**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989**

УДК 531.383

В. Н. КОМАРОВ

О ДВИЖЕНИИ ПРОВОДЯЩЕГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Практически задача о раскрутке ротора гироскопа и эволюции его кинетического момента может решаться за счет использования различных моментных взаимодействий ротора с внешними полями – электрическими и магнитными [1–2]. Управление гироскопом с электростатическим подвесом проводящего ротора предлагается осуществлять с помощью единого механизма взаимодействия ротора с вращающимися магнитными полями, создаваемыми тремя взаимно перпендикулярными круговыми статорами. Управляя работой этих статоров – амплитудой токов, направлением вращения полей, интервалами их включения – можно получить желаемые характеристики движения гироскопа: частоты вращения ротора, угол нутации, величину и начальную ориентацию кинетического момента относительно подвеса.

1. Считая ротор гироскопа идеально сбалансированным и устойчиво вывешенным в поле подвеса, введем правые ортогональные трехгранники OZ_k, OY_j и OX_i с общим началом в неподвижном центре масс ротора, совпадающим с центром подвеса. Направим ось OZ_3 трехгранника OZ_k, жестко связанного с неподвижным подвесом, вдоль направления вращения поля $\mathbf{H}_3$, отвечающего за раскрутку ротора, вдоль кинетического момента $\mathbf{L}$ которого направлена ось OY_3. Оси трехгранника OX_i направим вдоль главных осей эллипсоида инерции ротора с полярной осью OX_3.

Взаимную ориентацию трехгранников OZ_k и OY_j зададим матрицей перехода A с элементами a_{jk}: $\mathbf{y}_j=\Sigma a_{jk}\mathbf{z}_k$ ($\mathbf{z}_k$, $\mathbf{y}_j$ и $\mathbf{x}_i$ — орты соответствующих осей). Ориентацию ротора, а с ним и трехгранника OX_i, относительно OY_j зададим матрицей B: $\mathbf{x}_i=\Sigma b_{ij}\mathbf{y}_j$, элементы которой зависят от углов Эйлера ψ, θ и φ. Для перехода от системы координат OY_j к OX_i необходимо совершить последовательные повороты на углы ψ, θ и φ по правилу: $B=B_\psi^{(3)}B_\theta^{(2)}B_\varphi^{(3)}$, где $B_\alpha^{(i)}$ — матрица ориентации трехгранников, получаемая поворотом на угол α вокруг i-й оси [3].

В качестве уравнений движения используем основное уравнение гироскопии, записанное в неподвижной системе координат OZ_k: $d\mathbf{L}/dt=\mathbf{M}$ и кинематические соотношения $\mathbf{L}\cdot\mathbf{x}_i=Lb_{i3}=J_i\Omega_i$, разрешенные относительно величин $\psi^\cdot$, $\theta^\cdot$ и $\varphi^\cdot$.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\tau=\Omega_0 t,\quad l=L(J\Omega_0)^{-1},\quad J=2J_1J_2(J_1+J_2)^{-1}$$

$$\omega=\Omega\Omega_0^{-1},\quad m=MM_0^{-1},\quad \varkappa=J_3/J-1$$

$$\delta=(J_2-J_1)/(J_2+J_1),\quad \mu=MJ^{-1}\Omega_0^{-2}$$

где Ω_0 — некоторая характерная частота системы, а M_0 — максимальное значение внешнего момента. Уравнения движения примут вид

$$\mathbf{l}^\cdot\cdot\mathbf{z}_k=\mu\mathbf{m}\cdot\mathbf{z}_k \tag{1.1}$$

$$\theta^\cdot+\delta l\sin\theta\sin 2\varphi=-\mu l^{-1}[\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_1\cos\psi+\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_2\sin\psi]$$

$$\varphi^\cdot+l[\varkappa(1+\varkappa)^{-1}+\delta\cos 2\varphi]\cos\theta=-\mu(l\sin\theta)^{-1}[\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_1\sin\psi-\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_2\cos\psi]$$

$$\psi^\cdot-l(1+\delta\cos 2\varphi)=\mu l^{-1}[\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_1\sin\psi-\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_2\cos\psi]\operatorname{ctg}\theta-\mu\omega_3$$

позволяющий при малых μ использовать асимптотические методы, и, в частности, метод усреднения [4, 5]. В последнем уравнении $\mu\omega_3$ — проекция на ось OY_3 угловой скорости вращения системы координат OY_j относительно неподвижной OZ_k. Если, например, взаимная ориентация этих трехгранников задается сферическими углами ρ и σ, то $\omega_3=\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_2 \operatorname{ctg} \rho/l$, при использовании углов Эйлера — Крылова α и β получим $\omega_3=\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_1 \operatorname{tg} \beta/l$.

Рассматривая взаимодействие ротора с вращающимися магнитными полями, которые предполагаются однородными, а вклады их моментов аддитивными, будем считать, что его динамические свойства определяются распределением диэлектрических масс внутри однородной сферической проводящей немагнитной оболочки, движущейся в идеальном вакууме. При выполнении условий применимости квазистационарной теории электромагнитного поля действующий на ротор момент достаточно хорошо описывается выражением [6]:

$$\mathbf{M}=\alpha\mathbf{H}\times(\mathbf{H}\times\mathbf{\Omega}+d\mathbf{H}/dt)=(\alpha H^2\Omega_0)\mathbf{h}\times(\mathbf{h}\times\boldsymbol{\omega}+\mathbf{h}^{\cdot}) \qquad (1.2)$$

Свяжем с ортом вращающегося магнитного поля $\mathbf{h}$ трехгранник Ou_n так, что $\mathbf{h}=\mathbf{u}_1\cos\sigma+\mathbf{u}_2\sin\sigma$ ($\sigma=\nu\tau$).

Подставляя компоненты поля в выражение для момента (1.2), усредним его по явно входящему времени или углу σ, в результате чего для нерезонансного случая получим

$$\langle\mathbf{m}\rangle_\sigma=m\{\nu\mathbf{u}_3-{}^1/_2[\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3]\} \qquad (1.3)$$

Неподвижность векторов $\mathbf{l}$ и $\boldsymbol{\omega}$ относительно подвеса возможна лишь при их совмещении и вращении ротора вокруг одной из главных осей эллипсоида инерции, устойчивым же является вращение вокруг оси с наибольшим моментом инерции.

Раскрутка ротора с произвольным эллипсоидом инерции рассмотрена в [7].

2. Из выражения (1.3) следует, что действующий на тело постоянный раскручивающий момент $m\nu$ направлен вдоль оси вращения поля $\mathbf{u}_3$. Очевидно, что если бы можно было менять положение орта $\mathbf{u}_3$ относительно подвеса, то тем самым можно было бы менять и конечную ориентацию вектора $\mathbf{l}$. Этого же результата можно добиться, используя три взаимно ортогональных статора с $\mathbf{u}_n=\mathbf{z}_k$. Обозначим амплитуды моментов и частоты вращения полей через m_k и ν_k соответственно.

Так как применительно к роторам гироприборов параметр δ обусловлен лишь неточностью изготовления и достаточно мал, заменим его на $\mu\delta$, что позволяет использовать для уравнений (1.1) в качестве порождающего решение, характеризующееся константами l, θ, $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$. Усредняя эти уравнения по явно входящему времени или углам $\sigma_k=\nu_k\tau$ и переменной ψ придем к следующей системе укороченных уравнений (здесь и далее суммирование по k):

$$l_k^{\cdot}=\mu[m_k\nu_k-{}^1/_2(M+m_k)(1+\varkappa\sin^2\theta)(1+\varkappa)^{-1}l_k]$$

$$\theta^{\cdot}=-\mu[\delta l\sin 2\varphi+{}^1/_4\varkappa(1+\varkappa)^{-1}\cos\theta\Sigma m_k(3-a_{3k}^2)]\sin\theta \qquad (2.1)$$

$$\varphi^{\cdot}=-l[\varkappa(1+\varkappa)^{-1}+\mu\delta\cos 2\varphi]\cos\theta \quad (M=\Sigma m_k)$$

Если $\theta\neq\pi/2$, систему уравнений (2.1) можно усреднить и по углу φ. Тогда

$$\theta^{\cdot}=-{}^1/_4\mu\varkappa(1+\varkappa)^{-1}g^2(\tau)\sin\theta\cos\theta \qquad (2.2)$$

$$\operatorname{tg}\theta(\tau)=\operatorname{tg}\theta(0)\exp\left[-{}^1/_4\mu\varkappa(1+\varkappa)^{-1}\int_0^\tau g^2(\xi)\,d\xi\right]$$

При любой зависимости $a_{3k}(\tau)$ имеем $a_{3k}^2\leqslant 1$ и, следовательно

$$2M<g^2(\tau)=\Sigma m_k(3-a_{3k}^2)<3M \qquad (2.3)$$

Это приводит к тому, что для роторов со сплюснутым эллипсоидом инерции ($\varkappa>0$) в зависимости от начальных условий $\theta(\tau)$ стремится к $\theta^*=0$ или $\theta^*=\pi$. При вытянутом эллипсоиде инерции ($\varkappa<0$) угол нутации вне зависимости от начальных условий стремится к $\theta^*=\pi/2$.

С другой стороны, из (2.1) следует, что при $\theta=\pi/2$ $\varphi^\cdot=0$, а равновесные значения $\varphi_n^*=\pi n/2$. В линейном приближении по малым переменным $\xi_1=\theta-\theta^*$ и $\xi_2=\varphi-\varphi_n^*$ вблизи состояния равновесия $\xi_1=\xi_2=0$ движение описывается уравнениями

$$\xi_1^\cdot=\mu[{}^1/_4\varkappa(1+\varkappa)^{-1}g^2(\tau)\xi_1-2\delta l^*(-1)^n\xi_2]$$

$$\xi_2^\cdot=l^*[\varkappa(1+\varkappa)^{-1}+\mu\delta(-1)^n]\xi_1$$

где l^* — определяемое ниже равновесное значение вектора $\mathbf{l}$. Повторное дифференцирование второго из них с точностью до членов порядка $0(\mu^2)$ приводит к уравнению

$$\xi_2^{\cdot\cdot}-\mu\varkappa(1+\varkappa)^{-1}[{}^1/_4g^2(\tau)\xi_2^\cdot-2\delta(l^*)^2(-1)^n\xi_2]=0 \qquad (2.4)$$

Используя для исследования его устойчивости известные соотношения для неавтономных уравнений [9] и учитывая решение (2.2), можно сделать вывод, что как и при воздействии лишь одного статора, вращение вокруг оси с наибольшим моментом инерции асимптотически устойчиво, а вокруг промежуточной и наименьшей осей — неустойчиво — (состояния равновесия типа «седло» и «неустойчивый фокус»).

Из уравнений (2.1) следует, что стремление ротора к вращению вокруг оси с наибольшим моментом инерции сопровождается асимптотическим движением вектора $\mathbf{l}$ к равновесному положению, определяемому выражениями

$$l^*=2\gamma^{-1}\{\Sigma[m_k\nu_k/(M+m_k)]^2\}^{1/2}$$

$$l_k^*=2m_k\nu_k[\gamma(M+m_k)]^{-1}=l^*a_{3k}^*,\quad \gamma=(1+\varkappa\sin^2\theta^*)(1+\varkappa)^{-1}$$

$$a_{3k}^*=m_k\nu_k(M+m_k)^{-1}\{\Sigma[m_k\nu_k/(M+m_k)]^2\}^{-1/2}$$

В соответствии с изложенным выше при $\varkappa>0$: $\theta^*=\pi n$ и $\gamma=(1+\varkappa)^{-1}$; при $\varkappa<0$: $\theta^*=\pi/2$ и $\gamma=1$.

Для того, чтобы переход вектора $\mathbf{l}$ из начального положения $\mathbf{l}_1$ в заданное $\mathbf{l}_2$ совершался за конечное время, необходимо величины m_k и знаки ν_k выбирать таким образом, чтобы положение $\mathbf{l}_2$ было не финитным, а промежуточным.

Будем считать, что угол нутации близок к равновесному значению θ^* и рассмотрим в качестве примера перемещение из $\mathbf{l}_1$ в $\mathbf{l}_2$, совершаемое вдоль ломаной с участками, параллельными осям OZ_k. При этом вектор $\mathbf{l}$ проходит последовательно через точки с координатами (l_{p1}, l_{q1}, l_{r1}), (l_{p2}, l_{q1}, l_{r1}), (l_{p2}, l_{q2}, l_{r1}), (l_{p2}, l_{q2}, l_{r2}). Для первого перехода из (l_{p1}, l_{q1}, l_{r1}) в (l_{p2}, l_{q1}, l_{r1}) за время T_p необходимо амплитуды моментов сделать равными

$$m_p=(\mu\lambda_pT_p)^{-1}\ln[(\nu_p-\lambda_pl_{p1})/(\nu_p-\lambda_pl_{p2})]$$

$$m_q=\gamma m_pl_q(2\nu_r-\gamma l_r)\Delta^{-1},\ m_r=\gamma m_pl_r(2\nu_q-\gamma l_q)\Delta^{-1}$$

$$\lambda_p=\gamma[2\gamma^2l_ql_r-3\gamma(\nu_ql_r+\nu_rl_q)+4\nu_q\nu_r]\Delta^{-1}$$

$$\Delta=4(\nu_q-\gamma l_q)(\nu_r-\gamma l_r)-\gamma^2l_ql_r$$

Для последующих переходов аналогичные выражения получаются из приведенных путем циклической перестановки индексов p, q, r.

3. Рассмотрим возможность управления посредством этих же моментов движением самого ротора гироскопа. В частном случае это может быть задача гашения нутации за конечное время [2], в общем же случае — это получение заданных θ и $\varphi^\cdot$ при известной величине $\psi^\cdot$. Реальное управление заключается в придании ротору определенной угловой скорости вдоль оси OX_3, что осуществляется при помощи момента $m_c=\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_1\cos\psi+$ $+\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}_2\sin\psi=\mathbf{m}\cdot(\mathbf{x}_3-\mathbf{y}_3\cos\theta)(\sin\theta)^{-1}$, сформированного из раскручивающей части $m\nu\mathbf{u}$ момента (1.3), не зависящей от угловой скорости враще-

ния ротора. Для произвольно ориентированного статора с $\mathbf{u}=\mathbf{u}_n$ компонента m_c имеет вид

$$m_c=\nu m_n[1-(\mathbf{u}_n\cdot\mathbf{y}_3)^2]^{1/2}\cos(\psi-\psi_n),\quad \psi_n=\operatorname{arctg}[(\mathbf{u}_n\cdot\mathbf{y}_2)/(\mathbf{u}_n\cdot\mathbf{y}_1)]$$

и не будет менять своего знака, если менять направление вращения поля ν по закону: $\nu(\psi)=\nu$ при $-\pi/2+2k\pi<\psi-\psi_n<\pi/2+2k\pi$ и $\nu(\psi)=-\nu$ при $\pi/2+2k\pi<\psi-\psi_n<3\pi/2+2k\pi$. При этом $\operatorname{sign} m_c=\operatorname{sign}\nu$. Естественно, что для практической реализации алгоритма необходимо иметь информацию об угле ψ. Ее можно получить, используя, например, оптикоэлектронные датчики и специальную маркировку ротора или при наличии несферичности ротора выделить из каналов управления вывеской ротора.

Будем использовать в качестве управляющих статоры с $\mathbf{u}_1=\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{u}_2=\mathbf{z}_2$ или $\mathbf{u}_n=\mathbf{z}_1\cos\alpha_n+\mathbf{z}_2\sin\alpha_n$, $\alpha_n=(n-1)\pi/2$ $(n=1,\ 2)$. При совмещении вектора $\mathbf{l}$ с осью подвеса OZ_3 можно положить $\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{y}_1=\mathbf{z}_2\cdot\mathbf{y}_2=\cos\alpha$ и тогда алгоритм управления примет вид

$$\begin{aligned}\nu_n(\psi)&=\nu\ (-\pi/2+2k\pi<\psi+\alpha-\alpha_n<\pi/2+2k\pi)\\ \nu_n(\psi)&=-\nu\ \ (\pi/2+2k\pi<\psi+\alpha-\alpha_n<3\pi/2+2k\pi)\end{aligned}\tag{3.1}$$

т. е направление вращения полей управления меняется дважды за период вращения по углу ψ при пересечении полярной осью ротора OX_3 плоскости статора управления. Сохраним этот закон управления и для произвольной ориентации вектора $\mathbf{l}$ относительно подвеса, когда $\mathbf{y}_3\cdot\mathbf{z}_3\neq1$. Для компенсации возникающего при управлении тормозящего момента оставим работающим и основной статор раскрутки с $\mathbf{u}=\mathbf{z}_3$, $\nu_3=\nu_0$.

Если ввести в рассмотрение комплексную величину $z=l(a_{31}+ja_{32})$, характеризующую проекции $\mathbf{l}$ на плоскость Z_1OZ_2, то эволюционное движение кинетического момента $\mathbf{l}$ после усреднения моментов по углам σ_n и ψ будет (как и ранее в нерезонансном случае) описываться уравнениями

$$\begin{aligned}z^{\cdot}&=-{}^1/_2\mu(m+3n)(1+\varkappa\sin^2\theta)(1+\varkappa)^{-1}z\\ l^{\cdot}&=\mu\{m\nu_0a_{33}-{}^1/_2[m+3n+(m-n)a_{33}^2](1+\varkappa\sin^2\theta)(1+\varkappa)^{-1}l\}\end{aligned}\tag{3.2}$$

где $m=m_3$, $n=m_1=m_2$ — амплитуды подкручивающего и управляющего моментов. Движение ротора при этом подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned}l\theta^{\cdot}&=-\mu\{\delta l^2\sin\theta\sin2\varphi+2n\nu\pi^{-1}(1+a_{33}^2)\operatorname{sign}\sin\theta+\\ &+{}^1/_4[3m+5n-(m-n)a_{33}^2]\varkappa l(1+\varkappa)^{-1}\sin\theta\cos\theta\}\\ \varphi^{\cdot}&=-l[\varkappa(1+\varkappa)^{-1}+\mu\delta\cos2\varphi]\cos\theta\end{aligned}\tag{3.3}$$

Из уравнений (3.2) следует, что при произвольной зависимости $\theta(\tau)$ вектор $\mathbf{l}$ монотонно стремится к совмещению с осью подвеса OZ_3, не меняя азимутального угла $a_{31}(\tau)/a_{32}(\tau)=\mathrm{const}$. Уравнение для угла ψ не выписывается, т. к. его решение, как и ранее, находится простым интегрированием.

Если $|z|\ll1$, то $a_{33}^2\sim1$ и первое из уравнений в (3.2) отщепляется от остальных, которые после перехода к новым переменным и параметрам $\tau^{\vee}=\omega_0\tau$, $k=l\omega_0^{-1}$, $\omega_0=(m+n)/(1+\varkappa)$, $\omega=m\nu_0/\omega_0^2$, $\lambda={}^1/_2(m+3n)/(m+n)$, $v=4n\nu/(\pi\omega_0^2)$, $(v\gtrless0)$ принимают вид

$$\begin{aligned}k^{\cdot}&=\mu[\omega-k(1+\varkappa\sin^2\theta)]\\ k\theta^{\cdot}&=-\mu(\delta k^2\sin\theta\sin2\varphi+v\operatorname{sign}\sin\theta+\varkappa\lambda k\sin\theta\cos\theta)\\ \varphi^{\cdot}&=-k[\varkappa(1+\varkappa)^{-1}+\mu\delta\cos2\varphi]\cos\theta\end{aligned}\tag{3.4}$$

Нетрудно видеть, что при любых начальных условиях и параметрах в сферической системе координат $\{\sqrt{k},\theta,\varphi\}$ с радиусом $\sqrt{k}$, долготой φ и полярным углом θ финитным для системы (3.4) является движение по эллипсоиду вращения

$$(\sqrt{k})^2=\omega(1+\varkappa\sin^2\theta)^{-1}\tag{3.5}$$

с полуосями $a=b=[\omega(1+\varkappa)^{-1}]^{1/2}$, $c=\omega^{1/2}$.

Полную информацию о характере всех возможных движений динамической системы (3.4) дает изучение основных особенностей ее фазового портрета: числа, взаимного расположения и устойчивости особых траекторий — состояний равновесия и предельных циклов, поведения сепаратрис.

Прежде всего отметим наличие стационарного вращения ротора при $\theta=\pi n$. Хотя правая часть уравнения для $\theta^{\cdot}$ в (3.4) не определена при $v\neq\neq 0$ и $\theta=\pi n$, характер движения в сколь угодно малой окрестности этой точки легко проследить. Без управления ($v=0$) это вращение устойчиво при $\varkappa>0$ и неустойчиво при $\varkappa<0$. При управлении ($v\neq 0$) вне зависимости от вида эллипсоида инерции или знака $\varkappa$ вращение с $\theta=0$ устойчиво при $v>0$, а с $\theta=\pi$ — при $v<0$. Таким образом, возможны не только стабилизация вращения ротора вокруг оси с наименьшим моментом инерции ($\varkappa<0$), но и выбор направления вращения вокруг этой оси. Кроме того, приход к режиму стационарного вращения вокруг оси OX_3 из любых начальных условий осуществляется за конечное время, что следует из второго уравнения в (3.4).

В силу того, что $|\mu\delta|<|\varkappa/(1+\varkappa)|$, из третьего уравнения в (3.4) следует, что состояния равновесия $R^*(k^*, \theta^*, \varphi^*)$ могут существовать лишь в экваториальной плоскости ротора или на экваторе динамического эллипсоида (3.5) при $\theta^*=\pi/2$, когда

$$k^*=\omega/(1+\varkappa),\ \sin 2\varphi^*=s=-v\,[(1+\varkappa)/\omega]^2/\delta \tag{3.6}$$

При заданных моментах m и n эти состояния равновесия существуют лишь для роторов, эллипсоид инерции которых отличается от эллипсоида вращения и для которых выполняется неравенство

$$|\delta|\geqslant|v|\,[(1+\varkappa)/\omega]^2=4/\pi n|\nu|\,[(m+n)/m\nu_0]^2 \tag{3.7}$$

При достаточно малых значениях $|s|$ имеется четыре равновесных значения φ_n^*: $\varphi_n^*\approx\pi n/2-(-1)^n v\,[(1+\varkappa)/\omega]^2/\delta$. С ростом $|s|$ происходит сближение корней φ_1^* с φ_2^* и φ_3^* с φ_4^* при $\delta v>0$ и корней φ_2^* с φ_3^*, φ_1^* с φ_4^* при $\delta v<0$. Слияние корней происходит при $|s|=1$ и при $|s|>1$ они пропадают.

Для исследования устойчивости равновесных положений запишем для системы (3.4) уравнения в вариациях

$$\xi_1=k-k^*,\ \xi_2=\theta-\theta^*,\ \xi_3=\varphi-\varphi_n^*$$

$$\xi_1^{\cdot}=-\mu(1+\varkappa)\xi_1,\quad \xi_2^{\cdot}=\mu(\varkappa\lambda\xi_2-2\delta k^*\xi_3\cos 2\varphi_n^*)$$

$$\xi_3^{\cdot}=k^*[\varkappa/(1+\varkappa)+\mu\delta\cos 2\varphi_n^*]\xi_2$$

При достаточно малых μ корни характеристического уравнения для переменных ξ_2 и ξ_3 (ξ_1 — устойчиво) имеют вид

$$p_{1,2}=\mu\varkappa\lambda/2\pm jk^*[2\mu\delta\varkappa(1+\varkappa)^{-1}\cos 2\varphi_n^*]^{1/2}\quad (\delta\varkappa\geqslant 0)$$

Отсюда следует, что точки $r_n^*(\pi/2, \varphi_n^*)$, для которых $\cos 2\varphi_n^*<0$ имеют седловой характер. Точки же с $\cos 2\varphi_n^*>0$ являются фокусами: устойчивыми при $\varkappa<0$ и неустойчивыми при $\varkappa>0$.

При $\theta\neq\pi/2$ стационарные движения ротора могут представлять собой лишь циклы, на которых θ, $\varphi^{\cdot}\approx\mathrm{const}$, причем величины θ и $\varphi^{\cdot}$ тем ближе к постоянным значениям, чем меньше δ. Для отыскания циклов проведем дополнительное усреднение уравнений (3.4) по углу φ:

$$k^{\cdot}=\mu[\omega-k(1+\varkappa\sin^2\theta)],\quad k\theta^{\cdot}=-\mu(v+\varkappa\lambda k\sin\theta\cos\theta) \tag{3.8}$$

Приравнивая нулю правые части полученных уравнений и разрешая их относительно стационарных значений θ и k получим

$$\cos\theta_-^+=-\{{}^1/_2(1+\varkappa^2p^2)^{-1}[1+2\varkappa(1+\varkappa)p^2\pm(1-4(1+\varkappa)p^2)^{1/2}\}^{1/2}\,\mathrm{sign}\,p$$

$$k_-^+={}^1/_2\,\omega(1+\varkappa)^{-1}[2+\varkappa\pm(1-4(1+\varkappa)p^2)^{1/2}] \tag{3.9}$$

Найденные предельные циклы существуют лишь при выполнении одного из неравенств

$$p^2=(v/\varkappa\lambda\omega)^2\leqslant p_*^2={}^1/_4(1+\varkappa)^{-1}$$
$$16q(1+q)(1+\varkappa)^{1/2}\leqslant\pi|\varkappa|(1+3q)\qquad q=n/m \tag{3.10}$$

т. е. при заданных воздействиях на ротор не только устойчивость, но и само существование циклов $\varphi^{\cdot}=-k^*\varkappa(1+\varkappa)^{-1}\cos\theta^*$ зависит от динамических свойств ротора.

При достаточно малых p^2, обеспечивающих выполнение условия (3.10), существуют два предельных цикла:

$$r^+:\ \cos\theta^+\approx-(1-{}^1/_2\,p^2)\operatorname{sign}p,\quad k^+\approx\omega(1-\varkappa p^2)$$
$$r_-:\ \cos\theta_-\approx-(1+\varkappa)p,\quad k_-\approx\omega\,[1+\varkappa(1+\varkappa)p^2]\,(1+\varkappa)^{-1}$$

расположенных по одну сторону от экваториальной плоскости эллипсоида инерции или эллипсоида (3.5). При этом цикл r^+ расположен ближе к полюсу эллипсоида, а r_- — к экватору. С ростом p^2 они сближаются, при критическом значении p_*^2 сливаются в один r_*: $\cos\theta_*=-[(1+\varkappa)(2+\varkappa)^{-1}]^{1/2}\cdot\operatorname{sign}p_*$, $k_*={}^1/_2\,\omega(2+\varkappa)(1+\varkappa)^{-1}$ и при дальнейшем росте p^2 пропадают.

Исследования устойчивости циклов приводит к характеристическому уравнению $x^2+\mu x[\lambda k(2+\varkappa)-(2\lambda-1)\omega]+\mu^2\lambda[\omega k(2+\varkappa)-2\varkappa^2\omega^2p^2]=0$.

Требования положительности коэффициентов этого уравнения для устойчивости исследуемого режима приводят к выводу, что для роторов со сплюснутым эллипсоидом инерции ($\varkappa>0$) устойчив цикл r^+, а при вытянутом эллипсоиде инерции ($\varkappa<0$) — цикл r_-.

Возможность управления движением ротора базируется на том, что меняя v при использовании алгоритма переключений (3.1), можно переводить фазовую траекторию из одной области в другую. Выбирая, например, v^2 достаточно большим, так что условия (3.7) и (3.10) не выполняются, можно за конечное время изменить угол нутации θ от θ_1 до θ_2. Если кроме рассматриваемых на ротор не действуют никакие другие моменты, то после их выключения движение ротора будет проходить вдоль некоторой полодии, определяемой переменными φ и θ в момент выключения:

$$Q=[\varkappa(1+\varkappa)^{-1}+\mu\delta\cos2\varphi]\,\sin^2\theta=\mathrm{const} \tag{3.11}$$

т. е. угол нутации θ и величины угловых скоростей $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ будут колебаться около некоторых средних значений с амплитудой, зависящей от параметра $\mu\delta=(J_2-J_1)(J_2+J_1)^{-1}$. Так, например, для угла θ из (3.11) следует

$$\frac{(1+\varkappa)Q}{\varkappa+\mu\delta(1+\varkappa)}\leqslant\sin^2\theta\leqslant\frac{(1+\varkappa)Q}{\varkappa-\mu\delta(1+\varkappa)}$$

При учете же других, действующих на ротор моментов, заданный режим можно поддерживать, например, релейным изменением величины v.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартыненко Ю. Г.* Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом ротора // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 5. С. 35–40.
2. *Комаров В. Н.* Активное гашение нутации проводящего ротора гироскопа // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 9. С. 99–105.
3. *Мартыненко Ю. Г.* Влияние вихревых токов на вращение и ориентацию спутника // Космич. исследования. 1985. Т. 23. № 3. С. 347–357.
4. *Белецкий В. В.* Динамика быстрых вращений // Научн. тр. ин-та механики МГУ. 1973. № 29. С. 97–118.
5. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
6. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
7. *Мартыненко Ю. Г.* Об устойчивости стационарных вращений твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 29–33.
8. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука. 1971. 312 с.

Горький

Поступила в редакцию 22.V.1987