

ДЕФЕКТЫ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В двух статьях [1, 2]¹ излагаются основные положения так называемой эндохронной теории пластичности, а также указываются различные источники получения соответствующих определяющих соотношений: наследственная теория, интегральное представление функционала пластичности и дифференциальные формы типа стандартного линейного тела. Поскольку материал этих статей близок, то следующие рассуждения критического характера относятся к обеим статьям за исключением специально оговоренных случаев.

Авторы статей знакомят широкого читателя с идеей об одной специфической трактовке необратимого деформирования, задуманной как эквивалент пластического поведения — эндохронной теорией пластичности. Под термином «эндохронная теория пластичности», предложенным Валанисом [3], скрывается всего лишь замена естественного времени в наследственной теории Вольтерра некоторым параметром нагружения (деформирования) — «внутренним временем». Этот термин авторы употребляют при описании пластического поведения материала единым для любых процессов соотношением, и, вероятно, здесь более уместным был бы термин «аналитическая теория пластичности», использованный в первой попытке подобного рода [4]. Что касается отказа от концепции предельных поверхностей, присущих классической пластичности, то это можно по желанию рассматривать и как основу эндохронной теории пластичности, и как ее следствие.

Напомним также, что опыт аналитического описания необратимых деформаций, подобно пластическим, не зависящих от скорости проведения процесса, давно известен — это теория гипопругости (см., например, [5]). Таким образом обзорные части обеих обсуждаемых работ имеют явные недостатки, а ссылка на [3], как на первую работу данного направления неправомерна². Опушен, к тому же, очень важный, особенно в проблеме определяющих соотношений, вопрос: в чем необходимость создания новой модели, чем не устраивают авторов существующие теории? Во всяком случае, это, по-видимому, не стремление описать явление «нырка» (других эффектов сложного нагружения рассматриваемые работы не касаются). Это явление описывается любой из известных моделей сингулярной пластичности (с особенностями на предельных поверхностях).

Может быть к достоинствам эндохронной теории пластичности относится простота? Тут действительно усматривается привлекательный момент. В рамках теории без предельных поверхностей при решении конкретных краевых задач отпадает необходимость в отыскании границы раздела областей с разными законами деформирования. Именно такая аргументация выдвигалась в [4], причем автор осознал, что расплатой за такую аналитическую аппроксимацию теории течения будет неустраиваемая дифференциальная нелинейность в связи напряжений и деформацией. Такая же ситуация, приводящая в краевых задачах к необходимости решения слабо изученных в математическом плане уравнений даже в пошаговом методе³, имеет место в каждом из вариантов определяющих соотношений обсуждаемых статей, и хотя авторами не отмечается, подрывает возможную аргументацию в простоте.

В то же время в рамках сингулярной пластичности, способной не только качественно, но и количественно описать известные к настоящему времени эффекты пластичности (см., например, [10]), присутствующая дифференциальная нелинейность является устранимой [11]. Она проявляется лишь в точках излома процессов, нескругляемость в которых существенна только в задачах устойчивости. Но тут вступает в силу уже своя специфика [11], которая просто выключает возможность появления нужных для нелинейности догрузок.

Причиной пропаганды теории пластичности без предельных поверхностей могла бы быть известная (см. [12]) размытость результатов экспериментов по определению области упругого поведения материала после предварительного пластического деформирования. Но это естественно для применяемых программ (разгрузка и последующее нагружение) с множеством образцов и с целью выявления начальной точки плавного перехода процесса в новое качественное состояние. Неоспоримым же является факт существования целого пучка мгновенных упругих догрузок из любого упругоупругого состояния, а следовательно, по крайней мере, малой, прилегающей к точке догрузки части поверхности нагружения. А поскольку в этом пучке должны действовать дифференциально-линейные соотношения, то любое соотношение эндохронной теории пластичности является заведомой аппроксимацией действительной ситуации, и может быть как приемлемой, так и нет.

¹ См. статьи *Кадашевича Ю. И., Мосолова А. Б. и Динариева С. Ю., Мосолова А. Б.* на с. 161—175 этого номера журнала.

² Вопрос о теории пластичности без поверхности нагружения авторы связывают с работой [6] без достаточных оснований. Имеющиеся там упоминания о такой поверхности критикой не сопровождаются, а в последующих работах [7, 8] поверхность нагружения заложена в основу исследования.

³ Критика неустраиваемой дифференциальной нелинейности в пластических телах на основе принципиальных положений содержится в [9].

В современных исследованиях по проблеме определяющих соотношений наряду с требованием согласованности с тем ограниченным набором экспериментальных данных, которые известны к данному моменту, должны быть удовлетворены общезначимые требования. В пластичности, среди прочих, к таким можно отнести постулат пластичности [7], термодинамическая природа которого выявлена в [13], постулат устойчивости [9], и принцип макродетерминизма [14], невыполнение которых, по крайней мере, для изотермических процессов, может привести к абсурдным результатам. В [1, 2] признается, что в эндохронной теории пластичности первые два требования могут не выполняться, хотя критика на этот счет известна [15]. Отметим, что последствие нарушения этих требований в эндохронной теории пластичности должны усугубляться по сравнению с обычной теорией пластичности, где повтор известных циклов, разрешенный в эндохронной теории пластичности, отсекается наличием предельных поверхностей.

Подробнее остановимся на третьем требовании, поскольку оно не упоминается в [1, 2]. Это требование проистекает из всегда предполагаемой экспериментатором закономерности, состоящей в том, что малая ошибка в проведении программы эксперимента приведет к малой погрешности в результате. Впервые это положение было формализовано в [16] следующим образом. Если для двух близких путей нагружения установлено взаимно однозначное соответствие так, что расстояние между соответствующими точками меньше δ , то расстояние между отвечающими точками полученных путей деформирования будет меньше η , зависящего только от δ и стремящегося к нулю вместе с последним.

Это утверждение отражает, по существу, принцип макродетерминизма [14] — возможность выявления закономерностей на уровне макроопыта. Введение такого термина обусловлено тем, что в отличие от общезначимой концепции детерминизма — принципиальной возможности познания закономерностей, происходящих в природе явлений, макроопыт, лежащий в основе механики сплошной среды, обладает ограниченной «разрешающей способностью». При проведении макроопыта экспериментатор может гарантировать только то, что задаваемый процесс (например, процесс нагружения) лежит в некоторой трубке ϵ , а контроль за детальным его поведением внутри этой трубки экспериментатору недоступен.

В практике проведения макроопыта неявная убежденность в справедливости указанного требования довольно часто используется при замене гладкого процесса более просто осуществляемым ступенчатым. В теории оно, как очевидное для специальных процессов, близких к нейтральному нагружению (под названием условия непрерывности), закладывалось в основу теории течения [17]. Его эвристическая ценность, в приведенной выше полной трактовке, была продемонстрирована в [16, 18] при построении варианта сингулярной пластичности. В дальнейшем [14, 19] оказалось возможным указать ряд ограничений, накладываемых принципом макродетерминизма на форму и параметры определяющих соотношений пластичности.

Среди таких ограничений наиболее очевидным является недопустимость в качестве параметра нагружения (деформирования) длины дуги траектории нагружения или деформирования и, без надлежащего усреднения, ее кривизны. Менее очевидно, но легко доказуема [19] несостоятельность модели гипотупругости и аналитического варианта теории изотропного упрочнения [4]. В обоих случаях для любого пути нагружения (деформирования) можно указать близкий, с существенно различающимися результирующими характеристиками. И если в лабораторных условиях еще возможны какие-то специальные приемы нивелирующие этот дефект, то достоверность расчета конструкции, работающей в реальных условиях, на основании таких моделей гарантировать невозможно.

Вследствие принятия параметров деформирования типа набора, отмеченного выше, и отсутствия «выключателей» режимов деформирования, основой для которых являются предельные поверхности, очевидно, что обсуждаемые модели эндохронной теории пластичности так же не удовлетворяют требованию макродетерминизма. Демонстрацию этого дефекта и его последствий проведем на примере соотношений (2.5) в [1] и (5.1) в [2], причем в последнем варианте, ради простоты, ограничимся случаем трансляционного упрочнения с упругой разгрузкой ($\beta = \rho = 0$), для которого легко проверяются условия устойчивости из [1]. Таким образом, будем иметь дело с соотношениями

$$d\sigma = Ede - \alpha\sigma |de - \chi d\sigma/E| \quad (1)$$

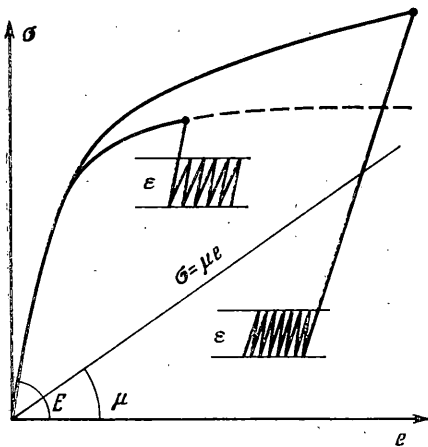
и (с заменой $\alpha \rightarrow \omega$ в (5.1)):

$$d\sigma = Ede - \omega(\sigma - \mu\epsilon) \cos^2 \nu (\theta/2) ds \quad (2)$$

В [1] сообщается, что соотношение (1) допускает циклическую ползучесть и релаксацию. Это означает, например, что даже в разгруженном до некоторого состояния упругопластическом теле (в области упругого поведения по классической теории пластичности) малые колебания нагрузки вызывают рост деформации (циклическая ползучесть по терминологии авторов, хотя ползучесть в обычном смысле отсутствует). Действительно, например, при простом растяжении на основании (1) при $d\sigma > 0$ и $d\sigma < 0$ имеем, соответственно

$$\frac{d\sigma}{de} = E \frac{1 - \alpha\sigma/E}{1 - \chi\sigma/E}, \quad \frac{d\sigma}{de} = E \frac{1 + \alpha\sigma/E}{1 + \chi\sigma/E} \quad (3)$$

и поскольку (хотя об этом и не говорится) для реальных материалов коэффициент α существенно больше единицы, а для χ установлен диапазон $0 \leq \chi \leq 1$, то наклон участков для $d\sigma > 0$ меньше наклона участков для $d\sigma < 0$. В результате при постоянном среднем значении σ и малой амплитуде $\varepsilon/2$ его колебаний имеем пилообразный участок на диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$, подобный тому, что изображен в верхней части фигуры.



Очевидно, что в независимости от $\varepsilon > 0$ можно накопить в таком процессе какую угодно деформацию, но эта возможность пропадает при $\varepsilon = 0$, т. е. при $\sigma = \text{const}$. Такое поведение материала с позиций макродетерминизма недопустимо, и хотя в [1] утверждается, что оно согласуется (для невязких материалов) с экспериментом, в это трудно поверить.

Еще более абсурдный результат следует из соотношения (2). При простом растяжении — сжатии $\cos(\theta/2)$ принимает значения 1 и 0, и вместо (3) имеем $d\sigma/de = -E - \omega(\sigma - \mu\varepsilon)$, $d\sigma/de = E$. Поскольку, очевидно, что $\omega > 1$, $\mu < E$, то в области $\sigma > \mu\varepsilon$ ситуация с колебаниями σ будет подобна разобранной выше. Но после разгрузки в область $\sigma < \mu\varepsilon$ в результате колебаний σ при $\sigma > 0$ должно наблюдаться падение деформаций (нижняя часть фигуры) — дефект модели, который не требует комментариев.

Все это, как видно, обнаруживается уже для простейших процессов, и можно предвидеть, что попытки устранить отмеченные дефекты эндохронной теории пластичности для некоторого класса процессов в целом не приведут к успеху. Использование такой теории при обычном детерминистском подходе для решения краевых и начальных задач может привести к непредсказуемым последствиям. Возможно однако, что для сплошных сред в состоянии неустойчивости, подобно турбулентности, при стохастической постановке проблемы соотношения обсуждаемого типа могут оказаться полезными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадашевич Ю. И., Мосолов А. Б. Эндохронные теории пластичности: Основные понятия, перспективы развития // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 161.
2. Динариев С. Ю., Мосолов А. Б. О виде функционала пластичности в теории упруго-пластических процессов // Изв. АН СССР. МТТ. № 1. С. 169.
3. Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt. 1–2. // Arch. Mech. Stosow. 1971. V. 23. No. 4. P. 517–551.
4. Ключников В. Д. Аналитическая теория пластичности // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 82–87.
5. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 341 с.
6. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 6. С. 641–666.
7. Ильюшин А. А. О приращении пластической деформации и поверхности текучести // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 663–666.
8. Ильюшин А. А. Об основах общей математической теории пластичности // В кн.: Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 3–29.
9. Drucker D. A definition of stable inelastic material // J. Appl. Mech. 1959. V. 26. No. 1. P. 101–106.
10. Попов Л. Г. Обобщение модели пластичности Работнова на пятимерное пространство девиаторов // Изв. АН МТТ. 1987. № 5. С. 126–134.
11. Ключников В. Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
12. Ленский В. С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ. 1978. Вып. 5. С. 65–96.
13. Ключников В. Д. Три идеи Ильюшина А. А.: Трактовки и современное значение // Проблемы механики деформируемого твердого тела // Калинин: Калининский ун-т, 1986. С. 34–41.
14. Ключников В. Д. О допустимых формах соотношений пластичности // Докл. АН СССР. 1980. Т. 255. № 1. С. 57–59.
15. Rivlin R. S. Some comments on the endochronic theory of plasticity // Intern. J. Solid and Struct. 1981. V. 17. No. 2. P. 231–248.
16. Ключников В. Д. О законах пластичности для частного класса путей нагружения // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 533–543.
17. Handelman G. H., Lin C. C., Prager W. On the mechanical behaviour of metals in the strain-hardening range // Quart. Appl. Mech. 1947. V. 4. No. 4. P. 397–407.

18. Ключников В. Д. О возможном пути построения соотношений пластичности // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 282–291.
19. Ключников В. Д. Возможности макроопыта и форма определяющих соотношений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 3. С. 578–580.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1988

УДК 539.214;539.374

О. Ю. ДИНАРИЕВ, Ю. И. КАДАШЕВИЧ, А. Б. МОСОЛОВ

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Название эндохронная теория пластичности устоялось в мировой литературе и на наш взгляд отвечает существу дела, поэтому замена его на весьма расплывчатое — аналитическая теория пластичности вряд ли оправдана. Вопрос о месте работы [4]¹ заслуживает отдельного рассмотрения, поскольку сам автор неоднократно указывал на ее недостатки, что не позволяло использовать предложенные в [4] соотношения в качестве рабочего варианта теории пластичности.

Функциональный подход теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина по сути своей не нуждается в использовании понятия поверхности текучести. Именно с работ этого направления началось рассмотрение аналитических теорий пластичности. Сходство функционалов эндохронной теории и функционалов теории упругопластических процессов очевидно, отметим только, что в последнем случае в качестве параметра используется не внутреннее время, а длина дуги траектории деформации (именно ею определяется свойство запаздывания).

Эндохронная теория конечно же удовлетворяет всем известным общефизическим требованиям и совместима с термодинамикой [3], но «квазитермодинамические» постулаты (типа постулата Драккера) в этой теории действительно могут нарушаться. Постулат пластичности [7] не может быть выведен в рамках классической термодинамики, вывод же его на основе обобщенной термодинамики, предложенный в [13] ошибочен, поскольку при принятом в [13] выборе параметров состояния соответствующие процессы являются неравновесными. Если расширить множество определяющих параметров, то рассуждения [13] теряют смысл.

По поводу принципа макродетерминизма следует отметить, что он налагает весьма жесткие ограничения на вид функционала пластичности (фактически требуется непрерывность этого функционала по норме C^0). Это приводит к далеко идущим последствиям. Например, аналитические функционалы пластичности, удовлетворяющие макродетерминизму, оказываются зависящими только от начальной и конечной точек траектории деформации, свойство запаздывания (как оно обычно понимается в теории упругопластических процессов) может и не выполняться, «запрещенными» оказываются не только теории эндохронного типа (как и функционалы теории упругопластических процессов), но и другие варианты теории пластичности, в частности, полумикроскопическая теория и вообще теории скольжения. Однако все эти теории хорошо описывают эксперименты на сложное нагружение. На наш взгляд, макродетерминизм в качестве претендента на роль общефизического принципа нуждается в тщательной прямой экспериментальной проверке.

Эффекты циклической ползучести и релаксации известны и наблюдаются в экспериментах и с этой точки зрения не могут быть основанием для критики теории, скорее наоборот свидетельствуют в ее пользу. Вопрос лишь в том, удастся ли правильно описать эти эффекты в эндохронной теории.

Конечно эндохронная теория не свободна от недостатков и конструктивный критический анализ ее можно только приветствовать. Теория эта находится в процессе развития и если того потребуют опытные данные, в нее необходимо внести соответствующие коррективы. В этом смысле сомнения, высказанные в статье В. Д. Ключникова могут быть полезны.

¹ Ссылки даются по списку литературы статьи Ключникова В. Д., публикуемой в этом номере.