**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989**

УДК 531.38

А. Н. СИРОТИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ИЗ ПОЛОЖЕНИЯ ПОКОЯ В ПОЛОЖЕНИЕ ПОКОЯ

Рассмотрены три задачи оптимальной пространственной переориентации сферически симметричного тела с помощью внешних моментов в смысле критериев: максимума терминальной точности, быстродействия и минимума энергозатрат. Показано, что решением всех поставленных задач является разворот относительно неподвижной в пространстве оси. Получены аналитические выражения, определяющие управление.

1. Формулировка задачи оптимальной переориентации. Переориентация твердого тела обычно представляет собой процесс управления положением некоторой выбраной оси, либо связанного с телом триэдра в пространстве. Ниже рассмотрены некоторые задачи переориентации сферически симметричного твердого тела для случая, когда начальная и конечная угловые скорости равны нулю. Полагается, что тело, угловое движение которого исследуется, абсолютно жесткое, в качестве управления рассматривается главный момент (относительно неподвижной точки) внешних сил, приложенных к телу. Выбраны три критерия оценки эффективности управления угловым движением: достижение максимальной терминальной точности переориентации, быстродействие и минимум энергозатрат.

В качестве кинематических параметров вращения используются элементы матрицы направляющих косинусов, что позволяет использовать аппарат линейной алгебры. Соответствующие дифференциальные кинематические уравнения для ортогональной матрицы направляющих косинусов $A=\|a_{ij}\|=[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ $(i, j=1, 2, 3)$, характеризующей взаимное положение связанной и инерциальной систем координат в проекциях на связанные оси имеют вид ($\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости):

$$A^{\boldsymbol{\cdot}}(t)=-S(\boldsymbol{\omega}(t))A(t), \quad t\in(t_0, T) \tag{1.1}$$

$$S(\boldsymbol{\omega})=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

Динамические уравнения Эйлера для сферически симметричного твердого тела имеют вид (без ограничения общности тензор инерции полагается единичным):

$$\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)=\mathbf{M}(t), \quad t\in(t_0, T) \tag{1.2}$$

где $\mathbf{M}=[M_1, M_2, M_3]^T$ — вектор управляющего момента, на величину которого предполагается наложенным ограничение

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}\leqslant M_0^2, \quad M_0>0 \tag{1.3}$$

Для задач оптимального управления переориентацией определим критерии

$$J_\text{I}=\sum_{i=1}^{3}[(a_{1i}(T)-a_{1i}^{\vee})^2+(a_{2i}(T)-a_{2i}^{\vee})^2+(a_{3i}(T)-a_{3i}^{\vee})^2]= \tag{1.4}$$

$$=\operatorname{tr}\{[A(T)-A^{\vee}]^T[A(T)-A^{\vee}]\}\to\min$$

$$J_{\mathrm{II}}=T \to \min, \qquad J_{\mathrm{III}}=\int\limits_{t_0}^{T} \omega(t)\cdot\omega(t)\,dt \to \min$$

которые количественно характеризуют меру близости действительного положения $A(T)$ связанной системы координат и требуемого $A^{\vee}=\|a_{ij}^{\vee}\|$ $(i, j=1, 2, 3)$; время требуемое на разворот и энергозатраты, соответственно. Используя свойства ортогональности матриц $A(t)$ и $A^{\vee}$, можно показать, что J_{I} с точностью до константы равно $(-\cos\varphi)$, где φ — угол эквивалентного поворота относительно неподвижной оси, совмещающего действительное $A(t)$ и требуемое $A^{\vee}$ положения триэдров. Поскольку функция $\cos\varphi$ монотонно возрастающего аргумента $\varphi\in(0, \pi)$ является монотонно убывающей, то $J_{\mathrm{I}}\to\min$ тогда и только тогда, когда $\varphi\to\min$. Условие $\varphi\in(0, \pi)$ выполняется из механических соображений.

Задача I (задача максимизации терминальной точности переориентации). Построить оптимальное управление системой (1.1), (1.2) при ограничении (1.3), доставляющее минимум функции J_{I} за фиксированное время $t\in[t_0, T]$. Заданы граничные условия

$$A(t_0)=A_0, \quad \omega(t_0)=0, \quad \omega(T)=0 \qquad (1.5)$$

Задача II (задача быстродействия). Требуется определить оптимальное управление переориентацией связанного с динамически симметричным телом триэдра (1.1), (1.2), при ограничении на управление (1.3), и доставляющее минимум критерию J_{II}. Требуемый разворот определяется условиями

$$A(t_0)=A_0, \quad A(T)=A^{\vee}, \quad \omega(t_0)=0, \quad \omega(T)=0 \qquad (1.6)$$

Задача III (задача минимизации энергозатрат). Найти оптимальное управление системой (1.1), (1.2) при ограничении (1.3), доставляющее минимум J_{III} за фиксированное время $t\in[t_0, T]$:

$$A(t_0)=A_0, \quad A(T)=A^{\vee}, \quad \omega(t_0)=0, \quad \omega(T)=0 \qquad (1.7)$$

Использование принципа максимума Понтрягина [1] приводит к исследованию соответствующих нелинейных краевых задач 24-го порядка. Эту величину можно уменьшить, применяя некоторые другие кинематические параметры, например параметры Родрига — Гамильтона. Однако, исследовать общие решения краевых задач не удается, хотя в некоторых случаях возможно указать частное решение [2]. Покажем, что применяя дополнительные построения, можно решить сформулированные задачи в аналитическом виде, а также удается доказать, что найденные решения удовлетворяют, кроме того, и достаточным условиям оптимальности в силу единственности.

2. Необходимые условия оптимальности для переменной области возможных управлений. Рассмотрим общую задачу оптимального управления динамической системой

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \qquad (t\in(t_0, T)) \qquad (2.1)$$

где $\mathbf{x}=[x_0, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния $(n+1)\times1$, $\mathbf{u}=[u_1, \ldots, u_r]^{\mathrm{T}}$ — вектор $(r\times1)$ управления. Будем считать, что выполнены все предположения о гладкости функций f_i $(i=0, 1, \ldots, n)$, определенные в [1]. Задано начальное положение системы $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$. Требуется среди всех допустимых управлений $\mathbf{u}(t)$ найти такое, для которого критерий оптимальности $J=x_0(T)$ принимает наименьшее возможное значение.

В [3] получены необходимые условия оптимальности для ограничений на управление вида $\Omega_1\leqslant\Omega(\mathbf{u}, t)\leqslant\Omega_2$. Однако, для решения поставленных задач в дальнейшем удобнее использовать условия для более общих ограничений на управление.

Определим область возможных управлений $U_0^{\vee}[t_0, T]$ как множество, элементами которого являются ограниченные непрерывные на всем отрезке $[t_0, T]$ вектор-функции $(r\times1)$, $\mathbf{s}_\alpha(t)$: $U_0^{\vee}[t_0, T]=\{\mathbf{s}_\alpha(t), t\in[t_0, T]\}$. Допустимыми управлениями назовем произвольные кусочно-непрерывные вектор-функции $\mathbf{u}(t)$, непрерывные в концах отрезка и обладающие тем свойством, что для любого интервала (t', t'') непрерывности управления существует такая функция $s_\alpha(t)$ из множества $U_0{}^\vee[t_0, T]$, что имеет место тождество $\mathbf{u}(t)\equiv s_\alpha(t)$ $(t\in(t', t''))$, где $s_\alpha(t)$ — произвольный элемент множества $U_0{}^\vee[t_0, T]$. Определим сечения области возможных управлений как $U_0{}^\vee(\tau)=\{s_\alpha(t=\tau);\ s_\alpha(t)\in U_0{}^\vee[t_0, T],\ \tau\in[t_0, T]\}$. Следовательно, для любого допустимого управления в точках непрерывности имеет место $\mathbf{u}(\tau)\in U_0{}^\vee(\tau)$, $\tau\in[t_0, T]$. Однако, при этом допустимая вектор-функция управления $\mathbf{u}(t)$ в общем случае не является элементом множества $U_0{}^\vee[t_0, T]$. Можно показать, что в данном случае необходимые условия представимы в виде

$$H(\psi^*(\tau), \mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \tau)=\sup_{\mathbf{u}(\tau)\in U_0^\vee(\tau)} H(\psi^*(\tau), \mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau), \quad \tau\in[t_0, T] \tag{2.2}$$

Условия трансверсальности аналогичны классическому принципу максимума. Следует заметить, что для произвольного $U_0{}^\vee[t_0, T]$ постоянство гамильтониана на оптимальной траектории может не иметь места.

3. Оптимальное управление терминальной точностью разворота. Будем говорить, что вектор-функция угловой скорости $\omega_\mathrm{I}(t)$ является допустимой в задаче I, если она непрерывна на всем отрезке $[t_0, T]$, удовлетворяет граничным условиям и, кроме того, выполнено условие $|\dot{\omega}_\mathrm{I}(t)|\leqslant M_0$. Для того, чтобы допустимая $\omega_\mathrm{I}{}^*(t)$ соответствовала оптимальному управлению, как нетрудно показать, используя принцип максимума Понтрягина, необходимо, чтобы имело место

$$|\omega_\mathrm{I}{}^*(t)|=M_0 \quad (t\in[t_0, T]) \tag{3.1}$$

В силу динамических уравнений (1.2) и ограничения (1.3) значения допустимой вектор-функции $\omega_\mathrm{I}(t)$ в любой момент времени должны находиться внутри шара переменного радиуса

$$\omega_\mathrm{I}(t)\cdot\omega_\mathrm{I}(t)\leqslant M_0{}^2(t-t_0)^2 \quad (t\in[t_0, T]) \tag{3.2}$$

С другой стороны, для того чтобы в момент окончания управления $t=T$ допустимая вектор-функция $\omega_\mathrm{I}(t)$ удовлетворяла граничному условию на правом конце, необходимо выполнение условия

$$\omega_\mathrm{I}(t)\cdot\omega_\mathrm{I}(t)\leqslant M_0{}^2(T-t)^2 \quad (t\in[t_0, T]) \tag{3.3}$$

Следовательно, значения вектора допустимой угловой скорости должно принадлежать пересечению множеств, определяемых неравенствами (3.2), (3.3), т. е.

$$\omega_\mathrm{I}(t)\cdot\omega_\mathrm{I}(t)\leqslant\gamma^2(t), \quad \gamma^2(t)=M_0{}^2\min\{(t-t_0)^2, (T-t)^2\} \quad (t\in[t_0, T]) \tag{3.4}$$

Задача Ia. Требуется найти оптимальное управление $\omega_{\mathrm{I}a}{}^*(t)$ системой

$$A(t_0)=A_0, \quad \dot{A}(t)=-S(\omega_{\mathrm{I}a}(t))A(t), \quad (t\in(t_0, T)) \tag{3.5}$$

при ограничении вида (3.4), доставляющее минимум критерию J_I за заданное время управления.

Задачу Ia назовем задачей оптимального управления кинематическим движением, соответствующей исходной задаче I. Обозначим через $J_\mathrm{I}{}^*$ оптимальное значение критерия в исходной задаче I, а через $J_{\mathrm{I}a}{}^*$ — оптимальное значение того же функционала для задачи Ia. Покажем, что имеет место неравенство

$$J_{\mathrm{I}a}{}^*\leqslant J_\mathrm{I}{}^* \tag{3.6}$$

Действительно, все допустимые вектор-функции $\omega_\mathrm{I}(t)$ являются в то же время допустимыми управлениями для задачи управления кинематическим движением Ia, поскольку они непрерывны и удовлетворяют условию (3.4). Далее, множество допустимых управлений $\omega_{\mathrm{I}a}(t)$ является более широким, чем множество всех допустимых угловых скоростей $\omega_\mathrm{I}(t)$, так как допустимы кусочно-непрерывные $\omega_{\mathrm{I}a}(t)$, удовлетворяющие ограничению (3.4) и для них отсутствует ограничение на модуль производной.

Для решения задачи Ia управления кинематическим движением используем необходимые условия из п. 2. Очевидно, что возможные управления, на которые наложено ограничение (3.4), определяются с помощью области типа $U_0^{\vee}[t_0, T]$. Действительно, это множество можно построить в виде $U_0^{\vee}[t_0, T]=\{\mathrm{s}_\alpha(t)=\xi_\alpha(t)\mathbf{e}\}$, где $\xi_\alpha(t)$ — непрерывные скалярные функции $0\leqslant\xi_\alpha^2(t)\leqslant\gamma^2(t)$; $\mathbf{e}$ — вектор (3×1), конец которого лежит на единичной сфере.

Запишем условия задачи Ia в векторном виде

$$x_0(t_0)=0, \quad x_0^{\bullet}=\omega_{\mathrm{I}a}\cdot\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{a}_i\times\mathbf{a}_i^{\vee}) \qquad (t\in(t_0, T))$$

$$\mathbf{a}_i(t_0)=\mathbf{a}_{i0},\ \mathbf{a}_i^{\bullet}=\mathbf{a}_i\times\omega_{\mathrm{I}a} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{3.7}$$

$$\omega_{\mathrm{I}a}(t)\cdot\omega_{\mathrm{I}a}(t)\leqslant\gamma^2(t),\ x_0(T)\to\min$$

Гамильтониан поэтому представим как

$$H_{\mathrm{I}a}=\gamma_0\omega_{\mathrm{I}a}\cdot\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{a}_i\times\mathbf{a}_i^{\vee})+\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\cdot(\mathbf{a}_i\times\omega_{\mathrm{I}a})= \tag{3.8}$$

$$=\omega_{\mathrm{I}a}\cdot\sum_{i=1}^{3}(\gamma_i-\gamma_0\mathbf{a}_i^{\vee})\times\mathbf{a}_i$$

Сопряженная система

$$\gamma_0=-1,\ \gamma_i^{\bullet}=(\gamma_i+\mathbf{a}_i^{\vee})\times\omega_{\mathrm{I}a} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{3.9}$$

Введем вспомогательные сопряженные векторы

$$\psi_i=\gamma_i+\mathbf{a}_i^{\vee} \ (i=1, 2, 3) \tag{3.10}$$

тогда соответственно (3.8) и (3.9) примут вид

$$H_{\mathrm{I}a}=\omega_{\mathrm{I}a}\cdot\sum_{i=1}^{3}\psi_i\times\mathbf{a}_i, \qquad \psi_i^{\bullet}=\psi_i\times\omega_{\mathrm{I}a} \qquad (i=1,2,3) \tag{3.11}$$

Кроме того, из граничных условий $\gamma_i(T)=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ получаем, учитывая (3.10):

$$\psi_i(T)=\mathbf{a}_i^{\vee} \ (i=1,\ 2,\ 3) \ \text{или}\ \psi(T)=A^{\vee} \tag{3.12}$$

где $\psi=[\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3]$ ортогональная, в силу (3.1) и (3.2), матрица. Уравнения (3.11) удобнее записать в матричном виде $\psi^{\bullet}=-S(\omega_{\mathrm{I}a})\psi$. Определим ортогональную матрицу D^* и вектор s^*:

$$D^*(t)=\psi^*(t)A^{*T}(t), \quad \mathrm{s}^*(t)=\sum_{i=1}^{3}\psi_i^*(t)\times\mathbf{a}_i^*(t) \tag{3.13}$$

В этом случае, очевидно, имеет место $D^*-D^{*T}=-S(\mathrm{s}^*)$, где S — матрица вида (1.1). Умножая обе части этого уравнения справа на s^*, получаем $(D^*-D^{*T})\mathrm{s}^*=0$. Это означает, что данный вектор является собственным для ортогональных матриц D^* и D^{*T}, соответствующий собственному значению $+1$, т. е.

$$D^*(t)\mathrm{s}^*(t)=D^{*T}(t)\mathrm{s}^*(t)=\mathrm{s}^*(t)$$

Дифференцируя (3.13), получаем уравнения

$$D^{\bullet *}=D^*S(\omega_{\mathrm{I}a}^*)-S(\omega_{\mathrm{I}a}^*)D^*,\ \mathrm{s}^{\bullet *}=\mathrm{s}^*\times\omega_{\mathrm{I}a}^* \tag{3.14}$$

Таким образом, условие максимума гамильтониана на оптимальной траектории примет вид

$$H_{\mathrm{I}a}^*(\tau)=\max_{\omega_{\mathrm{I}}^{a}(\tau),\ \omega_{\mathrm{I}}^{a}(\tau)\leqslant\gamma^2(\tau)}\omega_{\mathrm{I}a}(\tau)\cdot\mathrm{s}^*(\tau) \quad (\tau\in[t_0, T]) \tag{3.15}$$

откуда непосредственно следует, что $\omega_{Ia}^*(\tau)$ параллелен $s^*(\tau)$. Используя уравнения (3.14), можно записать $s^*(t)=\mathrm{const}$. Таким образом, можно утверждать, что при оптимальном кинематическом вращении вектор s^* не меняет своего положения и, следовательно, определяет направление оси вращения, которое неподвижно в инерциальном пространстве:

$$\omega_{Ia}^*(t)=|\gamma(t)|s^*/|s^*| \qquad (3.16)$$

где s^* является собственным для ортогональной матрицы $(A^\vee A_0^T)$: $(A^\vee A_0^T)s^*=s^*$.

Необходимому условию оптимальности в задаче Ia удовлетворяют два вращения: на угол φ_{Ia} и вращение в противоположную сторону на угол $2\pi-\varphi_{Ia}$ вокруг неподвижной оси. Следовательно, выбирая направление вектора s^* таким образом, чтобы имел место поворот с угловой скоростью (3.16) в сторону меньшего угла, можно утверждать, что оптимальное управление $\omega_{Ia}^*(t)$ удовлетворяет также и достаточному условию оптимальности в силу единственности.

Для окончательного решения исходной задачи необходимо показать, что полученное оптимальное управление (3.16) для задачи управления кинематическим вращением Ia является в то же время и допустимой вектор-функцией угловой скорости для задачи I. Используя уравнение (3.4), получим

$$\frac{d}{dt}|\gamma(t)|=\begin{cases} +M_0 & (t_0<t<t_0+(T-t_0)/2) \\ -M_0 & (t_0+(T-t_0)/2<t<T) \end{cases}$$

Поэтому, подставляя это выражение в (3.16), имеем

$$|\omega_{Ia}^*(t)|=M_0 \quad (t\in[t_0, T]) \qquad (3.17)$$

Следовательно, $\omega_{Ia}^*(t)$ является непрерывной вектор-функцией, для которой выполнены условие (3.17) и граничные условия для вектора угловой скорости в исходной задаче. Значит она является допустимой скоростью вращения, соответствующей оптимальному управлению в задаче I в силу неравенства (3.6).

Для удобства запишем в явном виде основные параметры оптимального разворота. Обозначим $B=A^\vee A_0^T=\|b_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, 3)$. Угол эквивалентного поворота, соответствующий преобразованию B определяется как [4]:

$$\varphi^\vee=\arcsin\{[{}^1/_2((b_{13}-b_{31})^2+(b_{12}-b_{21})^2+(b_{23}-b_{32})^2)]^{1/2}\} \qquad (3.18)$$

а составляющие единичного вектора $s^*/|s^*|$ (собственного вектора матрицы B), определяющего направление оси вращение, соответственно

$$s_1^*=\frac{b_{23}-b_{32}}{2\sin\varphi^\vee},\qquad s_2^*=\frac{b_{31}-b_{13}}{2\sin\varphi^\vee},\qquad s_3^*=\frac{b_{12}-b_{21}}{2\sin\varphi^\vee} \qquad (3.19)$$

В результате оптимального вращения (3.16) происходит поворот вокруг $s^*/|s^*|$ на угол

$$\varphi^*=M_0(T-t_0)^2/4 \qquad (3.20)$$

поэтому соответствующее значение критерия

$$J_I^*=\varphi^\vee-\varphi^*>0 \qquad (3.21)$$

Оптимальное моментное управление в задаче I представимо в виде

$$M_I^*(t)=\alpha_I^*(t)s^*/|s^*| \qquad (3.22)$$

$$\alpha_I^*(t)=\begin{cases} +M_0 & (t_0\leqslant t<t_0+(T-t_0)/2) \\ -M & (t_0+(T-t_0)/2\leqslant t\leqslant T) \end{cases}$$

4. Оптимальная по быстродействию переориентация. Здесь рассмотрим решение задачи II. Оптимальное управление переориентацией для критерия быстродействия можно получить, рассуждая так же как и в п. 3. Но решение можно получить проще, используя результаты задачи управления терминальной точностью. Действительно, оптимальный по быстродействию разворот за время $(T_{\min}-t_0)$ симметричного тела в то же время является оптимальным вращением в смысле максимума терминальной точности для интервала управления $[t_0,\ T_{\min}]$, где $T_{\min}$ — минимальное время разворота, причем критерий J_{I} достигает абсолютного минимума

$$J_{\mathrm{I}}^*=0 \tag{4.1}$$

Следовательно, единственным оптимальным по быстродействию управлением системы (1.1), (1.2) при ограничении (1.9) из положения покоя в положение покоя является вращение вокруг неподвижной в пространстве оси (направление которой определяется вектором s*, (3.19)) на угол $\varphi^{\vee}$. Минимальное время вращения определяется из условия (4.1), откуда, используя (3.20), (3.21) и (3.18), получаем

$$T_{\min}=t_0+2(\varphi^{\vee}/M_0)^{1/2} \tag{4.2}$$

5. Оптимальное управление энергозатратами. Рассуждая аналогично п. 3, сформулируем задачу оптимального управления кинематическим движением, соответствующую задаче III.

Задача IIIa. Определить оптимальное управление $\omega_{\mathrm{III}a}^*(t)$ системой

$$A(t_0)=A_0,\ A^{\bullet}(t)=-S(\omega_{\mathrm{III}a}(t))A(t),\ A(T)=A^{\vee} \tag{5.1}$$

при ограничении на управление

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}(t)\leqslant\gamma^2(t)\\ \gamma^2(t)=M_0^2\min\{(t-t_0)^2,\ (T-t)^2\}\ \ (t\in[t_0,\ T])\end{gathered} \tag{5.2}$$

доставляющее минимум функционалу J_{III} за фиксированное время.

Запишем условия задачи IIIa в векторном виде

$$\begin{gathered}x_0(t_0)=0,\quad x_0^{\bullet}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}\ \ (t\in(t_0,\ T))\\ \mathbf{a}_i(t_0)=\mathbf{a}_{i0},\ \mathbf{a}_i^{\bullet}=\mathbf{a}_i\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}\ \ (i=1,\ 2,\ 3)\\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}(t)\leqslant\gamma^2(t),\ \ J_{\mathrm{III}a}=x_0(T)\to\min\end{gathered} \tag{5.3}$$

Таким образом, гамильтониан и сопряженная система запишутся как

$$\begin{gathered}H_{\mathrm{III}a}=\psi_0\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}+\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\psi}_i\cdot(\mathbf{a}_i\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a})=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}\cdot(\psi_0\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}+\mathbf{s})\\ \psi_0=\mathrm{const}\leqslant0,\ \boldsymbol{\psi}_i^{\bullet}=\boldsymbol{\psi}_i\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}\ \ (i=1,\ 2,\ 3)\\ \mathbf{s}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\psi}_i\times\mathbf{a}_i\end{gathered} \tag{5.4}$$

Нетрудно показать, что $\mathbf{s}^*(t)\neq0$. Следовательно, оптимальное управление кинематическим вращением $\omega_{\mathrm{III}a}^*(t)$ определяется из условия максимума гамильтониана (5.4) на оптимальной траектории

$$H_{\mathrm{III}a}^*(\tau)=\max_{\omega_{\mathrm{III}a}\cdot\omega_{\mathrm{III}a}(\tau)\leqslant\gamma^2(\tau)}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}(\tau)\cdot(\psi_0^*\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}(\tau)+\mathbf{s}^*(\tau))\ (\tau\in[t_0,\ T]) \tag{5.5}$$

Для нахождения $\omega_{\mathrm{III}a}^*(\tau)$ из (5.5) сначала исследуем задачу нелинейного программирования без ограничений

$$J^{\circ}=\psi_0^*\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}\cdot\mathbf{s}^*\to\max\ \ (\psi_0^*<0) \tag{5.6}$$

Из необходимого условия получаем

$$\frac{\partial J^{\circ}}{\partial\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{III}a}}=0:\qquad \overset{*}{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{III}a}=-\frac{|\mathbf{s}^*|}{2\psi_0^*}\frac{\mathbf{s}^*}{|\mathbf{s}^*|} \tag{5.7}$$

а так как $\psi_0^*<0$, то решение (5.7) удовлетворяет и достаточным условиям. Используя задачу (5.6), легко получить оптимальное управление из (5.5).

Так как $|\mathbf{s}^*|$ и ψ_0^* постоянны, пусть имеет место неравенство

$$-|\mathbf{s}^*|/2\psi_0^* \geqslant \max_{t\in[t_0,\,T]}\gamma(t), \quad (\gamma(t)\geqslant 0) \tag{5.8}$$

тогда оптимальное управление кинематическим вращением определяется как

$$\omega_{\mathrm{III}a}^*(t)=\gamma(t)\mathbf{s}^*(t)/|\mathbf{s}^*| \tag{5.9}$$

Если же справедливо

$$-|\mathbf{s}^*|/2\psi_0^* < \max_{t\in[t_0,\,T]}\gamma(t) \tag{5.10}$$

то имеем

$$\overset{*}{\omega}_{\mathrm{III}a}(t)=\begin{cases}\gamma(t)\mathbf{s}^*(t)/|\mathbf{s}^*| & (t_0\leqslant t\leqslant \tau_1)\\ -\mathbf{s}^*(t)/2\psi_0^* & (\tau_1\leqslant t\leqslant \tau_2)\\ \gamma(t)\mathbf{s}^*(t)/|\mathbf{s}^*| & (\tau_2\leqslant t\leqslant T)\end{cases} \tag{5.11}$$

где обозначено τ_i: $-|\mathbf{s}^*|/2\psi_0^*=\gamma(\tau_i)$ $(i=1,\ 2)$, $t_0<\tau_1<t_0+(T-t_0)/2<\tau_2<T$.

Далее, поскольку справедливо $\dot{\mathbf{s}}^*=\mathbf{s}^*\times\omega_{\mathrm{III}a}^*$, то для любого управления $\omega_{\mathrm{III}a}^*$, (5.9) или (5.11), заключаем, что $\mathbf{s}^*=\mathrm{const}$ $(t\in[t_0,\ T])$. Следовательно, оптимальный по энергозатратам кинематический разворот осуществляется относительно неподвижной в пространстве оси $\mathbf{s}^*$, причем вектор $\mathbf{s}^*$ является собственным для ортогональной матрицы $(\check{A}A_0^T)$. Определим теперь величину управления $\omega_{\mathrm{III}a}^*(t)$. Для решений (5.9) и (5.11) значения исходного критерия оптимальности (третий критерий (1.4)) определяются соответственно

$$\overset{*}{J}_{\mathrm{III}a}=\int_{t_0}^{T}\gamma^2(t)\,dt$$

$$\overset{*}{J}_{\mathrm{III}a}=\int_{t_0}^{\tau_1}\gamma^2(t)\,dt+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{|\mathbf{s}^*|^2}{4\psi_0^{*2}}dt+\int_{\tau_2}^{T}\gamma^2(t)\,dt \tag{5.12}$$

Пусть $T_{\min}$ — минимально возможное время заданного разворота, т. е. решение задачи II. Тогда, если $T=T_{\min}$, то оптимальное управление кинематическим разворотом есть (5.9), т. е. равномерно-ускоренное-равномерно-замедленное вращение. Если $T>T_{\min}$, то из (5.12) и (5.10) заключаем, что существует отрезок времени $(\tau_1,\ \tau_2)$, на котором $\omega_{\mathrm{III}a}^*(t)$ постоянно; $\tau_2-\tau_1=T-T_{\min}$.

Для окончательного решения задачи необходимо так же как и в п. 3 доказать, что оптимальное управление $\omega_{\mathrm{III}a}^*(t)$ в задаче IIIa является допустимой угловой скоростью в задаче III, соответствующей оптимальному моментному управлению.

Таким образом, оптимальное моментное управление в задаче III определяется выражением $\mathbf{M}_{\mathrm{III}}^*(t)=\alpha_{\mathrm{III}}^*(t)\mathbf{s}^*/|\mathbf{s}^*|$, где скалярная функция $\alpha_{\mathrm{III}}^*(t)$ имеет вид

$$T=T_{\min}:\quad \overset{*}{\alpha}_{\mathrm{III}}(t)=\begin{cases}+M_0 & (t_0\leqslant t<t_0+(T-t_0)/2)\\ -M_0 & (t_0+(T-t_0)/2\leqslant t\leqslant T)\end{cases},$$

$$T>T_{\min}:\quad \overset{*}{\alpha}_{\mathrm{III}}(t)=\begin{cases}+M_0 & (t_0\leqslant t<\tau_1)\\ 0 & (\tau_1\leqslant t<\tau_2)\\ -M_0 & (\tau_2\leqslant t\leqslant T)\end{cases}$$

Нетрудно показать, что решение задачи III является единственным при любых значениях времени окончания, если вращение относительно неподвижной оси происходит в направлении меньших углов.

Таким образом доказано утверждение: движение, отвечающее оптимальному управлению переориентацией динамически симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя в смысле критериев максимума терминальной точности (задача I), быстродействия (задача II) и минимума энергозатрат (задача III), при ограничении на величину управляющего момента $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}\leqslant M_0^2$, представляет собой вращение (для задачи III возможно существование неуправляемого участка) в направлении меньших углов относительно неподвижной в пространстве оси, направление которой определяется собственным вектором ортогональной матрицы $A^{\vee}A_0^T$. Оптимальное движение состоит из участков разгона с постоянным ускорением, вращения с постоянной скоростью (в задаче III) и торможения с постоянным ускорением. Решения всех задач единственны.

Рассуждая аналогичным образом, можно получить решения задач оптимальной переориентацией при наличии некоторых ограничений на фазовые координаты, например для ограничения на максимальную величину угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)\cdot\boldsymbol{\omega}(t)\leqslant\omega_0^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969, 384 с.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973, 320 с.
3. *Троицкий В. А.* О вариационных задачах оптимизации процессов управления. // ПММ, 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 29–38.
4. *Алексеев К. Б.* Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1977. 121 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VIII.1987