МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1989

УДК 531.55

А. А. ВОРОНИН, В. В. САЗОНОВ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА С БОЛЬШИМ СОБСТВЕННЫМ КИНЕТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

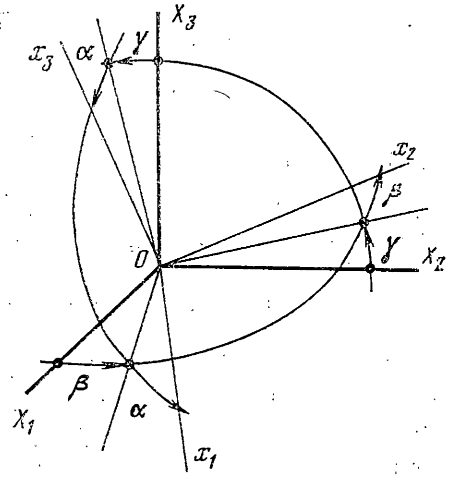
Рассматривается движение спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента на круговой орбите. Это движение описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Предполагается, что собственный кинетический момент гиростата велик и система его уравнений движения содержит большой параметр. С помощью методов построения периодических решений дифференциальных уравнений с большим параметром доказана теорема о существовании симметричных периодических решений этой системы, близких периодическим решениям соответствующей вырожденной системы, порядок которой равен четырем. Ранее такие решения были исследованы численно [1]. Доказанная теорема позволяет дать исчерпывающую интерпретацию результатов расчетов.

1. Спутник-гиростат представляет собой твердое тело с расположенным внутри него симметричным ротором. Ось вращения ротора жестко связана с несущим телом, его относительная угловая скорость постоянна. Полагаем, что центр масс спутника движется по круговой орбите и что ось вращения ротора параллельна одной из главных центральных осей инерции несущего тела. Введем две правые декартовы системы координат: систему $Ox_1x_2x_3$, образованную главными центральными осями инерции спутника, и орбитальную систему $OX_1X_2X_3$. Ось Ox_2 параллельна оси вращения ротора, ось OX_3 направлена вдоль радиуса-вектора точки O относительно притягивающего центра, ось OX_1 направлена по касательной к орбите в сторону движения спутника. Положение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ зададим углами γ, α и β (фиг. 1).

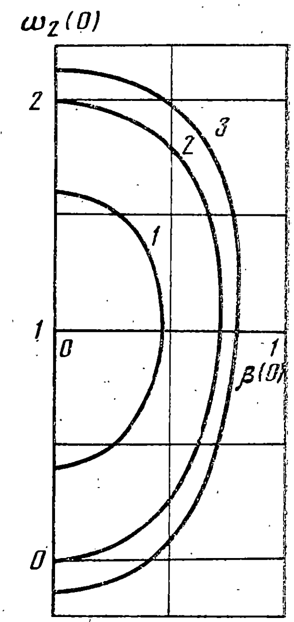
Вращательное движение спутника-гиростата под действием гравитационного момента описывается уравнениями [1]:

$$\begin{gathered}
\omega_1^{\cdot}=\frac{3\lambda+\mu}{3+\lambda\mu}(\omega_2\omega_3-3a_{32}a_{33})+\frac{h(3-\mu)}{3+\lambda\mu}\omega_3\\
\omega_2^{\cdot}=-{}^1/_3\mu(\omega_1\omega_3-3a_{31}a_{33})\\
\omega_3^{\cdot}=-\lambda(\omega_1\omega_2-3a_{31}a_{32})-h\omega_1\\
\gamma^{\cdot}=\sec\beta(\omega_1\cos\alpha+\omega_3\sin\alpha)-\operatorname{tg}\beta\cos\gamma\\
\alpha^{\cdot}=\omega_2+\operatorname{tg}\beta(\omega_1\cos\alpha+\omega_3\sin\alpha)-\sec\beta\cos\gamma\\
\beta^{\cdot}=-\omega_1\sin\alpha+\omega_3\cos\alpha+\sin\gamma
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau=\omega_0 t$, ω_0 — угловая скорость орбитального движения, t — время; ω_1, ω_2, ω_3 — отнесенные к ω_0 компоненты абсолютной угловой скорости спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$; $\lambda=(I_2-I_1)/I_3$, $\mu=3(I_1-I_3)/I_2$, I_1, I_2 и I_3 — моменты инерции спутника относительно осей Ox_1, Ox_2 и Ox_3; $a_{31}=\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma$, $a_{32}=\cos\beta\sin\gamma$, $a_{33}=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma$ — направляющие косинусы оси OX_3 в системе $Ox_1x_2x_3$; h — деленный на $I_3\omega_0$ кинетический момент ротора относительно несущего тела.



Фиг. 1



Фиг. 2

Система (1.1) инвариантна относительно преобразования

$$\tau\to-\tau,\ \omega_1\to\omega_1,\ \omega_2\to\omega_2,\ \omega_3\to-\omega_3,\ \gamma\to-\gamma,\ \alpha\to-\alpha,\ \beta\to\beta \qquad (1.2)$$

поэтому можно искать ее симметричные периодические решения, определяемые краевыми условиями [1]:

$$\omega_3(0)=\gamma(0)=\alpha(0)=\omega_3(T/2)=\gamma(T/2)=\alpha(T/2)=0 \qquad (1.3)$$

Период T этих решений заранее неизвестен. Результаты численного исследования краевой задачи (1.3) и других аналогичных задач, определяющих симметричные периодические решения системы (1.1), приведены в [1] [1]. Ниже дается аналитическое доказательство существования решений задачи (1.1), (1.3) при $|h|\gg1$, использующее подход [2]. Анализ других задач, рассматривавшихся в [1], может быть проведен точно также.

2. При $h=\infty$ задача (1.1), (1.3) допускает решения, в которых [1] $T=2\pi m$, m — целое положительное число, $\omega_1=\omega_3=0$, а γ, β, α и ω_2 определяются вырожденной краевой задачей

$$\gamma^{\cdot}=-\operatorname{tg}\beta\cos\gamma,\ \beta^{\cdot}=\sin\gamma,\ \alpha^{\cdot}=\omega_2-\sec\beta\cos\gamma,\ \omega_2^{\cdot}=\mu a_{31}a_{33} \qquad (2.1)$$

$$\gamma(0)=\alpha(0)=\gamma(\pi m)=\alpha(\pi m)=0 \qquad (2.2)$$

Первые два уравнения (2.1) не содержат α, ω_2 и образуют замкнутую систему, решение которой, удовлетворяющее краевым условиям (2.2), имеет вид

$$\beta=\arcsin(\varkappa\cos\tau),\quad \gamma=-\arcsin[\varkappa\sin\tau(1-\varkappa^2\cos^2\tau)^{-1/2}] \qquad (2.3)$$

Здесь $\varkappa$ — произвольная постоянная, $|\varkappa|<1$. Вырожденная задача (2.1), (2.2) исследована в [1]. При $|\varkappa|\ll1$ ее решения найдены методом Пуанкаре, а в случае произвольных $\varkappa$ — численно. На фиг. 2 приведены результаты расчетов [1] для $m=1$, $\mu=1{,}2$; 1,6; 1,8 (кривые *1*—*3* соответственно). Вычисленные решения представлены здесь зависимостью начального условия $\omega_2(0)$ от $\beta(0)=\arcsin\varkappa$. Эти решения образуют однопараметрические семейства, параметром в которых может служить $\beta(0)$. В силу инвариантности краевой задачи (2.1), (2.2) относительно преобра-

[1] См. также: *Сазонов В. В.* Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс.– Препринт Ин-та прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, № 62, 1981.

зования $\tau\to\tau$, $\gamma\to-\gamma$, $\beta\to-\beta$, $\alpha\to\alpha$, $\omega_2\to\omega_2$, кривые, получающиеся из кривых на фиг. 2 зеркальным отражением относительно оси $\omega_2(0)$, также задают начальные условия решений этой задачи.

Продолжив решение задачи (2.1), (2.2) на всю действительную ось с помощью условий $2\pi m$-периодичности и условий симметрии

$$\gamma(-\tau)=-\gamma(\tau),\ \beta(-\tau)=\beta(\tau),\ \alpha(-\tau)=-\alpha(\tau),\ \omega_2(-\tau)=\omega_2(\tau) \tag{2.4}$$

получим периодическое решение системы (2.1). Для исследования устойчивости такого решения рассмотрим соответствующую систему уравнений в вариациях

$$\begin{gathered}\Delta\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=b_{11}\Delta\gamma+b_{12}\Delta\beta,\ \Delta\beta^{\boldsymbol{\cdot}}=b_{21}\Delta\gamma\\ \Delta\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}=b_{31}\Delta\gamma+b_{32}\Delta\beta+\Delta\omega_2\\ \Delta\omega_2^{\boldsymbol{\cdot}}=b_{41}\Delta\gamma+b_{42}\Delta\beta+b_{43}\Delta\alpha\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$b_{11}=\operatorname{tg}\beta\sin\gamma,\ b_{12}=-\sec^2\beta\cos\gamma,\ b_{21}=\cos\gamma$$

$$b_{31}=\sec\beta\sin\gamma,\ b_{32}=-\sin\beta\sec^2\beta\cos\gamma$$

$$b_{41}={}^1/_2\mu\sin2\alpha\sin2\gamma(1+\sin^2\beta)+\mu\cos2\alpha\cos2\gamma\sin\beta$$

$$b_{42}=\mu a_{32}(a_{33}\cos\alpha+a_{31}\sin\alpha),\ b_{43}=\mu(a_{31}{}^2-a_{33}{}^2)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$(z-1)^2(z^2-2Az+1)=0 \tag{2.6}$$

где A — коэффициент. При $|A|<1$ исследуемое периодическое решение устойчиво в первом приближении, а при $|A|>1$ неустойчиво. Для всех решений, начальные условия которых указаны на фиг. 2, при $\beta(0)>0$ имеем $A>1$.

Пусть

$$\begin{gathered}\gamma=\gamma_0(\tau,a),\ \beta=\beta_0(\tau,a),\ \alpha=\alpha_0(\tau,a),\ \omega_2=\omega_{20}(\tau,a)\\ 0\leqslant\tau\leqslant\pi m,\ a\in(a_1{}^\circ,a_2{}^\circ)\subset(-\pi/2,\pi/2)\end{gathered} \tag{2.7}$$

однопараметрическое семейство решений краевой задачи (2.1), (2.2) с параметром a, определенным условием $\beta_0(0,\ a)=a$. Полагаем, что правые части формул (2.7) непрерывно дифференцируемы по a и при любом $a\in(a_1{}^\circ,a_2{}^\circ)$ в соответствующем решению (2.7) уравнении (2.6) $A\neq1$. При сделанных предположениях правые части (2.7) являются вещественно аналитическими функциями a на интервале $(a_1{}^\circ,\ a_2{}^\circ)$, причем этот интервал не содержит нуля (при $a=0$ в (2.6) $A=1$, так как согласно (2.1), (2.3) $\gamma_0(\tau,0)=\beta_0(\tau,0)\equiv0$, $\omega_{20}(\tau,0)=\alpha_0^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau,0)+1$, $\alpha_0(\tau,0)$ удовлетворяет уравнению математического маятника $2\alpha^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+\mu\sin2\alpha=0$).

Возьмем произвольный отрезок $[a_1,a_2]\subset(a_1{}^\circ,a_2{}^\circ)$ и исследуем вопрос о существовании решений краевой задачи (1.1), (1.3) $\omega_j(\tau,a,h)$ $(j=1,2,3)$, $\gamma(\tau,a,h)$, $\alpha(\tau,a,h)$, $\beta(\tau,a,h)$, $T(a,h)$, определенных для значений (a,h) из некоторого неограниченного множества $I_h\subset[a_1,a_2]\times(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяющих при $h\to\infty$, $(a,h)\in I_h$ условиям $\omega_j(\tau,a,h)\to0$ $(j=1,3)$, $\omega_2(\tau,a,h)\to\omega_{20}(\tau,a)$, $\gamma(\tau,a,h)\to\gamma_0(\tau,a)$, $\alpha(\tau,a,h)\to\alpha_0(\tau,a)$, $\beta(\tau,a,h)\to\beta_0(\tau,a)$, $T(a,h)\to2\pi m$.

Краевая задача

$$\Delta\gamma(0)=\Delta\alpha(0)=\Delta\gamma(\pi m)=\Delta\alpha(\pi m)=0 \tag{2.8}$$

для системы (2.5) в случае γ, β и α, заданном соотношениями (2.7), допускает нетривиальное решение [1]:

$$\begin{gathered}\Delta\gamma=\partial\gamma_0(\tau,a)/\partial a\equiv\varphi_\gamma(\tau,a)\\ \Delta\beta=\partial\beta_0(\tau,a)/\partial a\equiv\varphi_\beta(\tau,a)\\ \Delta\alpha=\partial\alpha_0(\tau,a)/\partial a\equiv\varphi_\alpha(\tau,a)\\ \Delta\omega_2=\partial\omega_{20}(\tau,a)/\partial a\equiv\varphi_\omega(\tau,a)\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\varphi_\gamma(\tau, a)=\operatorname{cosec} a \sec \beta_0(\tau, a)\sin \gamma_0(\tau, a)\neq 0$$

$$\varphi_\beta(\tau, a)=\operatorname{cosec} a \sin \beta_0(\tau, a)\cos \gamma_0(\tau, a)\neq 0$$

Следовательно, в краевой задаче (1.1), (1.3) имеет место критический случай. Ниже эта задача решается методом [3, 4], модифицированным с учетом наличия в системе (1.1) большого параметра.

3. В этом пункте описываются преобразования краевой задачи (1.1), (1.3) и формулируется теорема о существовании ее решений. Сделаем в (1.1) замену переменных

$$\tau=(1+\delta)u,\ \gamma=\gamma_0(u, a)+\xi_1$$

$$\beta=\beta_0(u, a)+\xi_2,\ \alpha=\alpha_0(u, a)+\xi_3$$

$$\omega_2=\omega_{20}(u, a)+\xi_4,\ \omega_1=g\eta_1,\ \omega_3=\eta_2$$

$$\delta=\mathrm{const},\ \delta\neq-1,\ g=[(3-\mu)/(3+\lambda\mu)]^{1/2}$$

и введем обозначения

$$\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T,\ \eta=(\eta_1, \eta_2)^T$$

$$F_0(u, a)=(\gamma_0^\bullet(u, a), \beta_0^\bullet(u, a), \alpha_0^\bullet(u, a), \omega_{20}^\bullet(u, a))^T$$

$$C(u, a, h)=\begin{Vmatrix} 0 & g\,[h+(3\lambda+\mu)(3-\mu)^{-1}\omega_{20}(u, a)] \\ -g\,[h+\lambda\omega_{20}(u, a)] & 0 \end{Vmatrix}$$

В результате эту систему, выделив в ней явно некоторые линейные члены, можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} &\xi'=(1+\delta)\,[B(u, a)\xi+F(u, \xi, \eta, a)]+\delta F_0(u, a) \\ &\eta'=(1+\delta)\,[C(u, a, h)\eta+D(u, a)\xi+f(u, \xi, \eta, a)] \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по u, эта переменная входит в правые части уравнений (3.1) $2\pi m$-периодически; $B(u, a)$ — матрица системы (2.5), вычисленная вдоль решения (2.7); $D(u, a)$ — матрица размером 2×4, явный вид которой не понадобится; функции F и f при ξ, $\eta\to0$ равномерно по $a\in[a_1, a_2]$ удовлетворяют оценкам $F(u, \xi, \eta, a)=O(\|\xi\|^2+\|\eta\|)$, $f(u, \xi, \eta, a)-f(u, 0, 0, a)=O(\|\xi\|^2+\|\eta\|^2)$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Вследствие инвариантности системы (1.1) относительно преобразования (1.2) и того факта, что решение (2.7) удовлетворяет соотношениям (2.4), система (3.1) сохраняет свой вид при замене

$$\begin{aligned} &u\to-u,\ \xi_j\to(-1)^j\xi_j\ (j=1, \dots, 4) \\ &\eta_k\to-(-1)^k\eta_k\ (k=1, 2) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Краевая задача (1.1), (1.3) эквивалентна краевой задаче

$$\xi_1(0)=\xi_3(0)=\eta_2(0)=\xi_1(\pi m)=\xi_3(\pi m)=\eta_2(\pi m)=0 \qquad (3.3)$$

для системы (3.1), причем роль неизвестного периода T теперь играет δ. Эти две величины связаны соотношением $T=2\pi m(1+\delta)$.

Следующие преобразования служат для упрощения линейных членов во втором уравнении (3.1) и выполняются в три этапа: 1) $\eta\to q$, 2) $q\to v$, 3) $v\to x$, $h\to\rho$. Соответствующие формулы имеют вид [2]:

1) $\eta=q-C^{-1}(u, a, h)D(u, a)\xi$, $q=(q_1, q_2)^T$;

2) $q_j=[1+h^{-1}d_j\omega_{20}(u, a)]v_j$ $(j=1, 2)$, $v=(v_1, v_2)^T$, $d_2=d_1-\mu(1+\lambda)/(3-\mu)$, d_1 — произвольная постоянная;

---

[2] Подробности см. *Сазонов В. В., Воронин А. А.* Периодические колебания спутника-гиростата с большим собственным кинетическим моментом.– Препринт Ин-та прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, № 88, 1986.

3) $v=\Phi(u, a)x$, $x=(x_1, x_2)^T$, $\rho=(1+\delta)(gh+b)$
$\Phi(u, a)=E_2\cos\varphi(u, a)+J\sin\varphi(u, a)$

$$E_2=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\quad J=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}$$

$$\varphi(u,a)=(1+\delta)\left[l\int\limits_0^u \omega_{20}(t,a)\,dt-bu\right]$$

$$l={}^1/_2\,[6\lambda+\mu(1-\lambda)]\,[(3-\mu)(3+\lambda\mu)]^{-1/2}$$

$$b=\frac{l}{\pi m}\int\limits_0^{\pi m}\omega_{20}(t,a)\,dt$$

$$\varphi(u+2\pi m, a)=\varphi(u, a),\quad \varphi(-u, a)=-\varphi(u, a)$$

Сделав для удобства замену обозначений $x\to\eta$, $x_j\to\eta_j$ $(j=1, 2)$, результат указанных преобразований можно записать в виде

$$\begin{aligned}\xi'&=B(u, a)\xi+F_1(u, \xi, \eta, \delta, a, \rho)\\ \eta'&=\rho J\eta+f_1(u, \xi, \eta, \delta, a, \rho)\end{aligned}\tag{3.4}$$

где функции F_1 и f_1 обладают следующими свойствами.

1. Справедливо равенство $F_1(u, 0, 0, \delta, a, \rho)=\delta F_0(u, a)$. 2. Обозначим $f_1^\circ(u, \delta, a, \rho)=f_1(u, 0, 0, \delta, a, \rho)$. Существуют такие положительные числа Δ, K и R_1, что при всех u, a, ξ, ξ°, η, η°, δ, δ° и ρ, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant u\leqslant\pi m$, $a_1\leqslant a\leqslant a_2$, $\max(\|\xi\|, \|\xi^\circ\|, \|\eta\|, \|\eta^\circ\|, |\delta|, |\delta^\circ|)\leqslant\Delta$ и $\rho\geqslant R_1$, имеют место соотношения

$$\|f_1^\circ(u, \delta, a, \rho)\|\leqslant K,\quad \|f_1^{\circ\prime}(u, \delta, a, \rho)\|\leqslant K\tag{3.5}$$

$$\|f_1^\circ(u, \delta, a, \rho)-f_1^\circ(u, \delta^\circ, a, \rho)\|\leqslant K|\delta-\delta^\circ|$$

$$\|f_1^{\circ\prime}(u, \delta, a, \rho)-f_1^{\circ\prime}(u, \delta^\circ, a, \rho)\|\leqslant K|\delta-\delta^\circ|$$

$$\|F_0(u, a)\|\leqslant K$$

$$\begin{aligned}\|F_1(u, \xi, \eta, \delta, a, \rho)-\delta F_0(u, a)\|\leqslant K[\|\xi\|^2+\\ +\|\xi\|(|\delta|+|\rho|^{-1})+\|\eta\|]\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\|f_1(u, \xi, \eta, \delta, a, \rho)-f_1^\circ(u, \delta, a, \rho)\|\leqslant K[\|\xi\|^2+\\ +\|\eta\|^2+(\|\xi\|+\|\eta\|)/|\rho|]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|F_1(u, \xi, \eta, \delta, a, \rho)-F_1(u, \xi^\circ, \eta^\circ, \delta^\circ, a, \rho)-\\ -F_0(u, a)(\delta-\delta^\circ)\|\leqslant K[\zeta(\|\xi-\xi^\circ\|+|\delta-\delta^\circ|)+\|\eta-\eta^\circ\|]\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\|f_1(u, \xi, \eta, \delta, a, \rho)-f_1(u, \xi^\circ, \eta^\circ, \delta^\circ, a, \rho)-f_1^\circ(u, \delta, a, \rho)+\\ +f_1^\circ(u, \delta^\circ, a, \rho)\|\leqslant K\zeta(\|\xi-\xi^\circ\|+\|\eta-\eta^\circ\|+|\delta-\delta^\circ|)\end{aligned}$$

$$\zeta=\|\xi\|+\|\xi^\circ\|+\|\eta\|+\|\eta^\circ\|+|\delta|+|\delta^\circ|+|\rho|^{-1}$$

Проверив сделанные преобразования, можно убедиться, что независимая переменная u входит в систему (3.4) $2\pi m$-периодически и эта система сохраняет свой вид при замене (3.2). Поставленный в п. 2 вопрос об отыскании решений краевой задачи (1.1), (1.3), близких решению (2.7), сводится к отысканию решений краевой задачи (3.3), (3.4) $\xi(u, a, \rho)$, $\eta(u, a, \rho)$, $\delta(a, \rho)$, определенных для значений (a, ρ) из некоторого неограниченного множества $I_\rho\subset[a_1, a_2]\times(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющих при допустимых $\rho\to\infty$ условиям $\xi(u, a, \rho)\to 0$, $\eta(u, a, \rho)\to 0$, $\delta(a, \rho)\to 0$.

Введем вектор $\xi^\circ(u, a)=(\varphi_\gamma(u, a), \varphi_\beta(u, a), \varphi_\alpha(u, a), \varphi_\omega(u, a))^T$ и множество $I(\varepsilon)=\{\rho\colon -\infty<\rho<+\infty, |\sin\pi m\rho|\geqslant\varepsilon\}$, где ε — произвольное число из интервала $(0, 1)$.

Теорема. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют такие положительные числа R, C_1, C_2 и C_3, что при $|\rho| \geqslant R$, $\rho \in I(\varepsilon)$ краевая задача (3.3), (3.4) имеет единственное решение $\xi_*(u, a, \rho)$, $\eta_*(u, a, \rho)$, $\delta_*(a, \rho)$, удовлетворяющее условиям

$$\|\xi_*(u, a, \rho)\| \leqslant C_1|\rho|^{-1}, \ \|\eta_*(u, a, \rho)\| \leqslant C_2|\rho|^{-1} \ (0 \leqslant u \leqslant \pi m),$$

$$|\delta_*(a, \rho)| \leqslant C_3|\rho|^{-1} \tag{3.8}$$

$$\int_0^{\pi m} [\xi^\circ(u, a)]^T \xi_*(u, a, \rho)\, du = 0$$

Замечания. 1°. Последнее условие (3.8) фиксирует способ введения зависимости решения краевой задачи (3.3), (3.4) от параметра a. 2°. Если $\varepsilon \to +0$, то C_1, C_2, C_3 и $R \to +\infty$. 3°. Упомянутое выше множество I_ρ имеет вид: $I_\rho = \{(a, \rho)\colon a_1 \leqslant a \leqslant a_2, \ |\rho| \geqslant R, \ \rho \in I(\varepsilon)\}$. Как будет показано ниже, условие $\rho \in I(\varepsilon)$ служит для исключения из анализа решений задачи (3.3), (3.4) резонансов между медленными (с частотой m^{-1}) и быстрыми (с частотой ρ) колебаниями спутника.

4. В этом пункте приводятся некоторые соотношения, используемые при доказательстве теоремы. Рассмотрим краевую задачу

$$\xi_1(0) = \xi_3(0) = \xi_1(\pi m) = \xi_3(\pi m) = 0 \tag{4.1}$$

для отвечающей первому уравнению (3.4) линейной неоднородной системы

$$\xi' = B(u, a)\xi + F(u) \tag{4.2}$$

Та же краевая задача для соответствующей однородной системы, т. е. задача (2.5), (2.8) в случае α, β и γ, заданных соотношениями (2.7), имеет нетривиальное решение (2.9), векторная форма которого $\xi^\circ(u, a)$. Согласно предположениям п. 2 относительно решения (2.7), $\xi^\circ(u, a)$ — единственное (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное решение краевой задачи (4.1), (4.2) при $F(u) \equiv 0$. Сопряженная краевая задача

$$\psi' + \psi B(u, a) = 0, \ \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$$

$$\psi_2(0) = \psi_4(0) = \psi_2(\pi m) = \psi_4(\pi m) = 0$$

следовательно, также имеет единственное нетривиальное решение [5], и это решение можно взять в виде

$$\psi^\circ(u, a) = (\psi_\gamma(u, a), \psi_\beta(u, a), 0, 0)$$

$$\psi_\gamma(u, a) = -\operatorname{ctg} a \sin \beta_0(u, a), \ \psi_\beta(u, a) = \operatorname{cosec} a \sin \gamma_0(u, a)$$

Как известно [5], задача (4.1), (4.2) разрешима в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\int_0^{\pi m} \psi^\circ(u, a) F(u)\, du = 0 \tag{4.3}$$

Если это условие выполнено, то решение задачи (4.1), (4.2) определено с точностью до слагаемого const $\xi^\circ(u, a)$.

Задачу (4.1), (4.2) удобно исследовать в терминах обобщенной функции Грина [4, 6]. Эта функция, обозначим ее $G_0(u, s, a)$ ($u, s \in [0, \pi m]$, $a \in [a_1, a_2]$), является 4×4 матрицей и единственным образом определяется краевыми условиями (4.1) по u для каждого столбца, условием скачка $G_0(s+0, s, a) - G_0(s-0, s, a) = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1)$ и соотношениями

$$\partial G_0(u, s, a)/\partial u = B(u, a) G_0(u, s, a) - n[\psi^\circ(u, a)]^T \psi^\circ(s, a) \quad (u \neq s)$$

$$\int_0^{\pi m} [\xi^\circ(u, a)]^T G_0(u, s, a)\, du = 0, \qquad n = \left[\int_0^{\pi m} \|\psi^\circ(u, a)\|^2\, du\right]^{-1}$$

При фиксированных u, $s\in[0,\pi m]$, $u\neq s$ функция $G_0(u, s, a)$ является вещественно аналитической по a на интервале (a_1°, a_2°). Выражение

$$\xi(u)=\int_0^{\pi m} G_0(u,s,a)F(s)\,ds \tag{4.4}$$

удовлетворяет краевым условиям (4.1) и соотношениям

$$\xi'=B(u, a)\xi+F(u)-p[\psi^\circ(u, a)]^T$$

$$p=n\int_0^{\pi m}\psi^\circ(u,a)F(u)\,du=0,\qquad \int_0^{\pi m}[\xi^\circ(u,a)]^T\xi(u)\,du=0$$

При выполнении условия (4.3) $p=0$, и $\xi(u)$ является решением задачи (4.1), (4.2).

Нормой векторной функции $f(u)$, непрерывной на отрезке $[0, \pi m]$, будем называть число $\nu(f)=\max\|f(u)\|$ $(0\leqslant u\leqslant\pi m)$. Для нормы выражения (4.4) при любом $a\in[a_1, a_2]$ имеет место оценка

$$\nu(\xi)\leqslant N_0\nu(F) \tag{4.5}$$

где N_0 — некоторая положительная величина.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\eta'=\rho J\eta+f(u),\quad \eta_2(0)=\eta_2(\pi m)=0 \tag{4.6}$$

отвечающую второму уравнению (3.4) и условиям (3.3) для η. Если $\sin\pi m\rho\neq0$, то эта задача имеет единственное решение, которое представим с помощью соответствующей функции Грина $G(u, s, \rho)$:

$$\eta(u)=\int_0^{\pi m} G(u,s,\rho)f(s)\,ds \tag{4.7}$$

Поскольку задача (4.6) решается в квадратурах, для $G(u, s, \rho)$ можно получить явную формулу вида $G(u, s, \rho)=G_1(u, s, \rho)/\sin\pi m\rho$, где элементы матрицы G_1 — ограниченные тригонометрические функции.

Пусть свободный член в первом уравнении (4.6) $f(u)=(f_1(u), f_2(u))^T$ имеет непрерывную первую производную и удовлетворяет краевым условиям

$$f_1(0)=f_1(\pi m)=0 \tag{4.8}$$

Тогда, сделав в (4.6) подстановку $\eta=x+\rho^{-1}Jf(u)$ и применив к получившейся краевой задаче формулу (4.7), найдем

$$\eta(u)=\rho^{-1}Jf(u)-\rho^{-1}\int_0^{\pi} G(u,s,\rho)Jf'(s)\,ds$$

Из последнего выражения, выражения (4.7) и вида функции $G(u, s, \rho)$ для нормы решения задачи (4.6) следуют оценки

$$\nu(\eta)\leqslant\pi m|\sin\pi m\rho|^{-1}\nu(f)$$

$$\nu(\eta)\leqslant|\rho|^{-1}\nu(f)+\pi m|\rho\sin\pi m\rho|^{-1}\nu(f')$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,1)$ и положим $N_1=\pi m/\varepsilon$. Тогда в силу предыдущих неравенств при $\rho\in I(\varepsilon)$ будем иметь

$$\nu(\eta)\leqslant N_1\nu(f),\ \nu(\eta)\leqslant|\rho|^{-1}[\nu(f)+N_1\nu(f')] \tag{4.9}$$

Ниже в п. 5 предполагается, что $\rho\in I(\varepsilon)$ и $|\rho|\geqslant R_1$; неравенства (4.9) используются без дополнительных оговорок относительно выбора ρ.

5. При доказательстве теоремы для краткости не будем указывать зависимость рассматриваемых функций от a и ρ. Введем систему интегральных уравнений

$$\xi(u)=\int_0^{\pi m} G_0(u,s)F_1[s,\xi(s),\eta(s),\delta]ds\equiv L_\xi(\xi,\eta,\delta)$$

$$\eta(u)=\int_0^{\pi m} G(u,s)f_1[s,\xi(s),\eta(s),\delta]ds\equiv L_\eta(\xi,\eta,\delta) \qquad (5.1)$$

$$\int_0^{\pi m} \psi^\circ(s)F_1[s,\xi(s),\eta(s),\delta]ds=0, \qquad 0\leqslant u\leqslant\pi m, \qquad a_1\leqslant a\leqslant a_2$$

относительно неизвестных функций $\xi(u)$, $\eta(u)$ и неизвестной постоянной δ.

Связь этой системы с краевой задачей (3.3), (3.4) состоит в следующем. Пусть $\xi_*(u)$, $\eta_*(u)$ и δ_* — решение системы (5.1), причем функции $\xi_*(u)$ и $\eta_*(u)$ непрерывны на отрезке $0\leqslant u\leqslant\pi m$. Тогда эти функции непрерывно дифференцируемы при $0\leqslant u\leqslant\pi m$ и вместе с δ_* являются решением задачи (3.3), (3.4). Кроме того, $\xi_*(u)$ удовлетворяет последнему условию (3.8). Справедливо и обратное утверждение: всякое решение краевой задачи (3.3), (3.4), удовлетворяющее последнему условию (3.8), является также решением системы (5.1).

Поскольку

$$\int_0^{\pi m} \psi^\circ(u)F_0(u)du=\pi m\sin a$$

и $\sin a\neq 0$ при $a\in[a_1, a_2]$, последнее уравнение (5.1) можно преобразовать к виду

$$\delta=\frac{1}{\pi m\sin a}\int_0^{\pi m} \psi^\circ(s)\{F_1[s,\xi(s),\eta(s),\delta]-\delta F_0(s)\}ds\equiv L_\delta(\xi,\eta,\delta)$$

Систему (5.1) будем решать методом последовательных приближений. Построим последовательности функций $\xi_k(u)$, $\eta_k(u)$ $(0\leqslant u\leqslant\pi m)$ и числовую последовательность δ_k, положив

$$\begin{gathered}\xi_0(u)\equiv 0,\ \eta_0(u)\equiv 0,\ \delta_0=0,\ \xi_{k+1}=L_\xi(\xi_k,\eta_k,\delta_k)\\ \eta_{k+1}=L_\eta(\xi_k,\eta_k,\delta_k),\ \delta_{k+1}=L_\delta(\xi_k,\eta_k,\delta_k)\ \ (k=0,1,\ldots)\end{gathered} \qquad (5.2)$$

Докажем, что при достаточно большом $|\rho|$ эти последовательности сходятся к решению системы (5.1).

Сначала докажем, что при достаточно большом $|\rho|$ и $a\in[a_1, a_2]$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\nu(\xi_k)\leqslant C_1|\rho|^{-1}\leqslant\Delta,\ \ \nu(\eta_k)\leqslant C_2|\rho|^{-1}\leqslant\Delta\\ |\delta_k|\leqslant C_3|\rho|^{-1}\leqslant\Delta\end{gathered} \qquad (5.3)$$

где C_1, C_2 и C_3 — положительные числа. Рассмотрим выражение

$$\varphi(u,\delta)=\int_0^{\pi m} G(u,s)f_1^\circ(s,\delta)ds$$

В силу инвариантности уравнений (3.4) относительно преобразований (3.2) функция $f_1^\circ(u, \delta)$ удовлетворяет краевым условиям (4.8). Воспользовавшись неравенствами (3.5) и вторым неравенством (4.9), отсюда можно вывести, что при $a\in[a_1, a_2]$ и $\max(|\delta|, |\delta^\circ|)\leqslant\Delta$ будут иметь место соотношения

$$\nu(\varphi)\leqslant N_2|\rho|^{-1},\ \nu(\varphi(\cdot,\delta)-\varphi(\cdot,\delta^\circ))\leqslant N_2|\rho|^{-1}|\delta-\delta^\circ|,\ N_2=K(1+N_1) \qquad (5.4)$$

Рекуррентные формулы (5.2) представим в виде

$$\xi_{k+1}(u)=\int_0^{\pi m} G_0(u,s)F_1[s,\xi_k(s),\eta_k(s),\delta_k]ds$$

$$\eta_{k+1}(u)=\varphi(u,\delta_k)+\int_0^{\pi m} G(u,s)\{f_1[s,\xi_k(s),\eta_k(s),\delta_k]-f_1^\circ(s,\delta_k)\}ds$$

$$\delta_{k+1}=\frac{1}{\pi m\sin a}\int_0^{\pi m}\psi^\circ(s)\{F_1[s,\xi_k(s),\eta_k(s),\delta_k]-\delta_k F_0(s)\}ds$$

Предположим, что $\max(\nu(\xi_k),\ \nu(\eta_k),\ |\delta_k|)\leqslant\Delta$ $(k=0,\ 1,\dots)$. Тогда в силу неравенств (3.6), (4.5), (4.9) и (5.4) при любом $a\in[a_1,\ a_2]$ будем иметь

$$\nu(\xi_{k+1})\leqslant KN_0[\nu^2(\xi_k)+|\rho|^{-1}\nu(\xi_k)+|\delta_k|\nu(\xi_k)+\nu(\eta_k)+|\delta_k|] \tag{5.5}$$

$$\nu(\eta_{k+1})\leqslant N_2|\rho|^{-1}+KN_1[\nu^2(\xi_k)+\nu^2(\eta_k)+|\rho|^{-1}(\nu(\xi_k)+\nu(\eta_k))]$$

$$|\delta_{k+1}|\leqslant M[\nu^2(\xi_k)+\nu(\xi_k)(|\delta_k|+|\rho|^{-1})+\nu(\eta_k)]$$

$$M=\max_{a_1\leqslant a\leqslant a_2}\frac{K}{\pi m|\sin a|}\int_0^{\pi m}\|\psi^\circ(u)\|du$$

Выберем числа C_1, C_2 и C_3 из условий $C_2>N_2$, $C_3>MC_2$, $C_1>KN_0(C_2+C_3)$ и возьмем

$$|\rho|\geqslant R_2=\max\{1,\ R_1,\ C_1\Delta^{-1},\ C_2\Delta^{-1},\ C_3\Delta^{-1},$$
$$KN_0(C_1+C_1^2+C_1C_3)[C_1-KN_0(C_2+C_3)]^{-1},\ KN_1(C_1+C_2+$$
$$+C_1^2+C_2^2)(C_2-N_2)^{-1},\ M(C_1+C_1^2+C_1C_3)(C_3-MC_2)^{-1}\}$$

Тогда, если для некоторого k неравенства (5.3) выполнены, то в силу (5.5) будем иметь

$$\nu(\xi_{k+1})\leqslant KN_0|\rho|^{-1}[C_2+C_3+|\rho|^{-1}(C_1+C_1^2+C_1C_3)]\leqslant C_1|\rho|^{-1}\leqslant\Delta$$

и аналогичным образом $\nu(\eta_{k+1})\leqslant C_2|\rho|^{-1}\leqslant\Delta$, $|\delta_{k+1}|\leqslant C_3|\rho|^{-1}\leqslant\Delta$. Так как при $k=1$ неравенства (5.3) справедливы ($\xi_1(u)\equiv0$, $\eta_1(u)=\varphi(u,\ 0)$, $\delta_1=0$), отсюда следует их справедливость при всех k.

Докажем сходимость последовательных приближений (5.2). Введем обозначения

$$b_k=\nu(\xi_k-\xi_{k-1}),\ c_k=\nu(\eta_k-\eta_{k-1}),\ d_k=|\delta_k-\delta_{k-1}|$$

$$e_k=\nu(\xi_k)+\nu(\xi_{k-1})+\nu(\eta_k)+\nu(\eta_{k-1})+$$
$$+|\delta_k|+|\delta_{k-1}|+|\rho|^{-1}\quad(k=1,\ 2,\dots)$$

В силу неравенств (3.7), (4.5), (4.9) и (5.4) при $|\rho|\geqslant R_2$ и $a\in[a_1,\ a_2]$ имеем

$$b_{k+1}\leqslant KN_0(e_kb_k+c_k+d_k+e_kd_k)$$

$$c_{k+1}\leqslant N_2|\rho|^{-1}d_k+KN_1e_k(b_k+c_k+d_k) \tag{5.6}$$

$$d_{k+1}\leqslant M[e_k(b_k+d_k)+c_k]\quad(k=1,\ 2,\dots)$$

Оценивая величины e_k с помощью неравенств (5.3), получаем

$$e_k\leqslant Q_1|\rho|^{-1},\ Q_1=2(C_1+C_2+C_3)+1\quad(k=1,\ 2,\dots)$$

Усиливая с помощью этой оценки неравенства (5.6) и положив $Q=\max(1, KN_0Q_1+KN_0, KN_1Q_1+N_2, MQ_1)$, найдем

$$\begin{gathered} b_{k+1}\leqslant Q(|\rho|^{-1}b_k+c_k+d_k) \\ c_{k+1}\leqslant Q|\rho|^{-1}(b_k+c_k+d_k) \\ d_{k+1}\leqslant Q[|\rho|^{-1}(b_k+d_k)+c_k] \quad (k=1,2,\ldots) \end{gathered} \tag{5.7}$$

Рассмотрим числовую последовательность $z_k=b_k|\rho|^{-1/2}+c_k+d_k|\rho|^{-1/4}$ ($k=1, 2,\ldots$). В силу (5.7) $z_{k+1}\leqslant 3Q|\rho|^{-1/4}z_k$. Введем множество $I_\rho=\{(a, \rho)\colon a_1\leqslant a\leqslant a_2,\ |\rho|\geqslant R,\ \rho\in I(\varepsilon)\}$, где $R=\max(R_2, 1296Q^4)$. При $(a, \rho)\in I_\rho$ имеем $z_{k+1}\leqslant {}^1/_2 z_k$. Используя эту оценку, можно доказать, что последовательности $\xi_k(u)$, $\eta_k(u)$ и δ_k сходятся равномерно соответственно на множествах $\{(u, a, \rho)\colon 0\leqslant u\leqslant \pi m, (a, \rho)\in I_\rho\}$ и I_ρ к некоторым непрерывным функциям $\xi_*(u, a, \rho)$, $\eta_*(u, a, \rho)$ и $\delta_*(a, \rho)$, удовлетворяющим условиям (3.8). Переходя в соотношения (5.2) к пределу при $k\to\infty$, находим, что ξ_*, η_* и δ_* — решение системы (5.1). Стандартным образом устанавливается единственность этого решения. Теорема доказана.

Результаты численного исследования краевой задачи (1.1), (1.3) в случае $h\gg 1$ приведены в [1]. Как оказалось, решения этой задачи, близкие решению вырожденной задачи (2.1), (2.2), существуют не при всех h, а только для значений этого параметра, лежащих вне малых окрестностей корней уравнения $\sin T(gh+b)=0$, эквивалентная форма которого $\sin \pi m\rho=0$. В окрестности этих корней наблюдается ветвление решений, вызванное резонансами между медленными (с частотой $2\pi/T$) и быстрыми (с частотой $gh+b$) колебаниями спутника. Именно для исключения из анализа решений краевой задачи (1.1), (1.3) резонансов такого рода выше рассматривались не произвольные значения ρ, а значения $\rho\in I(\varepsilon)$. Результаты расчетов [1] находятся в полном соответствии с доказанной теоремой.

Построения, аналогичные описанным выше, могут быть использованы также для аналитического доказательства существования периодических решений, найденных в [7]. Эта работа посвящена численному изучению колебаний спутника-гиростата под действием гравитационного момента на эллиптической орбите и по постановке задачи и методам исследования близка к [1].

Авторы благодарят В. А. Сарычева за полезные обсуждения при выполнении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сазонов В. В.* Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс на круговой орбите // Космич. исследования. 1983. Т. 21. № 6. С. 838–850.
2. *Сазонов В. В.* Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 707–719.
3. *Hölder E.* Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik // Math. Z. 1929. B. 31. H. 2/3. S. 197–257.
4. *Lewis D. C.* On the role of first integrals in the perturbation of periodic solution // Ann. Math. 1956. V. 63. № 3. P. 535–548.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
6. *Reid W. T.* Generalized Green's matrices for compatible systems of differential equations // Amer. J. Math. 1931. V. 53. № 2. P. 443–459.
7. *Сазонов В. В.* Периодические колебания спутника-гиростата относительно центра масс на эллиптической орбите // Космич. исследования. 1984. Т. 22. № 2. С. 147–158.

Москва

Поступила в редакцию 10.IV.1987