МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 531.38

Ю. Н. ЧЕЛНОКОВ

ОБ ОСЦИЛЛЯТОРНОМ И РОТАЦИОННОМ ДВИЖЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Получены кватернионные уравнения движения одного класса механических систем относительно поступательно перемещающейся в инерциальном пространстве системы координат в нормальной и осцилляторной формах. Показано, что механические системы рассматриваемого класса обладают общим осцилляторным свойством: их уравнения движения приводятся к уравнениям движения четырехмерного нелинейного осциллятора, совершающего в случае относительного движения системы по инерции одночастотные гармонические колебания. Установлена аналогия относительного ротационного движения систем с движением четырехмерного одночастотного возмущенного осциллятора. Для исследования ротационного движения систем предложены две формы уравнений движения в кватернионных оскулирующих элементах.

К рассматриваемому классу механических систем относятся динамически симметричные механические системы (твердое тело, спутник, гироскоп с неконтактным подвесом, невозмущаемые гиромаятниковые системы, некоторые гиростаты), задачи возмущенного центрального движения материальной точки.

1. Кватернионные уравнения движения в нормальной форме. Движение механической системы будем рассматривать относительно системы координат $OX_1X_2X_3(X)$, перемещающейся в инерциальной системе координат $O^*X_1^*X_2^*X_3^*(X^*)$ поступательно. Обозначим через $\mathbf{L}$ главный вектор моментов количеств этого движения системы, вычисленный относительно точки O. С механической системой свяжем определенным образом систему координат $OY_1Y_2Y_3(Y)$, угловое положение которой относительно системы координат $X(X^*)$ зададим собственным кватернионом $\mathbf{s}$ [1]. Компоненты s_j $(j=0, 1, 2, 3)$ кватерниона $\mathbf{s}$ являются параметрами Родрига — Гамильтона конечного поворота системы координат Y относительно X и называются в дальнейшем внешними координатами механической системы.

Уравнения движения механической системы будем рассматривать в специальной системе координат $OY_1'Y_2'Y_3'(Y')$, вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, коллинеарной кинетическому моменту $\mathbf{L}$ относительного движения механической системы:

$$\mathbf{\Omega}=n\mathbf{L}=\boldsymbol{\omega}+\mathbf{u}' \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость вращения системы координат Y, $\mathbf{u}'$ — относительная угловая скорость вращения системы координат Y' относительно Y, n — коэффициент пропорциональности, являющийся в общем случае некоторой функцией времени t и других параметров.

Взаимную ориентацию систем координат Y', Y, X будем задавать собственными кватернионами $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{z}$ в соответствии со схемой поворотов

$$X(X^*)\underset{\boldsymbol{\omega}}{\overset{\mathbf{s}}{\rightarrow}}Y\ \underset{\mathbf{u}'}{\overset{\boldsymbol{\mu}}{\rightarrow}}Y'\sim X(X^*)\underset{\mathbf{\Omega}}{\overset{\mathbf{z}}{\rightarrow}}Y' \tag{1.2}$$

Будем рассматривать такие механические системы, для которых кватернион $\boldsymbol{\mu}$, характеризующий ориентацию системы координат Y' относительно механической системы (системы координат Y), является известной функцией времени, параметров Родрига — Гамильтона z_j (компонент кватерниона $\mathbf{z}$) и их производных по времени $z_j^\bullet$, т. е. когда известна зависимость

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{z},\ \mathbf{z}^\bullet) \qquad (1.3)$$

Далее будет показано, что к такого рода механическим системам относятся динамически симметричные механические системы (твердое тело, спутник, гироскоп с неконтактным подвесом, некоторые типы гиростатов, невозмущаемые гиромаятниковые системы [2]), а также задача о движении материальной точки.

Используя теорему об изменении момента количеств относительного движения механической системы $\mathbf{L}^\bullet=\mathbf{M}$, $\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mathbf{M}''$, соотношение (1.1) и кватернионные кинематические уравнения [1] (знак $\circ$ означает кватернионное умножение):

$$2\mathbf{z}^\bullet=\boldsymbol{\Omega}_X\circ\mathbf{z}=n\mathbf{L}_X\circ\mathbf{z}, \qquad 2\mathbf{z}^\bullet=\mathbf{z}\circ\boldsymbol{\Omega}_{Y'}=n\mathbf{z}\circ\mathbf{L}_{Y'}$$

получим следующие кватернионные уравнения относительного движения механической системы в нормальной форме Коши.

Уравнения для переменных $\mathbf{L}$, $\mathbf{z}$ (независимая переменная — время t):

в отображениях на базис X:

$$\mathbf{L}_X^\bullet=\mathbf{M}_X, \qquad 2\mathbf{z}^\bullet=n\mathbf{L}_X\circ\mathbf{z} \qquad (1.4)$$

в отображениях на базис Y'

$$\mathbf{L}_{Y'}^\bullet=\mathbf{M}_{Y'}, \qquad 2\mathbf{z}^\bullet=n\mathbf{z}\circ\mathbf{L}_{Y'} \qquad (1.5)$$

Уравнения для переменных $\mathbf{l}$, $\mathbf{z}$, L, t (независимая переменная — безразмерное время τ):

в отображениях на базис X:

$$\begin{gathered} d\mathbf{l}_X/d\tau=(nL^2)^{-1}[\mathbf{M}_X-(n/2)(dL^2/d\tau)\mathbf{l}_X], \qquad 2d\mathbf{z}/d\tau=\mathbf{l}_X\circ\mathbf{z} \\ dL^2/d\tau=(2/n)\mathbf{l}\cdot\mathbf{M}=-(2/n)\operatorname{sqal}(\mathbf{l}_X\circ\mathbf{M}_X), \qquad dt/d\tau=(nL)^{-1} \end{gathered} \qquad (1.6)$$

в отображениях на базис Y':

$$\begin{gathered} d\mathbf{l}_{Y'}/d\tau=(nL^2)^{-1}[\mathbf{M}_{Y'}-(n/2)(dL^2/d\tau)\mathbf{l}_{Y'}], \qquad 2d\mathbf{z}/d\tau=\mathbf{z}\circ\mathbf{l}_{Y'} \\ dL^2/d\tau=-(2/n)\operatorname{sqal}(\mathbf{l}_{Y'}\circ\mathbf{M}_{Y'}), \qquad dt/d\tau=(nL)^{-1} \end{gathered} \qquad (1.7)$$

Здесь и далее запись вида $\mathbf{a}_\xi$ означает отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис ξ ($\xi=X$, Y, Y'), sqal $\mathbf{a}$ — скалярная часть кватерниона $\mathbf{a}$, точка означает дифференцирование по времени t, производная от кватерниона вычисляется в предположении неизменности ортов гиперкомплексного пространства $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$: $\mathbf{a}^\bullet=a_0^\bullet+a_1^\bullet\mathbf{i}_1+a_2^\bullet\mathbf{i}_2+a_3^\bullet\mathbf{i}_3$; $\mathbf{l}$ — единичный вектор, имеющий направление вектора $\mathbf{L}$: $\mathbf{L}=L\mathbf{l}$, $\mathbf{L}=|\mathbf{L}|$; $\mathbf{M}'$ — главный момент всех внешних сил, действующих на механическую систему, вычисленный относительно точки O, $\mathbf{M}''$ — главный момент переносных сил инерции, вычисленный относительно той же точки.

В уравнениях (1.4) ((1.5)) неизвестными являются проекции вектора кинетического момента $\mathbf{L}$ на базис $X(Y')$ и параметры Родрига—Гамильтона z_j, а в уравнениях (1.6) ((1.7)) — проекции единичного вектора $\mathbf{l}$ на базис $X(Y')$ (направляющие косинусы вектора $\mathbf{L}$ в базисе $X(Y')$), модуль L кинетического момента, параметры Родрига — Гамильтона z_j и время t.

Внешние координаты механической системы (т. е. параметры Родрига — Гамильтона s_j, характеризующие ориентацию механической системы в базисе X) находятся после интегрирования любой из указанных систем по формуле (здесь и далее черта означает сопряженный кватернион)

$$\mathbf{s}=\mathbf{z}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}, \qquad \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{z},\ \mathbf{z}^\bullet) \qquad (1.8)$$

вытекающей из схемы поворотов (1.2).

Если моменты внешних сил и переносных сил инерции заданы своими проекциями в системе координат Y, связанной с механической системой, то системы (1.4) и (1.6) дополняются соотношением $\mathbf{M}_X=\mathbf{z}\circ\overline{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu}\circ\overline{\mathbf{z}}$, $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{z}, \mathbf{z}^{\boldsymbol{\cdot}})$, а системы (1.5) и (1.7) — соотношением

$$\mathbf{M}_{Y'}=\overline{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{z}, \mathbf{z}^{\boldsymbol{\cdot}}) \tag{1.9}$$

2. Уравнения движения в осцилляторной форме. Переходя к параметрам z_j в динамических уравнениях систем (1.4), (1.6), получим следующие осцилляторные формы кватернионных уравнений движения механической системы.

Уравнения для переменных z_j, L в функции от времени t:

$$\mathbf{z}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+(nL/2)^2\mathbf{z}+n(dn^{-1}/dt)\mathbf{z}^{\boldsymbol{\cdot}}=(n/2)\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z} \tag{2.1}$$

$$dL^2/dt=(4/n)\,\mathrm{sqal}(\overline{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\cdot}}\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}) \tag{2.2}$$

$$(nL/2)^2=z_0^{\cdot 2}+z_1^{\cdot 2}+z_2^{\cdot 2}+z_3^{\cdot 2} \tag{2.3}$$

Уравнения для переменных z_j, L, t в функции от независимой переменной t^*:

$$d^2\mathbf{z}/dt^{*2}+(L/2)^2\mathbf{z}=(2n)^{-1}\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z} \tag{2.4}$$

$$dL^2/dt^*=(4/n)\,\mathrm{sqal}[(d\overline{\mathbf{z}}/dt^*)\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}] \tag{2.5}$$

$$dt/dt^*=1/n \tag{2.6}$$

$$(L/2)^2=(dz_0/dt^*)^2+(dz_1/dt^*)^2+(dz_2/dt^*)^2+(dz_3/dt^*)^2 \tag{2.7}$$

Уравнения для переменных z_j, L, t в функции от безразмерного времени τ:

$$d^2\mathbf{z}/d\tau^2+(^1/_4)\mathbf{z}=(2L^2)^{-1}[-(dL^2/d\tau)\,d\mathbf{z}/d\tau+(1/n)\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}] \tag{2.8}$$

$$dL^2/d\tau=(4/n)\,\mathrm{sqal}[(d\overline{\mathbf{z}}/d\tau)\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}] \tag{2.9}$$

$$dt/d\tau=(nL)^{-1} \tag{2.10}$$

Каждое из кватернионных уравнений (2.1), (2.4), (2.8) эквивалентно системе из четырех скалярных дифференциальных уравнений второго порядка относительно параметров z_j. Уравнение (2.1) ((2.4)) рассматривается совместно либо с соотношением (2.3) ((2.7)), либо с дифференциальным уравнением (2.2) ((2.5)), являющимся законом изменения модуля L кинетического момента механической системы во времени $t(t^*)$. В последнем случае величина L рассматривается в качестве новой переменной.

Если моменты внешних сил и переносных сил инерции заданы своими проекциями в системе координат Y, то каждая из полученных систем (2.1)—(2.3), (2.4)—(2.7), (2.8)—(2.10) дополняется соотношением (1.9) и равенством $\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}=\mathbf{z}\circ\mathbf{M}_{Y'}$. Переход от переменных z_j к внешним координатам механической системы s_j осуществляется по формуле (1.8).

В случае, когда сумма моментов внешних сил и переносных сил инерции равна нулю:

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mathbf{M}''=0 \tag{2.11}$$

имеет место интеграл момента количеств относительного движения механической системы: $\mathbf{L}=\mathrm{const}$, $L=|\mathbf{L}|=\mathrm{const}$; и каждое из кватернионных уравнений (2.4), (2.8) принимает вид уравнения движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора

$$d^2\mathbf{z}/dt^{*2}+(L/2)^2\mathbf{z}=0, \quad L=\mathrm{const}$$

$$d^2\mathbf{z}/d\tau^2+{}^1/_4\mathbf{z}=0, \quad \tau^{\boldsymbol{\cdot}}=nL, \quad L=\mathrm{const} \tag{2.12}$$

Таким образом, механические системы рассматриваемого класса обладают осцилляторным свойством. Их относительное движение по инерции изоморфно движению гармонического осциллятора. Частота колебаний осциллятора во «времени» t^* зависит от начальных условий движения (зависит от значений переменных dz_j/dt^* в начальный момент времени) и равна половине модуля кинетического момента механической системы, а частота колебаний осциллятора в безразмерном времени τ не зависит от начальных условий движения и равна $^1/_2$. Для относительного ротационного движения механической системы [3], т. е. для такого ее относительного движения, кинетическая энергия которого существенно превосходит сумму работ моментов внешних сил и переносных сил инерции, каждое из основных кватернионных уравнений (2.4), (2.8) имеет вид уравнения движения четырехмерного одночастотного возмущенного осциллятора. Частота осциллятора, соответствующего уравнению (2.4), равна $L/2$ и является переменной величиной. Она выражается через производные от параметров z_j в соответствии с формулой (2.3) или (2.7). Закон изменения частоты осциллятора во времени t имеет вид (2.2), а во «времени» t^* — вид (2.5). Частота осциллятора, соответствующего уравнению (2.8), постоянна, что дает в ряде случаев преимущество системе (2.8) — (2.10) перед системой (2.4) — (2.7).

Итак, рассмотрение уравнений движения механической системы в специальной системе координат, вращающейся с абсолютной угловой скоростью, коллинеарной вектору кинетического момента относительного движения механической системы, и использование в качестве кинематических параметров ориентации параметров Родрига — Гамильтона позволяет привести уравнения движения механической системы по ее внешним координатам в нелинейной постановке к осцилляторному виду, т. е. к виду уравнений движения нелинейного четырехмерного осциллятора, совершающего в случае относительного движения механической системы по инерции гармонические колебания с одинаковой частотой.

3. Уравнения движения в кватернионных оскулирующих элементах. В случае относительного ротационного движения механической системы сумма моментов $\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mathbf{M}''$ пропорциональна малому параметру. Поэтому относительное движение механической системы по переменным z_j на небольшом интервале времени близко к невозмущенному гармоническому движению, имеющему место при выполнении условия (2.11). Моменты внешних сил и переносных сил инерции, дающие отличную от нуля сумму, будут вносить в это движение малые возмущения, которые, однако, могут накапливаться с течением времени, приводя к существенной эволюции движения. Для исследования этой эволюции целесообразно использовать уравнения движения в кватернионных оскулирующих элементах, применяя асимптотические методы нелинейной механики.

Для получения первой формы уравнений относительного ротационного движения механической системы в кватернионных оскулирующих элементах будем искать решение уравнения (2.8) в виде соотношения

$$\mathbf{z}=\boldsymbol{\alpha}\cos(\tau/2)+\boldsymbol{\beta}\sin(\tau/2), \qquad \tau^{\cdot}=nL \tag{3.1}$$

представляющего собой (при $\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{const}$, $\boldsymbol{\beta}=\mathrm{const}$, $L=\mathrm{const}$) решение уравнения (2.12), в которое переходит уравнение (2.8) при выполнении условия (2.11). При этом в соответствии с методом вариации произвольных постоянных потребуем, чтобы переменные $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ были связаны помимо соотношения (3.1) еще и соотношением

$$\cos(\tau/2)\,d\boldsymbol{\alpha}/d\tau+\sin(\tau/2)\,d\boldsymbol{\beta}/d\tau=0 \tag{3.2}$$

Рассматривая выражения (3.1), (3.2) как формулы замены переменной $\mathbf{z}$ на новые переменные $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, вместо уравнений (2.8) — (2.10) получаем систему уравнений относительно новых переменных $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, L и t:

$$d\boldsymbol{\alpha}/d\tau=-\mathbf{f}\sin(\tau/2), \quad d\boldsymbol{\beta}/d\tau=\mathbf{f}\cos(\tau/2), \quad dt/d\tau=(nL)^{-1} \tag{3.3}$$

$$dL^2/d\tau=(4/n)\,\mathrm{sqal}[(d\bar{\mathbf{z}}/d\tau)\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}] \tag{3.4}$$

$$\mathbf{f}=(1/L^2)[-(dL^2/d\tau)\,d\mathbf{z}/d\tau+(1/n)\mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}] \tag{3.5}$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}'+\mathbf{M}'', \quad \mathbf{M}_X\circ\mathbf{z}=\mathbf{z}\circ\mathbf{M}_{Y'}=\mathbf{z}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{z},\mathbf{z}^{\cdot})$$

$$\mathbf{z}=\boldsymbol{\alpha}\cos(\tau/2)+\boldsymbol{\beta}\sin(\tau/2), \quad d\mathbf{z}/d\tau=(^1/_2)[-\boldsymbol{\alpha}\sin(\tau/2)+\boldsymbol{\beta}\cos(\tau/2)] \tag{3.6}$$

Отметим, что начальные условия для уравнений (3.3) необходимо выбирать так, чтобы они удовлетворяли равенствам (здесь и далее суммирование по индексу j производится от нуля до трех):

$$\Sigma\alpha_j^2=1, \quad \Sigma\beta_j^2=1, \quad \Sigma\alpha_j\beta_j=0 \tag{3.7}$$

т. е. так, чтобы кватернионы α и β были единичными и ортогональными. Равенства (3.7) являются частными интегралами уравнений (3.3) и соответствуют условиям

$$\Sigma z_j^2=1, \quad \Sigma z_j(dz_j/d\tau)=0, \quad \Sigma(dz_j/d\tau)^2={}^1/_4 \tag{3.8}$$

которым должны удовлетворять параметры Родрига — Гамильтона z_j (равенства (3.8) являются частными интегралами уравнений (2.8)).

Для получения второй формы уравнений относительного ротационного движения механической системы в кватернионных оскулирующих элементах введем систему координат $O\eta_1\eta_2\eta_3(\eta)$, связанную с вектором кинетического момента $\mathbf{L}$. Ось $O\eta_3$ этой системы координат направим по вектору $\mathbf{L}$, а проекцию ω_3^* вектора $\boldsymbol{\omega}^*$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат η на направление вектора $\mathbf{L}$ (ось $O\eta_3$) положим равной нулю. Взаимную ориентацию систем координат η и X, Y' и η будем задавать собственными кватернионами $\mathbf{e}$, $\mathbf{x}$ в соответствии со схемой поворотов

$$X \underset{\boldsymbol{\omega}^*}{\overset{\mathbf{e}}{\rightarrow}} \eta \rightarrow Y \underset{\mathbf{u}'}{\overset{\boldsymbol{\mu}}{\rightarrow}} Y' \sim X \underset{\boldsymbol{\omega}^*}{\overset{\mathbf{e}}{\rightarrow}} \eta \overset{\mathbf{x}}{\rightarrow} Y' \sim X \underset{\boldsymbol{\Omega}}{\overset{\mathbf{z}}{\rightarrow}} Y' \tag{3.9}$$

Запишем кватернионные уравнения вращательного движения системы координат η относительно X и системы координат Y' относительно η:

$$2d\mathbf{e}/d\tau=(nL)^{-1}\mathbf{e}\circ\boldsymbol{\omega}_\eta^* \tag{3.10}$$

$$2d\mathbf{x}/d\tau=(nL)^{-1}(\boldsymbol{\Omega}_\eta-\boldsymbol{\omega}_\eta^*)\circ\mathbf{x}=(\mathbf{i}_3-(nL)^{-1}\boldsymbol{\omega}_\eta^*)\circ\mathbf{x} \tag{3.11}$$

Отображение $\boldsymbol{\omega}_\eta^*$ вектора $\boldsymbol{\omega}^*$ на базис η найдем, используя равенство $\boldsymbol{\omega}^*=(\mathbf{l}\times\mathbf{M})/L$:

$$\boldsymbol{\omega}_\eta^*=L^{-1}\mathbf{i}_3\times\mathbf{M}_\eta=L^{-1}\operatorname{vect}(\mathbf{i}_3\circ\mathbf{M}_\eta)=L^{-1}(-M_{\eta_2}\mathbf{i}_1+M_{\eta_1}\mathbf{i}_2) \tag{3.12}$$

где $\operatorname{vect}(\mathbf{i}_3\circ\mathbf{M}_\eta)$ — векторная часть кватерниона $\mathbf{i}_3\circ\mathbf{M}_\eta$, M_{η_i} — проекция момента $\mathbf{M}$ на ось $O\eta_i$.

В случае, когда выполняется равенство (2.11), $\boldsymbol{\omega}^*=0$ и общие решения уравнений (3.10), (3.11) принимают вид

$$\mathbf{e}=\mathrm{const}, \quad \mathbf{x}=[\cos(\tau/2)+\mathbf{i}_3\sin(\tau/2)]\circ\mathbf{c}, \quad \mathbf{c}=\mathrm{const} \tag{3.13}$$

Полагая сумму моментов внешних сил и переносных сил инерции отличной от нуля (при этом $\boldsymbol{\omega}^*\neq0$), будем рассматривать второе равенство (3.13) как формулу замены кватернионной переменной $\mathbf{x}$ на новую переменную $\mathbf{c}$, считая ее уже не постоянной, а некоторой переменной функцией времени. В результате из уравнений (3.10) — (3.12) и схемы поворотов (3.9) получаем следующую систему уравнений относительно переменных $\mathbf{e}$, $\mathbf{c}$, L и t:

$$2d\mathbf{e}/d\tau=(nL)^{-1}\mathbf{e}\circ\boldsymbol{\omega}_\eta^* \tag{3.14}$$

$$2d\mathbf{c}/d\tau=-(nL)^{-1}\boldsymbol{\omega}_\eta^*\circ(\cos\tau+\mathbf{i}_3\sin\tau)\circ\mathbf{c}, \quad dt/d\tau=(nL)^{-1}$$

$$dL^2/d\tau=-(2/n)\operatorname{sqal}(\mathbf{i}_3\circ\mathbf{M}_\eta)=(2/n)M_{\eta_3} \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\eta^*=L^{-1}\operatorname{vect}(\mathbf{i}_3\circ\mathbf{M}_\eta)=L^{-1}(-M_{\eta_2}\mathbf{i}_1+M_{\eta_1}\mathbf{i}_2) \tag{3.16}$$

$$\mathbf{M}_\eta=\bar{\mathbf{e}}\circ\mathbf{M}_X\circ\mathbf{e}=\mathbf{x}\circ\mathbf{M}_{Y'}\circ\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}}\circ\mathbf{M}_Y\circ\boldsymbol{\mu}\circ\bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{z}=\mathbf{e}\circ\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}=[\cos(\tau/2)+\mathbf{i}_3\sin(\tau/2)]\circ\mathbf{c} \tag{3.17}$$

В случае ротационного движения механической системы правые части уравнений (3.3), (3.4), ((3.14), (3.15)) для переменных α, β, L^2 ($\mathbf{e}$, $\mathbf{c}$, L^2) пропорциональны малому параметру. Поэтому уравнения (3.3) — (3.6)

((3.14)—(3.17)) являются в этом случае кватернионными уравнениями относительного ротационного движения механической системы в стандартной форме с медленными переменными α, β, L^2(**e**, **c**, L^2) и с одной вращающейся фазой τ, если моменты **M**′, **M**″ не зависят явно от времени t, и с двумя вращающимися фазами τ, t, если моменты **M**′, **M**″ — периодические функции времени t. В некоторых задачах наряду с указанными быстрыми переменными τ, t (или помимо них) в качестве быстрых переменных могут выступать другие величины. Так, в задаче о движении спутника Земли относительно его центра масс в качестве быстрой переменной, наряду с переменной τ, может выступать истинная аномалия, а в задаче о движении симметричного гироскопа, близкого к свободному, в качестве быстрой переменной, наряду с переменной τ, выступает угловая переменная, имеющая смысл угла поворота системы координат Y' относительно Y.

Оскулирующие элементы α, β, L(**e**, **c**, L), найденные из уравнений (3.3)—(3.6) ((3.14)—(3.17)), позволяют не только определить ориентацию механической системы относительно системы координат X (для этого необходимо воспользоваться формулами (1.8), (3.6) ((1.8), (3.17)), но и достаточно легко установить закон изменения вектора кинетического момента **L** механической системы по формулам $\mathbf{L}_X = L\beta\circ\bar{\alpha} = L\mathbf{e}\circ\mathbf{i}_3\circ\bar{\mathbf{e}}$.

Связь оскулирующих элементов α, β с элементами **e**, **c** устанавливается соотношениями: $\alpha = \mathbf{e}\circ\mathbf{c}$, $\beta = \mathbf{e}\circ\mathbf{i}_3\circ\mathbf{c}$.

Отметим, что при исследовании ротационного движения твердого тела в настоящее время широко применяются уравнения движения тела в угловых оскулирующих элементах [3, 4]: в качестве переменных используются углы, определяющие направление вектора кинетического момента тела относительно неизменно ориентированных в инерциальном пространстве координатных осей, модуль кинетического момента тела и углы Эйлера, характеризующие ориентацию тела относительно системы координат, связанной с вектором кинетического момента тела. Для получения уравнений движения механической системы (3.14)—(3.17) в кватернионных оскулирующих элементах также использовалась система координат η, связанная с вектором кинетического момента **L** механической системы (в состав введенных оскулирующих элементов входят параметры Родрига — Гамильтона e_j, характеризующие ориентацию системы координат η относительно неизменно ориентированной в инерциальном пространстве системы координат X). В этом заключается общность известных и полученных уравнений движения механической системы (3.14)—(3.17). В отличие от известных уравнений движения в угловых оскулирующих элементах, полученные уравнения в кватернионных оскулирующих элементах (3.3)—(3.6) и (3.14)—(3.17) не содержат тригонометрических функций от медленных переменных и не имеют связанных с ними особенностей, что является полезным как при численном решении уравнений движения, так и при их аналитическом исследовании.

Рассмотрим примеры механических систем, относящихся к рассматриваемому классу.

4. Возмущенное центральное движение материальной точки. Для материальной точки система координат Y', имеющая начало в этой точке, совпадает с системой координат Y, ось Y_1 которой направляется по радиусу-вектору **r** материальной точки, проведенному из центра притяжения O, а проекция ω_1 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y на направление радиуса-вектора **r** полагается равной нулю. В этом случае момент количества движения **L** материальной точки в ее движении относительно системы координат X, имеющей начало в центре O, коллинеарен вектору $\boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}$, где m — масса точки, $r = |\mathbf{r}|$. Поэтому уравнения, приведенные в п. 1—3, при задании фигурирующих в них величин соотношениями

$$\boldsymbol{\mu} = 1, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{s}, \quad n = (mr^2)^{-1}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mathbf{M}'' = \mathbf{r}\times[-(d\Pi/dr)(\mathbf{r}/r) - (\partial\Pi^*/\partial\mathbf{r}) + m\mathbf{p}] = \mathbf{r}\times[(-\partial\Pi^*/\partial\mathbf{r}) + m\mathbf{p}] \tag{4.1}$$

где $\Pi=\Pi(r)$ — потенциал центрального силового поля, в котором движется материальная точка, $\Pi^*=\Pi^*(t, \mathbf{r})$ — возмущающий потенциал, $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt)$ — возмущающее ускорение, являются различными кватернионными формами уравнений возмущенного центрального движения материальной точки, записанными в системе координат Y. При этом каждая из приведенных в пунктах 1—3 совокупностей уравнений движения должна быть дополнена скалярным уравнением для расстояния r (уравнение (2.4) (2.8)) или уравнения (3.3) и соотношения (4.1) описывают собой непрерывно изменяющуюся в пространстве ориентацию оскулирующей орбиты).

К задачам возмущенного центрального движения материальной точки относится возмущенная задача двух тел, уравнения которой сингулярны в начале координат. Наиболее эффективная регуляризация уравнений пространственной задачи двух тел предложена Кустаанхеймо и Штифелем [5, 6]. Она обобщает регуляризацию Леви — Чивита для плоского движения и использует теорию KS — преобразований (KS — матриц), специально разработанную для этой цели в [5]. В [7, 8] предложен кватернионный подход к регуляризации дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел, естественным образом вписывающийся в построенную теорию: регулярные уравнения Кустаанхейма — Штифеля получаются из уравнения (2.1) и соотношений (4.1) (в них нужно положить $\Pi=-m\mu^*r^{-1}$, $\mu^*=\text{const}$) в результате замены кватернионной переменной $\mathbf{z}=\mathbf{s}$ на новую кватернионную переменную $\mathbf{u}=r^{1/2}\bar{\mathbf{z}}$ (при этом отпадает необходимость в уравнении для расстояния r), регуляризующего преобразования времени t по формуле $dt=rd\tau$ и введения в качестве новой переменной кеплеровской энергии материальной точки.

Использование теории, изложенной в п. 1—3, позволяет разработать кватернионную теорию регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских уравнений возмущенного центрального движения материальной точки (для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$), позволяет построить новые кватернионные модели возмущенного центрального движения, применение которых целесообразно в небесной механике, астродинамике, инерциальной навигации.

5. Динамически симметричные механические системы. Рассмотрим механическую систему, состоящую из несущего тела и системы носимых тел, не связанных неизменно с несущим телом. Несущее тело имеет относительно своей точки подвеса O три степени свободы. Точка подвеса произвольно перемещается в пространстве. Поместим в точку O начало системы координат X и начало системы координат Y, жестко связанной с несущим телом. Полагаем, что механическая система имеет ось динамической симметрии OY_3, и что ее кинетический момент L описывается выражением

$$\mathbf{L}=k\boldsymbol{\omega}+(I_3-k)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{y}_3)\mathbf{y}_3 \qquad (5.1)$$

где k — некоторый параметр, являющийся в общем случае некоторой функцией времени; I_3 — момент инерции системы относительно оси OY_3, $\mathbf{y}_3$ — орт оси OY_3.

Выражением вида (5.1) описывается кинетический момент динамически симметричных твердого тела и спутника, невозмущаемых гиромаятниковых систем [2], некоторых гиростатов.

Введем систему координат Y' с началом в точке O подвеса механической системы, направив ее ось OY_3' по оси динамической симметрии системы. Угловую скорость $\mathbf{u}'$ вращения системы координат Y' относительно Y зададим соотношением $\mathbf{u}'=[(I_3-k)/k]\,\omega_3\mathbf{y}_3$, $\omega_3=\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{y}_3$.

Абсолютная угловая скорость вращения введенной таким образом системы координат Y' коллинеарна кинетическому моменту $\mathbf{L}$ механической системы: $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}+\mathbf{u}'=n\mathbf{L}$, $n=1/k$. Поэтому динамически симметричные механические системы, кинетический момент которых имеет вид (5.1), относятся к рассмотренному классу механических систем и для исследования их движения (движения несущего тела) могут быть использованы кватернионные уравнения движения, приведенные в п. 1—3.

Зависимость (1.3), задающая кватернион μ, характеризующий ориентацию системы координат Y' относительно Y, имеет в этом случае вид

$$\mu=\cos(\tau_1/2)-\mathbf{i}_3\sin(\tau_1/2),$$

$$\tau_1^{\cdot}=(k-I_3)\,\omega_3/k=(k-I_3)\,\Omega_3/I_3=2(k-I_3)\,(-z_3z_0^{\cdot}+z_2z_1^{\cdot}-z_1z_2^{\cdot}+z_0z_3^{\cdot})/I_3$$

Отметим, что движение динамически симметричных механических систем, для которых параметр k=const, исследовалось ранее кватернионными методами в [9], где показано, что кватернионные уравнения движения таких систем относительно произвольно перемещающейся в инерциальном пространстве системы координат приводятся с помощью преобразований вращения к осцилляторной форме (2.8) и к стандартной форме (3.3) в кватернионных оскулирующих элементах.

Предложенные уравнения движения механических систем в осцилляторной и в нормальной формах, уравнения ротационного движения систем в кватернионных оскулирующих элементах целесообразно использовать для исследования движения симметричного твердого тела, близкого к свободному, в частности, движения симметричного твердого тела с подвижной точкой подвеса, имеющего малое смещение центра масс относительно точки подвеса в любом направлении, под действием сил тяготения при произвольном перемещении точки подвеса в пространстве, для исследования движения симметричного гироскопа с неконтактным подвесом и симметричного спутника, для исследования в нелинейной постановке свойств движения невозмущаемых гиромаятниковых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. *Климов Д. М.* Механика невозмущаемых гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 57–65.
3. *Гродзовский Г. Л., Охоцимский Д. Е., Белецкий В. В. и др.* Механика космического полета // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1968. Т. 1. С. 265–319.
4. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
5. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. Berlin: Springer, 1971. 301 p.
6. *Бордовицына Т. В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
7. *Челноков Ю. Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
8. *Челноков Ю. Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
9. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные методы в задачах относительного движения динамически симметричных материальных систем. I // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 30–37.

Балаково

Поступила в редакцию 2.III.1987