюсов) плоского сечения. Выберем эти полюсы на линии действия реакции связи.

По закону Амонтона — Кулона, если N — нормальная составляющая реакции, приложенной к движущейся по поверхности с трением материальной частице, то тангенциальная составляющая равна $F=fN$, где $0<f<1$ постоянный коэффициент трения скольжения, который определяют экспериментально.

Модель сухого трения принимается и в случае плоскопараллельного движения тела со скольжением. Если контакт тела с опорной поверхностью не точечный, а осуществляется вдоль прямолинейных образующих цилиндрической опорной поверхности, то F и N — компоненты результирующего вектора $\mathbf{R}$ реакции связи. Вектор $\mathbf{R}$ постоянно параллелен плоскости движения, поэтому его можно изобразить приложенным к точке контакта P плоского сечения.

В осях Pxy линия действия силы $\mathbf{R}$ имеет уравнение $x+yf=0$ при $v>0$ и уравнение $x-yf=0$ при $v<0$. Острый угол $2 \operatorname{arctg} f$ между этими прямыми будем называть двойным углом трения.

Рассмотрим две точки $E(-\mu\eta f, \eta)$ и $D(-\mu\zeta f, \zeta)$, расположенные на линии действия реакции $\mathbf{R}$; $\mu=\operatorname{sign} v$, $\zeta=(\varkappa^2+\xi^2+\eta^2)(\eta-\xi\mu f)^{-1}$.

Сумма главного момента M_E активных сил и главного момента сил инерции, взятых относительно полюса E, равна нулю. То же для полюса D. Получаем два уравнения движения тела в режиме качения со скольжением

$$s\omega^{\cdot}=\omega^2(\xi+\eta f\mu)(\eta-l)+M_E/m \qquad (1.2)$$

$$sv^{\cdot}=\omega^2\{\xi s+(\eta-l)\,[\xi\eta+(\varkappa^2+\eta^2)f\mu]\}+(\eta-\xi f\mu)M_D/m$$

$$s=\varkappa^2+\xi^2+\xi\eta f\mu$$

В процессе движения тела функция s может менять знак, обращаясь в нуль. Этот случай требует дополнительного анализа.

Как показано в [2], при условии $s<0$ в системе возможны возникновение ударных реакций и, в случае удерживающей связи, неоднозначность решений (парадокс Пэнлеве). Неравенство $s<0$ отмечалось в [2—5].

В случае неудерживающей связи к уравнениям (1.2) следует присоединить условие натяжения: $N>0$, т. е. $[m\omega^2\varkappa^2(l-\eta)+\xi M_E]s^{-1}-Q>0$, где Q — проекция главного вектора активных сил на ось Py.

2. Рассмотрим две механические системы, в которых твердое тело совершает плоскопараллельное движение. В первой системе тело имеет круглое цилиндрическое отверстие радиуса r, надетое на неподвижный круговой цилиндр радиуса $r_1<r$. Во второй системе тело снабжено двумя цапфами радиуса r, вставленными соответственно в два одинаковых соосных круговых цилиндрических отверстия радиуса $r_1>r$. В общем случае центр масс тела может не лежать на общей оси цапф, поэтому назовем такое тело несимметричным валом.

Обозначим точку встречи с плоскостью сечения оси неподвижного цилиндра в первой системе и оси неподвижных отверстий во второй через O_1, и соответственно для оси отверстия тела в первой системе и оси цапф во второй — через O.

Для описания положения тела введем два угла: φ — угол между произвольной осью O_1H, фиксированной в плоском сечении, и осью OG, ψ — угол между осями O_1H и Py.

Угол $\chi=\psi-\varphi$ характеризует поворот тела относительно подвижной системы координат Pxy.

С учетом (1.1) имеем $\psi^{\cdot}/k_1=(kv-\omega)(k-k_1)^{-1}$, $\varphi^{\cdot}=\omega$. Отсюда следует кинематическое уравнение

$$\chi^{\cdot}=k(k-k_1)^{-1}(k_1v-\omega) \tag{2.1}$$

Пусть в обеих системах к телу приложен постоянный вращающий момент L, а в точках контакта развивается сила сухого трения. Динамические уравнения качения тела со скольжением имеют вид (1.2), где $M_E=M_D=L$, кривизны k и k_1 отрицательны в первой системе и положительны во второй.

Исследуем существование и устойчивость движений тела, в которых $\omega=\omega_0$, $v=v_0(\neq 0)$ — постоянные. Приравняв правые части (1.2) нулю, найдем два решения для координат ξ, η точки G. Одно решение соответствует случаю $s=0$, который не рассматривается. Другое решение

$$\xi=W/l,\ \eta=l-W/(lf\mu),\ W=L/(m\omega_0^2) \tag{2.2}$$

$$\xi=\rho\sin\chi,\ \eta=1/k+\rho\cos\chi\ \ (\rho=OG) \tag{2.3}$$

Сопоставив (2.2) с (2.3), получим

$$\frac{v_0}{\omega_0}=-\frac{1}{k}+\left[\frac{\rho(k-k_1)}{kk_1}\left(\cos\chi+\frac{\mu\sin\chi}{f}\right)\right]^{1/2} \tag{2.4}$$

т. е. $\chi=\chi_0$ — постоянный угол (тело находится в относительном равновесии).

Из уравнения (2.1) тогда следует, что

$$v_0/\omega_0=1/k_1 \tag{2.5}$$

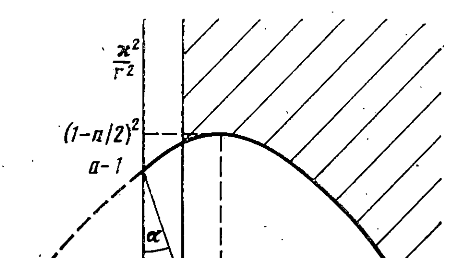
Подставляя (2.5) в уравнение (2.4), приведем его к виду

$$\sin(\mu\chi+\alpha)=(1/k_1-1/k)(1+f^2)^{-1/2}f/\rho\ \ (\operatorname{tg}\alpha=f) \tag{2.6}$$

Таким образом, решение (2.2) существует, если

$$(1/k_1-1/k)(1+f^2)^{-1/2}f/\rho\leqslant 1 \tag{2.7}$$

Это решение имеет простой механический смысл. В своем движении относительно осей Pxy тело находится в равновесии. При этом, так как $\omega^{\cdot}=0$, то точка $A(0,l)$ является мгновенным центром ускорений [1] в рассматриваемом движении тела, а, поскольку $l=1/k_1$ в силу (2.5), то она совпадает с неподвижной точкой O_1. Главный вектор сил инерции представляет центробежную силу, направленную по оси O_1G. Она уравновешивается реакцией связи, поэтому острый угол между прямыми Py и O_1G равен углу трения, причем, точка G и вектор v_0 лежат в одной полуплоскости по отношению к прямой Py. Второе условие равновесия (главный момент сил равен нулю) показывает, что, если наложенная на тело связь напряжена, то величина $L\mu$ отрицательна в первой системе и положительна во второй.



Следовательно, при условии (2.7) уравнение (2.5) всегда имеет корень: $\chi=\chi_0$ — тупой угол. Зная χ_0, из уравнений (2.2), (2.3), (2.5) находим значения постоянных v_0, ω_0.

Пусть трение мало, т. е. $f\ll 1$. Равенство $(\sin\alpha)/\rho=(\sin\mu\chi)/O_1G$ $(O_1G>|r-r_1|)$ дает $r^{-1}\rho\sin\mu\chi\ll 1$.

Аналитическое исследование устойчивости найденного решения проведем в случае $(\pi-\mu\chi)\ll 1$.

Используя уравнения (1.2), (2.1) и формулы (2.3), составим линеаризованные уравнения возмущенного движения тела и запишем для них характеристическое уравнение $\lambda^3+b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3=0$. Согласно критерию

Вышнеградского [6] необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$b_1>0, \quad b_3>0, \quad b_1b_2-b_3>0 \tag{2.8}$$

Удерживая в вычислениях степени f не выше первой, получим

$$b_1=2f\omega_0\mu, \; b_3=jz, \; b_1b_2-b_3=j[\varkappa^2+z^2-z/k_1]$$

$$z=\rho+\delta, \; \delta=1/k_1-1/k>0, \; j=2f|v_0|\omega_0^2\rho/(\varkappa^2\delta)$$

Поскольку в первой системе величины v_0 и ω_0 имеют разные знаки (см. (2.5), $k_1<0$), то $b_1<0$; рассматриваемое движение тела неустойчиво.

Для несимметричного вала первое и второе неравенство (2.8) выполняются автоматически, а третье будет удовлетворено, если на плоскости параметров (фигура) точка с координатами $x=\rho/r$, $y=\varkappa^2/r^2$ лежит внутри заштрихованной области (области устойчивости). Эта область ограничена снизу дугой параболы $y+(x+a-1)(x-1)=0$, $a=r_1/r>1$ и осью абсцисс. Слева она ограничена прямой $x=(a-1)f$ (см. (2.7) при $f\ll1$).

Отметим, что в аналогичной задаче для симметричного вала обязательно необходимо наличие внешней активной силы, которая прижимала бы цапфы тела к поверхности неподвижных отверстий. Соответствующие уравнения движения значительно проще и не содержат сингулярности [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валле Пуссен Ш.-Ж.* Лекции по теоретической механике. Т. I. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 340 с.
2. *Болотов Е. А.* О движении материальной плоской фигуры, стесненном связями с трением // Мат. сб. 1906. Т. 25. № 4. С. 562–708.
3. *Painlevé P.* Sur les lois du frottement de glissement // C. r. Acad. sci. Paris. 1905. T. 141. P. 401–405; рус. перевод в: Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
4. *Chaumat H.* Sur les lois expérimentales du frottement de glissment // C. r. Acad. sci. Paris. 1903. T. 136. P. 1634–1637.
5. *Pollak H.* Les liaisons non holonomes et le paradoxe de Painlevé // Bull. Cl. sci. Acad. roy. Belgique. Sér. 5. 1961. T. 47, n 7. P. 763–771.
6. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981. 176 с.
7. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию 6.I.1987