МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 531.381

В. Б. ЛАРИН

О КАЛИБРОВКЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Рассматривается задача определения ориентации твердого тела по результатам измерений проекций угловой скорости на оси связанной с телом подвижной системы координат. Предполагается, что оси чувствительности датчиков пространственного измерителя угловой скорости, образующие так называемый приборный трехгранник, не совпадают с осями подвижной системы координат. Основное внимание уделяется случаю малого рассогласования осей приборного трехгранника и подвижной системы координат. Анализируются погрешности определения ориентации при вращении пространственного измерителя угловой скорости вокруг неподвижной оси. Получены выражения позволяющие идентифицировать параметры характеризующие неортогональность приборного трехгранника по рассогласованию вычисленной и действительной ориентации твердого тела.

1. С твердым телом, имеющим неподвижную точку, связана система координат орты которой обозначим $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Если известны проекции на оси этой системы координат вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{i}_1\omega_1+\mathbf{i}_2\omega_2+\mathbf{i}_3\omega_3$, то задача определения ориентации этого тела в параметрах Родрига-Гамильтона сводится к интегрированию кинематических уравнений (см., например, [1]):

$$\lambda^{\cdot}={}^1/_2\Omega\lambda,\ \lambda'=\|\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_0\|,\ \lambda'\lambda=|\lambda|^2=1 \tag{1.1}$$

$$\Omega=\begin{Vmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

где λ — вектор (кватернион) параметров Родрига-Гамильтона, штрих означает транспонирование.

Рассмотрим один из возможных источников возникновения ошибок при реализации такой схемы определения ориентации. Пусть на теле установлены три датчика угловой скорости (пространственный измеритель угловой скорости) оси чувствительности которых определяются тремя единичными (в общем случае неортогональными) векторами $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ (приборный трехгранник) близкими соответственно к осям $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси этих датчиков (результаты измерений) есть: $\omega_x=\mathbf{i}_x'\boldsymbol{\omega}$, $\omega_y=\mathbf{i}_y'\boldsymbol{\omega}$, $\omega_z=\mathbf{i}_z'\boldsymbol{\omega}$. Базирующиеся на этих измерениях результаты интегрирования кинематических уравнений типа (1.1) описывают изменение кватерниона λ_* определяющего «кажущуюся» ориентацию твердого тела

$$\lambda_*^{\cdot}={}^1/_2\Phi\lambda_*,\quad \lambda_*'=\|\lambda_x,\ \lambda_y,\ \lambda_z,\ \lambda_{0*}\|,\quad \lambda_*'\lambda_*=1 \tag{1.2}$$

$$\Phi=\begin{Vmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{Vmatrix}$$

Исследуем погрешности такой схемы определения ориентации. Пусть N — неподвижная система координат, R — связанная с телом подвижная система координат, B — система координат определяющая «кажущуюся» ориентацию тела (вычисляемую на основании результатов интегрирования уравнений (1.2) при начальном условии $\lambda_*'(0)=\|0,\ 0,\ 0,\ 1\|$. Соответственно, повороты заданные кватернионами λ и λ_* совмещают N с R и N с B. Поворот совмещающий R с B (погрешность определения ориентации) определяется кватернионом λ_ε [2]:

$$\lambda_\varepsilon=\Lambda\lambda_*,\quad \lambda_\varepsilon'=\|\lambda_{1\varepsilon},\ \lambda_{2\varepsilon},\ \lambda_{3\varepsilon},\ \lambda_{0\varepsilon}\| \tag{1.3}$$

$$\Lambda=\begin{Vmatrix} \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 \end{Vmatrix}$$

который, согласно [2] удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\lambda_\varepsilon^\bullet={}^1/{}_2\Omega_\varepsilon\lambda_\varepsilon \tag{1.4}$$

$$\Omega_\varepsilon=\begin{Vmatrix} 0 & (\omega_z+\omega_3) & -(\omega_y+\omega_2) & (\omega_x-\omega_1) \\ -(\omega_z+\omega_3) & 0 & (\omega_x+\omega_1) & (\omega_y-\omega_2) \\ (\omega_y+\omega_2) & -(\omega_x+\omega_1) & 0 & (\omega_z-\omega_3) \\ -(\omega_x-\omega_1) & -(\omega_y-\omega_2) & -(\omega_z-\omega_3) & 0 \end{Vmatrix}$$

Если известна матрица A (эта матрица постоянна и определяется взаимной ориентацией ортов $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ и $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$), задающая связь между проекциями угловой скорости на оси подвижной системы координат и оси чувствительности пространственного измерителя угловой скорости т. е.

$$\|\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z\|'=A\|\omega_1,\ \omega_2\ \omega_3\|' \tag{1.5}$$

то соотношения (1.4), (1.5) с начальным условием $\lambda_\varepsilon'(0)=\|0,\ 0,\ 0,\ 1\|$ описывают изменения во времени погрешность определения ориентации (взаимное расположение базисов R и B) в результате интегрирования кинематических уравнений (1.1) по данным такого пространственного измерителя угловой скорости. Эти соотношения могут оказаться полезными и при решении задачи определения матрицы A по результатам наблюдения $\lambda_\varepsilon(t)$ (одного из вариантов задачи уточнения ориентации и калибровки пространственного измерителя угловой скорости [3—5]).

2. Предположим, что тело вращается с постоянной угловой скоростью ($\boldsymbol{\omega}^\bullet=0$). В этом случае, фигурирующая в (1.4) матрица Ω_ε постоянна и ее характеристическое уравнение имеет вид

$$|\Omega_\varepsilon-sE|=s^4+s^2(4\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega}+4\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})+(2\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})^2 \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}=(A-E)\boldsymbol{\omega}$ — вектор погрешности регистрации пространственным измерителем угловой скорости вектора ω, E — единичная матрица.

Предположим, что матрица A близка к единичной: $A=E+\mu T$, где $\mu\ll1$ — малый параметр. В этом случае асимптотическое представление (отброшены члены порядка μ^2 и выше) корней уравнения (2.1) имеет вид

$$s_{1,2}=\pm i\theta,\quad s_{3,4}=\pm i\rho|\boldsymbol{\omega}| \tag{2.2}$$

$$i=\sqrt{-1},\quad \theta=|\boldsymbol{\omega}|(2+\rho),\quad \rho=\mu\mathbf{n}_\omega'T\mathbf{n}_\omega$$

$$|\boldsymbol{\omega}|=(\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\omega})^{1/2},\quad \mathbf{n}_\omega=\boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$$

Используя известное представление вещественной кососимметрической матрицы (см. например, [6]), в первом приближении имеем

$$\Omega_\varepsilon=V+W$$

$$V=U\operatorname{diag}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & 2|\omega| \\ -2|\omega| & 0 \end{Vmatrix},\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right\}U',\quad UU'=E$$

$$W=U\operatorname{diag}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & \rho|\omega| \\ -\rho|\omega| & 0 \end{Vmatrix},\begin{Vmatrix} 0 & \rho|\omega| \\ -\rho|\omega| & 0 \end{Vmatrix}\right\}U'$$

Так как матрицы W и V коммутативны, то

$$\exp({}^1/_2\Omega_\varepsilon t)=\exp({}^1/_2 Vt)\exp({}^1/_2Wt)=\exp({}^1/_2Wt)\exp({}^1/_2Vt)$$

$$\exp({}^1/_2Vt)=U\operatorname{diag}\left\{\begin{Vmatrix}\cos|\omega|t & \sin|\omega|t\\ -\sin|\omega|t & \cos|\omega|t\end{Vmatrix}, E\right\}U'$$

следовательно, в моменты $t=t_j=2\pi/|\omega|$ $(j=1, 2, \ldots)$ матрица $\exp({}^1/_2Vt_j)=$ $=E$ и

$$\lambda_\varepsilon(t_j)=\exp({}^1/_2Wt_j)\lambda_\varepsilon(0) \tag{2.3}$$

Таким образом, с учетом структуры матрицы W, ошибки определения ориентации наблюдаемые в моменты t_j можно интерпретировать, как результат вращения относительно фиксированной оси с постоянной угловой скоростью (модуль которой равен $|\omega|\rho$) базиса B относительно базиса R (систематический уход).

Найдем соотношения позволяющие оценить этот уход по величине деформации приборного трехгранника. При малом μ можно считать

$$\mathbf{i}_x=\mathbf{i}_1+\beta_1\mathbf{i}_2+\gamma_1\mathbf{i}_3,$$

$$\mathbf{i}_y=\alpha_2\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2+\gamma_2\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{i}_z=\alpha_3\mathbf{i}_1+\beta_3\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3$$

$$\mu T=\begin{Vmatrix}0 & \beta_2 & \gamma_1\\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & 0\end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

Заметим, что согласно (2.2), (2.3) угловая скорость систематического ухода определяется только симметрической составляющей матрицы μT. Действительно, $\rho={}^1/_2\mu\mathbf{n}_\omega'(T+T')\mathbf{n}_\omega$. Принимая во внимание, что

$${}^1/_2(\alpha_2+\beta_1)=1-|\mathbf{i}_x-\mathbf{i}_y|/\sqrt{2}=\sigma_1$$

$${}^1/_2(\alpha_3+\gamma_1)=1-|\mathbf{i}_x-\mathbf{i}_z|/\sqrt{2}=\sigma_2$$

$${}^1/_2(\beta_3+\gamma_2)=1-|\mathbf{i}_y-\mathbf{i}_z|/\sqrt{2}=\sigma_3$$

можно считать, что систематический уход обусловлен неортогональностью осей пространственного измерителя угловой скорости характеризуемой матрицей

$$\Sigma=\mu\,\frac{T+T'}{2}\begin{Vmatrix}0 & \sigma_1 & \sigma_2\\ \sigma_1 & 0 & \sigma_3\\ \sigma_2 & \sigma_3 & 0\end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

Пусть деформация приборного трехгранника симметрична, т. е. $\alpha_2=\alpha_3=$ $=\beta_1=\beta_3=\gamma_1=\gamma_2=\sigma$. Величина угла χ между соседними ортами, например, $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_x$ равна $\sqrt{2}\sigma$. Максимальное значение $\rho=2\sigma$ (максимальное собственное число матрицы (2.6)), следовательно, наибольшее значение угла ν характеризующего поворот базиса B относительно R за один оборот (время которого $\tau=2\pi/|\omega|$) базиса R будет связано следующим образом с углом χ:

$$\nu=2\sqrt{2}\pi\chi \tag{2.6}$$

3. Исследуем возможность использования соотношений типа (2.6) для решения обратной задачи — определения элементов матрицы (2.5) по результатам наблюдаемой погрешности определения ориентации в моменты $t=t_j$ (значения кватерниона $\lambda_\varepsilon(t_j)$). В этой связи, найдем направление оси, вокруг которой, в соответствии с (2.3), происходит вращение базиса B. Для этого воспользуемся рассуждениями, аналогичными приведенным в [7]. Представим вектор погрешность регистрации угловой скорости (который постоянен в базисе R и, следовательно, вращается с угловой ско-

ростью ω в базисе N) в виде двух ортогональных составляющих $\varepsilon=\varepsilon_\omega+\varepsilon_n$. Составляющая ε_ω параллельная вектору ω равна

$$\varepsilon_\omega=\rho\omega \tag{3.1}$$

Процесс накопления погрешности определения ориентации (поворот базиса B относительно базиса R) в первом приближении сводится к суммированию (спроектированных в базис N) поворотов

$$\varepsilon\delta t=\varepsilon_\omega\delta t+\varepsilon_n\delta t \tag{3.2}$$

за малый промежуток времени δt. Существенно, что суммы векторов малых поворотов $\varepsilon_\omega\delta t$ и $\varepsilon_n\delta t$, фигурирующих в (3.2), будут вести себя различно. Так как вектор ε_n будет вращаться в базисе N с угловой скоростью ω то сумма малых поворотов $\varepsilon_n\delta t$ за период $\tau=2\pi/|\omega|$ будет равна нулю. С другой стороны, вектор ε_ω, определяемый (3.1), постоянен в неподвижной системе координат и, следовательно, сумма малых поворотов $\varepsilon_\omega\delta t$ за время t будет равна $\varepsilon_\omega t$. За период τ вектор малого поворота характеризующего погрешность определения ориентации будет равен $\varepsilon_\omega\tau=2\pi\rho\omega/|\omega|$, т. е. будет коллинеарен вектору ω. Следовательно, в первом приближении, можно считать, что орт оси вокруг которой поворачивается базис B относительно R за целое число периодов τ будет совпадать с $\mathbf{n}_\omega$ (см. (2.2)), т. е. орт оси поворота определяемого векторной частью кватерниона $\lambda_\varepsilon(\tau)$ совпадает с $\mathbf{n}_\omega$. Руководствуясь этими соображениями можно записать выражение позволяющее определять элементы матрицы (2.5): $\mathbf{n}_\omega'\Sigma\mathbf{n}_\omega=\pi^{-1}\operatorname{arctg}(\mathbf{l}'\mathbf{n}_\omega)$. Здесь вектор $l'=(\lambda_{0\varepsilon}(\tau))^{-1}\|\lambda_{x\varepsilon}(\tau),\ \lambda_{y\varepsilon}(\tau),\ \lambda_{z\varepsilon}(\tau)\|$ сформирован из компонент кватерниона $\lambda_\varepsilon(\tau)$. Это соотношение очевидным образом обобщается на случай k оборотов базиса R, а именно

$$\mathbf{n}_\omega'\Sigma\mathbf{n}_\omega=(k\pi)^{-1}\operatorname{arctg}(\mathbf{l}_k'\mathbf{n}_\omega) \tag{3.3}$$

где вектор $\mathbf{l}_k'=(\lambda_{0\varepsilon}(k\tau))^{-1}\|\lambda_{x\varepsilon}(k\tau),\ \lambda_{y\varepsilon}(k\tau),\ \lambda_{z\varepsilon}(k\tau)\|$ формируется из компонент кватерниона $\lambda_\varepsilon(k\tau)$.

Таким образом, вращая пространственный измеритель угловой скорости относительно различных осей (выбирая различные орты и интегрируя показания датчиков в соответствии с (1.2) можно, используя (3.3), определить неортогональность установки датчиков (элементы матрицы Σ или их линейные комбинации). Так, например,

$$\sigma_s=\mathbf{n}_{\omega s}'\Sigma\mathbf{n}_{\omega s}\quad (s=1,\ 2,\ 3) \tag{3.4}$$

$$\sqrt{2}\mathbf{n}_{\omega 1}'=\|1,\ 1,\ 0\|,\quad \sqrt{2}\mathbf{n}_{\omega 2}'=\|1,\ 0,\ 1\|,\quad \sqrt{2}\mathbf{n}_{\omega 3}'=\|0,\ 1,\ 1\|$$

$$\sigma_4=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\mathbf{n}_{\omega 4}'\Sigma\mathbf{n}_{\omega 4},\quad \sqrt{3}\mathbf{n}_{\omega 4}'=\|1,\ 1,\ 1\| \tag{3.5}$$

Оценим путем численного моделирования точность нахождения элементов матрицы Σ с помощью соотношения (3.3). В эксперименте предполагалось, что только одна ось приборного трехгранника не совпадает с соответствующей осью подвижной системы координат. А именно, фигурирующая в (2.4) матрица μT имеет вид

$$\mu T=10^{-3}\cdot\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{Vmatrix}$$

и, соответственно, точное значение элементов матрицы: Σ: $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-\sigma_3=10^{-3}$. Значения кватерниона $\lambda_\varepsilon(k\tau)$ по которому формируется вектор $\mathbf{l}_k$ получалось в результате интегрирования до момента $t=k\tau$ системы (1.2), с начальным условием $\lambda_*'(0)=\|0,\ 0,\ 0,\ 1\|$ (фигурирующая в (1.4) матрица $\Lambda=\pm E$ при $t=k\tau$ и, следовательно, $\lambda_\varepsilon(k\tau)=\pm\lambda_*(k\tau)$, но изменение знака перед $\lambda_\varepsilon(k\tau)$ не влияет на значение вектора $\mathbf{l}_k$ в (3.3)). Численное интегрирование системы (1.2) проводилось с шагом $\tau\cdot 10^{-2}$. Алгоритм интегрирования определялся на основе соотношений [8].

При $k=1$, оценки величин элементов матрицы Σ полученные согласно (3.4) и их суммы согласно (3.5) равны: $\sigma_{1*}=-0{,}216\cdot 10^{-7}$, $\sigma_{2*}=0{,}998\cdot 10^{-3}$,

$\sigma_{3*}=-1{,}001\cdot10^{-3}$, $\sigma_{4*}=0{,}165\cdot10^{-5}$. Используя результаты [9] для уточнения оценок элементов матрицы Σ, получим

$$\sigma_{1**}={}^1/_2(\sigma_{1*}-\sigma_{2*}-\sigma_{3*}+\sigma_{4*})=0{,}681\cdot10^{-6}$$

$$\sigma_{2**}={}^1/_2(-\sigma_{1*}+\sigma_{2*}-\sigma_{3*}+\sigma_{4*})=0{,}999\cdot10^{-3}$$

$$\sigma_{3**}={}^1/_2(-\sigma_{1*}-\sigma_{2*}+\sigma_{3*}+\sigma_{4*})=-1{,}0\cdot10^{-3}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. *Мэйо Р. А.* Переходная матрица для вычисления относительных кватернионов // Ракетн. техника и космонавтика. 1979. Т. 17. № 3. С. 184–189.
3. *Ткаченко А. И.* Определение ориентации приборного трехгранника с использованием угловой информации // Изв. АН ССР. МТТ. 1982. № 6. С. 15–21.
4. *Ткаченко А. И.* Определение ориентации и калибровка пространственного измерителя угловой скорости с использованием угловой информации // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 19–23.
5. *Ткаченко А. И.* Коррекция системы «Пространственный измеритель угловой скорости – гиростабилизатор» // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 31–36.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
7. *Авраменко Л. Г., Ларин В. Б.* О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений в параметрах Родрига – Гамильтона // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 45–50.
8. *Ларин В. Б., Науменко К. И.* Об определении ориентации твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 24–32.
9. *Налимов В. В.* Теория эксперимента. М.: Наука, 1971, 207 с.

Киев

Поступила в редакцию 21.I.1987