УДК 539.3:534.1

А. Г. ИШКОВА

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим круглую пластинку единичного радиуса, лежащую на упругом полупространстве и совершающую вынужденные колебания с частотой k, вызываемые сосредоточенной силой Pe^{ikt}, приложенной в ее центре. Будем считать пластинку плотно прилегающей к основанию в каждой точке, пренебрегая инерцией полупространства и силами трения на площадке контакта. При этих условиях задача сводится к определению реакции основания при условии фиктивного равновесия пластинки под действием вынуждающей силы, реакции основания и сил инерции. Зная реакцию основания, можно найти все компоненты напряженного и деформированного состояния пластинки и основания в каждой точке.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний пластинки имеет вид

$$\nabla^2\nabla^2 w = D^{-1}[d(\partial^2 w/\partial t^2) + p(\rho,\ t)] \tag{1}$$

Здесь w – прогиб пластинки, D – ее цилиндрическая жесткость, d – удельная плотность, p – реакция основания.

Прогиб пластинки представим следующим образом

$$w = \varphi(\rho) e^{ikt} \tag{2}$$

Неизвестную реакцию основания будем считать изменяющейся по закону

$$p(\rho,\ t) = p(\rho) e^{ikt} \tag{3}$$

где $p(\rho)$ будем искать в виде

$$p(\rho) = A(1-\rho^2)^{-1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}\rho^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\rho^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}\rho^{2n}\ln\rho \tag{4}$$

Осадку основания $v(\rho,\ t)$ представим в виде

$$v(\rho,\ t) = v(\rho) e^{ikt} \tag{5}$$

$$v(\rho) = \frac{4}{\pi\delta}\left[\frac{1}{\rho}\int_0^\rho p(r) r\, dr \int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\sin^2 x\right)^{-1/2} dx + \int_\rho^1 p(r)\, dr \int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\sin^2 x\right)^{-1/2} dx\right] \tag{6}$$

Здесь $\delta = E_0/(1-\nu_0^2)$, E_0 и ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона основания.

Граничные условия поставленной задачи (M – изгибающий момент, Q – перерывающая сила):

$$M|_{\rho=1} = 0, \quad Q|_{\rho=1} = 0 \tag{7}$$

Условие в центре пластинки

$$\lim_{\rho\to 0} Q_\rho 2\pi\rho + P = 0 \tag{8}$$

Условие двусторонней связи пластинки с основанием

$$w \equiv v \tag{9}$$

Уравнение движения пластинки в виде уравнения равновесия по принципу Даламбера в проекции на вертикальную ось имеет вид

$$-d\int_0^1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} 2\pi\rho\, d\rho + Pe^{ikt} = \int_0^1 p(\rho) e^{ikt} 2\pi\rho\, d\rho \tag{10}$$

Перепишем уравнение (1) с учетом (2)–(4)

$$\nabla^2\nabla^2\varphi-\frac{\Omega}{D}\varphi=-\frac{1}{D}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(A\gamma_{2n}+b_{2n})\rho^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}\rho^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}\rho^{2n}\ln\rho\right] \quad (11)$$

$$\Omega=k^2d,\quad \gamma_{2n}=(2n-1)!!/(2n)!!$$

Решение уравнения (II) в рядах имеет вид

$$\varphi(\rho)=C_0+C_2\rho^2+D_2\rho^2\ln\rho+C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega^{n+1}\rho^{4n+4}}{D^{n+1}[(4n+4)!!]^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{4n+4}}{[(4n+4)!!]^2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{[(4k)!!]^2\Omega^{n-k}}{D^{n-k-1}}(A\gamma_{4k}+b_{4k})+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n+3)\rho^{4n+4}}{(4n+4)(4n+2)[(4n+4)!!]^2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[(4k+4)!!]^2\Omega^{n-k-1}}{D^{n-k}}E_{4k+4}+4C_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega^{n+1}\rho^{4n+6}}{D^{n+1}[(4n+6)!!]^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{4n+6}}{[(4n+6)!!]^2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{[(4k+2)!!]^2\Omega^{n-k}}{D^{n-k+1}}(A\gamma_{4k+2}+b_{4k+2})-16D_2\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{4n+6}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{\Omega^{k+1}(4k+5)}{D^{k+1}(4k+6)(4k+4)[(4k+6)!!]^2}-4\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{4n+6}\sum_{k=0}^{n}\frac{(4k+5)}{(4k+6)(4k+4)[(4k+6)!!]^2}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{k}\frac{[(4i+2)!!]^2\Omega^{k-i}}{D^{k-i+1}}E_{4i+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{4n+1}}{[(4n+1)!!]^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[(4k+1)!!]^2\Omega^{n-k-1}}{D^{n-k}}b_{4k-1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{4n+3}}{[(4n+3)!!]^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[(4k+3)!!]^2\Omega^{n-k-1}}{D^{n-k}}b_{4k+3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{4n+4}\ln\rho}{[(4n+4)!!]^2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[(4k+4)!!]^2\Omega^{n-k-1}}{D^{n-k}}E_{4k+4}+4D_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega^n\rho^{4n+2}\ln\rho}{D^n[(4n+2)!!]^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{4n+2}\ln\rho}{[(4n+2)!!]^2}\times \quad (12)$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{[(4k-2)!!]^2\Omega^{n-k}}{D^{n-k+1}}E_{4k-2}$$

где C_0, C_2, D_2 – постоянные интегрирования, определяемые из условий (7) и (8).

Равенство (6) с учетом (3) и (4) будет (штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $m=(n+1)/2$ отсутствует):

$$v(\rho)=-\frac{2}{\delta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(A\gamma_{2n}+b_{2n})\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{(2m-1)!!\rho^{2m}}{(2m)!!(2n-2m+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(A\gamma_n+b_n)\varepsilon_n\rho^{n+1}-\right.$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n+1)!!]^2}{[(2n+2)!!]^2}b_{2n+1}\rho^{2n+2}\ln\rho-\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[(2m-1)!!\rho^{2m}}{[(2m)!!]^2(2n-2m+1)^2}-$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}\rho^{2n+1}\varphi_{2n}\right\}$$

$$\varepsilon_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2(n+2m+2)} - \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2(n-2m+1)}$$

$$\varepsilon_{2n}=0, \quad \gamma_{2n+1}=0 \quad (n=0, 1, \ldots)$$

$$\varphi_{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2}\left[\frac{1}{(2n+2m+2)^2} - \frac{1}{(2n-2m+1)^2}\right]$$

Из условия (9) для коэффициентов b_{2n+1} и E_{2n} получаем соотношения

$$E_0=E_2=E_6=b_3=0, \quad b_1=-2\delta D_2$$

$$E_4=2D_2\delta[(5!!)^2\varphi_4 K]^{-1}$$

$$D_2=P/(4\pi K\delta), \quad K=2D/\delta a^3 \quad (a=1)$$

$$E_{4m-2} = \frac{\delta}{2[(4m-1)!!]^2\varphi_{4m-2}} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{[(4k+3)!!]^2\Omega^{m-k-2}2^{m-k-1}}{\delta^{m-k-1}K^{m-k-1}} b_{4k+3} \quad (m=2, 3, \ldots)$$

$$E_{4m+4} = \frac{\delta}{2[(4m+5)!!]^2\varphi_{4m+4}} \sum_{k=0}^{m} \frac{[(4k+1)!!]^2\Omega^{m-k}2^{m-k+1}}{\delta^{m-k+1}K^{m-k+1}} b_{4k+1} \quad (m=0, 1, \ldots)$$

$$b_{4m+1} = -\frac{2D_2\Omega^m 2^m}{[(4m+1)!!]^2\delta^{m-1}K^m} + \frac{\delta^2}{2^2[(4m+1)!!]^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{[(4k-2)!!]^2\Omega^{m-k}2^{m-k+1}}{\delta^{m-k+1}K^{m-k+1}[(4k-1)!!]^2\varphi_{4k-2}} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{k-2} \frac{[(4l+3)!!]^2\Omega^{k-l-2}2^{k-l-1}}{\delta^{k-l-1}K^{k-l-1}} b_{4l+3} \quad (m=1, 2, \ldots)$$

$$b_{4m+3} = \frac{\delta^2}{[(4m+3)!!]^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{[(4k+4)!!]^2\Omega^{m-k-1}2^{m-k}}{\delta^{m-k}K^{m-k}(4k+5)\varphi_{4k+4}} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{k} \frac{[(4l+1)!!]^2\Omega^{k-l}2^{k-l+1}}{\delta^{k-l+1}K^{k-l+1}} b_{4l+1} \quad (m=1, 2, \ldots)$$

Бесконечная система уравнений, определяющая коэффициенты A и b_{2n}, получена из условия (9) при добавлении и интегрировании (10) с учетом (2), (12), (4). Эта система зависит от коэффициентов b_{2n+1} и E_{2n}, которые определяются независимо, имеет громоздкий вид и поэтому здесь не приводится. Согласно методу [1] она преобразуется к новым системам путем отыскания этих коэффициентов в виде:

$$A = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A_\mu}{K^\mu}, \quad b_{2n} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\mu n}}{K^\mu} \quad (n=0, 1, \ldots) \tag{13}$$

Для $\alpha_{\mu n}$ и A_μ получаем такую совокупность бесконечных систем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{0n}}{2n-2m-1} = \beta_{0m}=0 \quad (m=0, 1, \ldots) \tag{14}$$

$$A_0 = \frac{P}{2\pi}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\mu n}}{2n-2m-1} = \beta_{\mu m} \quad (m=0, 1, \ldots; \ \mu=1, 2, \ldots) \tag{15}$$

$$A_\mu=\frac{\sigma_\mu}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2s+1)!!}{(2s)!!}\beta_{\mu s}\quad (\mu=1,2,\dots)$$

Решение системы (14) есть $\alpha_{0n}=0$ $(n=0,1,\dots)$, а решение системы (15) имеет вид

$$\alpha_{\mu n}=\frac{2}{\pi}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2s+1)!!\beta_{\mu s}}{(2s)!!(2n-2s-1)}\quad (\mu=1,2,\dots;\ n=0,1,\dots)$$

Процедура вычисления $\beta_{\mu s}$ и σ_μ, которые быстро убывают, сложна и громоздка. Приведем только значения σ_1 и β_{1s}:

$$\beta_{10}=-0{,}1249P,\quad \beta_{11}=-0{,}09708P,\quad \beta_{12}=-0{,}04119P$$

$$\beta_{13}=-0{,}02686P,\quad \beta_{14}=-0{,}02002P$$

$$\beta_{1s}=-\frac{P}{4\pi s}-\frac{P(2s+2)!!}{2\pi(2s+1)!!(4s^2-1)2s(2s+2)}\quad (s=5,6,\dots)$$

$$\sigma_1=P/(3\pi)+0{,}0116\Omega P/\delta$$

Пользуясь величинами β_{13} и σ_1 получим

$$\alpha_{10}=0{,}1291P,\quad \alpha_{11}=0{,}02077P,\quad \alpha_{12}=-0{,}01955P,\quad \alpha_{13}=-0{,}01497P$$

$$\alpha_{14}=-0{,}01433P,\quad A_1=-0{,}00624P+0{,}0058\Omega P/\delta$$

Так как, благодаря выделению особенности реакции основания P вида $(1-\rho^2)^{-1/2}$, все ряды, входящие в решение, быстро сходятся, ограничимся следующими коэффициентами, определяющими p: A, b_0, b_2, b_4, b_6, b_8, b_1, b_3, E_0, E_2, E_4, E_6. Имеем $E_0=E_2=E_6=b_3=0$.

При любом K: $b_1=-P/(2\pi K)$, $E_4=P[2\pi K^2(5!!)^2\varphi_4]^{-1}$.

Согласно (13) при учете только β_{1s} имеем

$$A=A_0+A_1/K,\quad b_0=\alpha_{10}/K,\quad b_2=\alpha_{11}/K$$

$$b_4=\alpha_{12}/K,\quad b_6=\alpha_{13}/K,\quad b_8=\alpha_{14}/K$$

При $K=1$: $b_1=-0{,}1592P$, $E_4=0{,}002515P$, $b_0=\alpha_{10}$, $b_2=\alpha_{11}$, $b_4=\alpha_{12}$, $b_6=\alpha_{13}$, $b_8=\alpha_{14}$, $A=(0{,}153+0{,}0058\Omega/\delta)P$.

При $K=\infty$: $A=A_0$, $b_{2n}=b_{2n+1}=E_{2n}=0$ $(n=0,1,\dots)$.

Подставив найденные коэффициенты в выражение для реакции основания получим

$$p=e^{ikt}A(1-\rho^2)^{-1/2}+b_0+b_2\rho^2+b_4\rho^4+b_6\rho^6+b_8\rho^8+b_1\rho+E_4\rho^4\ln\rho)$$

Полученное решение справедливо для плит, для которых $K\geqslant 1/6$. При $k=0$ получаем решение статической задачи [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишкова А. Г., Безухова Н. Н.* Вынужденные колебания круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1972. Вып. 19. С. 196–203.
2. *Ишкова А. Г.* Задача об изгибе круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве, под действием сосредоточенной силы, приложенной в ее центре // Изв. вузов. Математика. 1958. № 6. С. 96–104.

Москва

Поступила в редакцию
16.X.1987