

УДК 539.214;539.374

О. Ю. ДИНАРИЕВ, А. Б. МОСОЛОВ

О ВИДЕ ФУНКЦИОНАЛА ПЛАСТИЧНОСТИ
В ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Рассматриваются различные варианты выбора аналитического вида функционала пластичности, пригодного для описания произвольных процессов деформации.

1. Согласно теории упругопластических процессов [1, 2], векторы напряжений σ и деформаций e связаны однозначной функциональной зависимостью

$$\sigma = F[e, \dots]_0^s \quad (1.1)$$

где s — длина дуги траектории деформации, $ds = |de|$, а многоточие в (1.1) отражает тот факт, что функционал пластичности F может зависеть также и от других величин, например от объемной деформации ε , температуры T , меры повреждаемости Ω и т. п. Для простоты будем считать, что все эти величины постоянны (или не оказывают существенного влияния на процесс пластичности), и сосредоточим внимание только на зависимости F от e . Пусть функционал F непрерывен относительно соответствующей нормы, $O(5)$ -инвариантен (материал считается начально изотропным) и удовлетворяет свойству запаздывания (затухающей памяти) со следом λ .

Конкретный аналитический вид функционала F в общем случае неизвестен, однако, используя указанные выше свойства, можно получить ряд упрощенных зависимостей для описания частных классов процессов деформации (см. обзор [3]). Обычно источником для получения таких зависимостей служит разложение F в функциональные ряды — ряд Тейлора по параметрам кривизны-кручений траектории деформации [3, 4] или же в ряд Фреше — Вольтерра непосредственно по e [5, 6]:

$$\sigma = \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^s \dots \int_0^s J_{2h-1}(s, \xi_1, \dots, \xi_{2h-1}) de_1 (de_2 \cdot de_3) \dots (de_{2h-2} \cdot de_{2h-1}) \quad (1.2)$$

где $de_i = de(\xi_i)$. Такое разложение иногда более удобно, так как не требует дополнительных предположений о гладкости и траектории деформации, а также дает сразу функционал пластичности в виде (1.1). Можно показать [5], что для процессов деформации, вплоть до средней кривизны включительно, разложение (1.2) приводится к виду

$$\sigma = \int_0^s J_0^*(s, \xi) de(\xi) \quad (1.3)$$

а в следующем (за теорией средней кривизны) порядке имеем

$$\sigma = \int_0^s J_1^*(s, \xi) de(\xi) + \int_0^s \int_0^s \int_0^s J_3^*(s, \xi_1, \xi_2, \xi_3) de_1 (de_2 \cdot de_3) \quad (1.4)$$

Ядра J_0^* , J_1^* и J_3^* , разумеется, не совпадают с исходными ядрами в разложении (1.2). Учет следующего порядка сложности траектории деформации приводит к появлению пятикратного интеграла и т. д. Получаю-

щиеся в результате соотношения становятся чрезвычайно сложными и весьма неопределенными, так как входящие в них ядра являются функциями многих переменных и их экспериментальное определение вряд ли возможно с достаточной точностью. Поэтому вопрос о выборе простой, но вместе с тем согласующейся с экспериментами на сложное нагружение формы функционала пластичности представляет несомненный интерес.

В настоящее время существует несколько подходов к решению этой задачи. В [1] предложено следующее представление вектора σ :

$$\sigma = \int_0^s B(s, s'; \{\beta\}) de(s') \quad (1.5)$$

где $\{\beta\}$ — совокупность параметров, отражающих влияние сложной геометрии процесса деформации. В качестве $\{\beta\}$ предлагалось взять $\{\kappa(s), \kappa(s')\}$ — совокупность параметров кривизны и кручений траектории деформации и, если необходимо, их производных.

Одним из вариантов выбора функционала пластичности можно считать подход, основанный на гипотезе локальной определенности [7–9].

2. Указанный выбор параметров $\{\beta\}$ в представлении вектора σ вполне приемлем для гладких траекторий деформации, однако для траекторий с изломами такое представление нуждается в некотором уточнении, связанном, например, с необходимостью доопределения ядра B в точках сингулярности $\{\kappa(s), \kappa(s')\}$ (в точках излома). Вместо этого в данной работе предлагается другой выбор параметров $\{\beta\}$.

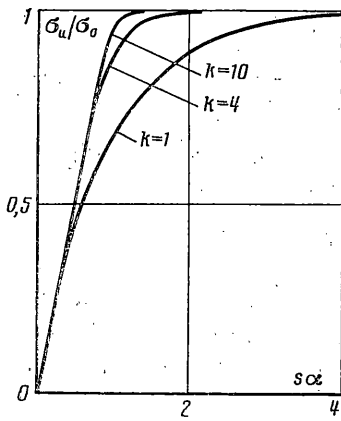
Будем исходить из обобщенной гипотезы локальной определенности, распространенной на ядро B , т. е. будем считать, что ядро B зависит не только от s и s' , но также и от параметров, присутствующих в гипотезе локальной определенности: $\sigma_u(s)$, $\sigma_u(s')$, $\{\theta_i(s')\}$, где $\sigma_u = |\sigma|$, $\{\theta_i\}$ — совокупность углов ориентации вектора σ в сопровождающем репере Френе траектории деформации. Иными словами, положим $\{\beta\} = (\sigma_u(s), \sigma_u(s'), \{\theta_i(s')\})$. В простейшем случае, когда рассматриваются только двумерные процессы нагружения и деформации, ядро B будет зависеть только от одного угла $\theta(s')$ между векторами σ и de , следовательно, функционал пластичности имеет вид

$$\sigma = \int_0^s B(s, s'; \sigma_u(s), \sigma_u(s'), \theta(s')) de(s') \quad (2.1)$$

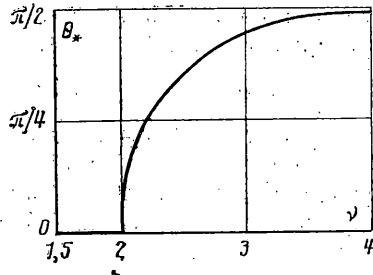
Зависимость ядра B от параметров в принципе может быть определена из простых экспериментов. Действительно, рассмотрим двузвенную траекторию деформации с прямыми звеньями и углом излома θ_0 при $s=s_0$, тогда из (2.1) (при $s>s_0$) получим $\partial(\sigma \cdot n)/\partial s_0 = -B(s, s_0; \sigma_u(s), \sigma_u(s_0), \theta_0) \sin \theta_0$, где n — единичный вектор, ортогональный второму звену траектории деформации. Написанное равенство позволяет найти функцию B , проводя эксперименты с различными s_0 и θ_0 , так как левая его часть есть производная функции, которая непосредственно измеряется в эксперименте. Конечно, с практической точки зрения построение по опытным данным функции пяти аргументов очень трудоемко, поэтому можно, исходя из гипотезы локальной определенности [6–8], пойти по пути упрощения теории, например опустить зависимость ядра B от $\sigma_u(s)$ и $\sigma_u(s')$. Другой путь упрощения состоит в наложении ограничений на функциональный вид ядра B . Рассмотрим частный случай, когда ядро B факторизуется: $B = B_1(s, \sigma_u(s)) B_2(s', \sigma_u(s'), \theta(s'))$. В этом случае функционал (2.1) можно переписать в дифференциальном виде

$$d\sigma = A de + C \sigma ds, \quad A = B_1 \cdot B_2 \quad (2.2)$$

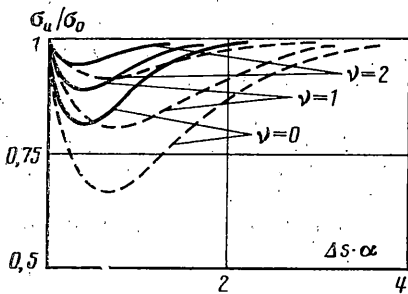
$$C = \frac{1}{B_1} \left[\frac{\partial B_1}{\partial s} + \frac{\partial B_1}{\partial \sigma_u} \left(\frac{B_2 B_1^2 \cos \theta + \sigma_u \partial B_1 / \partial s}{B_1 - \sigma_u \partial B_1 / \partial \sigma_u} \right) \right]$$



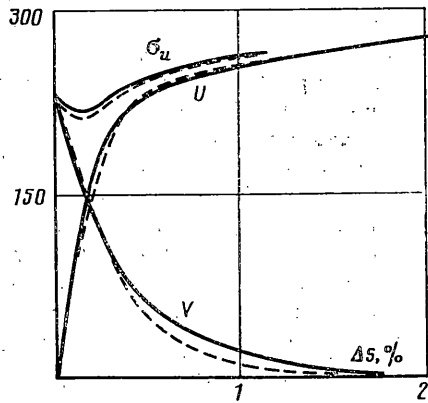
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Очевидно, A и C — функции (не функционалы) переменных s , $\sigma_u(s)$ и $\theta(s)$. Из (2.2) получается уравнение, описывающее эволюцию σ_u и θ :

$$d\sigma_u/ds = A \cos \theta + C\sigma_u = \rho(s, \sigma_u, \theta) \quad (2.3)$$

$$d\theta/ds = \kappa - (A/\sigma_u) \sin \theta = \kappa - \varphi(s, \sigma_u, \theta)$$

где κ — кривизна траектории деформации. Уравнения (2.3) имеют вид обобщенной гипотезы локальной определенности. Обобщение состоит в том, что интенсивность напряжений σ_u уже не считается заданной функцией s (как, например, в [7]), а описывается уравнением эволюции, аналогичным уравнению, описывающему эволюцию угла θ , причем сами эти уравнения зависят от σ_u .

Приведем простой модельный пример. Пусть $A=E$, $C=-\alpha(\sigma_u/\sigma_0)^{k-1} \times [\cos(\theta/2)]^{2\nu}$, $\alpha=E/\sigma_0$; $k, \nu \geq 0$, где E, σ_0, k, ν — параметры модели. При простом нагружении имеем $d\sigma_u/ds = E[1 - (\sigma_u/\sigma_0)^k]$ и, значит, модель описывает материал без упрочнения с модулем упругости E и предельным значением напряжений σ_0 (фиг. 1). Как следует из фиг. 1, параметр k ответствен за «отклонение» поведения рассматриваемого материала от поведения идеального упругопластического тела. При разгрузке выполняется закон Гука: $d\sigma_u/ds = -E$.

Рассмотрим траекторию деформации в виде двузвенной ломаной с углом излома θ_0 при $s=s_0$. Из (2.3) следует, что при $s > s_0$:

$$d\sigma_u/ds = E \cos \theta - E(\sigma_u/\sigma_0)^k [\cos(\theta/2)]^{2\nu} \quad (2.4)$$

$$d\theta/ds = -(E/\sigma_u) \sin \theta, \quad \theta(s_0+0) = \theta_0$$

Из (2.4) заключаем, что при изломе траектории деформации (даже на угол $\theta_0 < \pi/2$) возможен «нырок» σ_u , если $\theta_0 > \theta_*(\sigma_u)$. Критерием возникно-

вения нырка считаем условие $d\sigma_u/ds=0$, а угол θ_* определяется из уравнения $\cos \theta_* - (\sigma_u/\sigma_0)^k [\cos(\theta_*/2)]^{2\nu} = 0$. Зависимость θ_* от ν при $\sigma_u \approx \sigma_0$ приведена на фиг. 2. На фиг. 3 показаны профили нырков при изломе на угол $\theta_0 = \pi/2$ при различных k (штриховые кривые соответствуют $k=1$, сплошные — $k=4$) и фиксированном $\nu=2,5$.

В рассмотренном выше примере разгрузка абсолютно упруга. Легко привести пример модели материала с неупругой разгрузкой:

$$d\sigma = E \{1 - \beta (\sigma_u/\sigma_0)^m [\sin(\theta/2)]^2\} de - (E/\sigma_0) \sigma ds$$

Это уравнение также описывает материал без упрочнения, а дополнительный параметр β позволяет в определенном смысле управлять характером разгрузки. Ограничившись одномерными процессами, нетрудно проверить, что при $\beta=1$ разгрузка происходит по закону Гука. Если $\beta > 1$, то выпуклость кривой разгрузки (в координатах $\sigma \sim \varepsilon$) обращена вверх и касательный модуль меньше E ; при $\beta < 1$ положение обратное.

Упрочнение материала в модели (2.4) можно учесть считая, что σ_0 может изменяться в процессе деформации. Полагая $\sigma_0 = \sigma_0(s)$, будем называть эту функцию функцией упрочнения. Например, если $\sigma_0 = \sigma_* (1 + bs)$, то модель (2.4) будет описывать материал с линейным упрочнением. Сравнение предсказаний такой модели с экспериментами на сложное нагружение приведено на фиг. 4. Здесь сплошной линией показаны экспериментальные кривые σ_u , $U = \sigma_u \cos \theta$, $V = \sigma_u \sin \theta$ для стали S10C и $\theta_0 = \pi/2$ [9]. При расчетах принято, что $k=3$, а величина ν выбиралась из условия $dV/ds(s_0+0) = -E(1/2)^\nu$ и оказалась равной $\approx 0,5$. Расчетные кривые показаны на фиг. 4 штриховыми линиями.

3. В последние полтора десятилетия получили значительное развитие и так называемые теории пластичности без поверхности текучести. Здесь можно выделить два подхода.

Соотношения тензорно-параметрической теории пластичности записываются в виде [10–12]:

$$\sigma = \int_0^\xi J_1(\xi, \xi') dR(\xi')$$

$$e = \int_0^\xi J_2(\xi, \xi') dR(\xi'), \quad d\xi = \frac{dR}{f(R)}, \quad dR = |dR|$$

Характерная особенность этих соотношений состоит в том, что функционал пластичности задается в параметрической форме с привлечением некоторого вспомогательного вектора R , вид которого заранее не конкретизируется, но считается, что он отражает влияние микродеформаций и микронапряжений на процесс пластической деформации.

Другим, вероятно более известным вариантом теории пластичности без поверхности текучести является эндохронная теория неупругости (вязкопластичности) [13]. Функционал этой теории записывается в виде

$$\sigma = \int_0^z J(z, z') de(z') \quad (3.1)$$

где параметр z называют обычно внутренним временем. Первоначально [13] считалось, что

$$dz = ds/f(s), \quad ds = |de| \quad (3.2)$$

Функция $f(s)$ называется функцией упрочнения. Можно показать, что она ответственна за эффекты типа изотропного упрочнения.

Как нетрудно заметить, функционал пластичности в виде (3.1), (3.2) фактически является частным случаем (1.5) и совпадает с (1.3). Однако, если (1.3) справедливо только для процесса не сложнее средней кривизны, соотношения (3.1), (3.2), по определению, считаются справедливыми для любых траекторий деформации, в том числе и для разгрузок. При этом ни

в определении функционала пластичности, ни в определении меры внутреннего времени z не используется понятие поверхности текучести или условие разгрузки. Это и является одной из основных причин привлекательности эндохронной теории пластичности.

Выбор функционала пластичности в виде (3.1) оказался весьма удачным и позволил получить простое качественное (а иногда и количественное) описание таких характерных пластических эффектов, как линейное и нелинейное упрочнение, нелинейная разгрузка, запаздывание (затухающая память), петля гистерезиса при повторном нагружении, циклическая ползучесть и релаксация, стабилизация петли гистерезиса при циклическом нагружении, нырок интенсивности напряжений при изломе траектории деформации и т. д. Вместе с тем при описании с помощью (3.1), (3.2) сложных процессов деформации нередко обнаруживается значительное количественное расхождение предсказаний эндохронной теории с экспериментальными данными. Это и не удивительно, так как хорошо известно, что в пластичности реакция материала на внешнее воздействие существенно зависит от того, является ли это воздействие нагружением или же разгрузкой. Между тем выбор параметра внутреннего времени z в виде (3.2) это различие игнорирует и поэтому в общем случае не может быть приемлемым для произвольных траекторий деформации.

Заметим, что в теории (1.5) этот недостаток компенсируется зависимостью ядра B от геометрии процесса деформации.

Положение можно было бы исправить изменив определение функционала пластичности, например использовав вместо (3.1) соотношение (1.4) (с заменой $s \rightarrow z$). Однако простой вид функционала пластичности в эндохронной теории обладает несомненными преимуществами, поэтому в [14] предложено изменить определение меры внутреннего времени: $dz = d\xi / f(\xi)$, $d\xi = |de - \chi d\sigma / E|$, где E — модуль упругости материала, а χ — дополнительный параметр модели. Первоначально считалось, что $0 \leq \chi \leq 1$.

Отметим, что фактически такое же определение $d\xi$ содержалось в неявном виде в [10].

В последующих работах по эндохронной теории пластичности принималось строгое равенство $\chi = 1$, соответствующее $d\xi = |de_p|$, $de_p = de - d\sigma / E$ [15, 16]. Итак, в современном варианте эндохронной теории вместо длины дуги полной траектории деформации s стала использоваться длина дуги пластической деформации s_p . Определяющие уравнения эндохронной теории также были модифицированы и их стали записывать в виде [15, 16]:

$$\sigma = \sigma_0^y \frac{de_p}{dz} + \int_0^z J_0(z-z') de_p(z')$$

где σ_0^y — предел текучести, а $J_0(z)$ — несингулярное ядро, или в виде [17]:

$$\sigma = \int_0^z J(z-z') de_p(z'), \quad J(z) = z^{-\alpha} J_D(z) \quad (\alpha < 1)$$

Таким образом, видно, что предложенная в [15] современная реализация эндохронной теории фактически возвращает эту теорию в класс теорий пластичности с четко определенной поверхностью текучести [17]. Это вряд ли можно считать последовательным развитием теории, так как первоначальный вариант эндохронной теории был интересен как раз тем, что рассматривался как теория пластичности без поверхности текучести.

4. Сохраним функционал пластичности в виде (3.1), но будем считать, что мера внутреннего времени z должна выбираться так, чтобы правильно учесть сложность процессов деформации. Положим

$$dz = f(s, \{\beta\}) ds \quad (4.1)$$

где f — функция упрочнения, а $\{\beta\}$ — совокупность параметров, обеспечивающих учет сложности процессов деформации.

Сравнивая эндохронные теории в виде (3.1), (4.1) и теорию (2.1), можно заметить, что эти теории в определенном смысле двойственны. Если в (2.1) влияние геометрии процесса учитывается в зависимости от нее ядра, то в предлагаемом варианте эндохронной теории это влияние переносится на параметр процесса деформации — меру внутреннего времени z .

Вид функции f и параметров $\{\beta\}$ требует дополнительного исследования, однако в качестве достаточно общего предположения можно воспользоваться по аналогии с п. 2 обобщенной гипотезой локальной определенности и считать, что

$$dz = f(s, \sigma_u, \{\theta_{ij}\}) ds \quad (4.2)$$

Для двумерных процессов нагружения и деформации $dz = f(s, \sigma_u, \theta) ds$.

Без ограничения общности можно считать f непрерывной, четной по θ неотрицательной функцией, удовлетворяющей условию $f \leq 1$. Поскольку для простых процессов длина дуги является вполне адекватным параметром процесса, наложим на f следующее ограничение: $f(s, \sigma_u, 0) = 1$. (Вместо этого можно было бы принять $f(s, \sigma_u, 0) = f_0(s, \sigma_u)$, где $f_0(s, \sigma_u)$ — заданная функция упрочнения.)

Покажем, что ядро J и функцию упрочнения f можно определить из экспериментов.

Пусть траектория деформации — двузвенная ломаная с углом излома θ_0 при $s = s_0$, $\sigma_u(s_0) = \sigma_0$, $z(s_0) = z_0$. Дифференцируя (3.1) в точке $s = s_0 + 0$, находим

$$d\sigma(s_0 + 0) = J(z_0, z_0) p_2 ds + D(z_0) f(s_0, \sigma_0, \theta_0) p_1 ds$$

$$D(z_0) = \int_0^{z_0} \frac{\partial J}{\partial z_0}(z_0, z') ds(z') \quad (4.3)$$

где p_1 и p_2 — направляющие векторы первого и второго звена траектории деформации. Дифференцируя (3.1) по s_0 , получим

$$\partial \sigma / \partial s_0 = J(z, z_0) (p_1 - p_2) \quad (4.4)$$

Соотношений (3.1), (4.2) — (4.4) достаточно для определения из экспериментов функций J , f и z . В самом деле, измеряя проекцию $\partial \sigma / \partial s|_{s_0+0}$ вдоль p_2 , найдем функцию $J(z_0, z_0)$. Аналогично, измеряя проекцию $\partial \sigma / \partial s|_{s_0+0}$ вдоль p_1 и используя условие $f(s, \sigma_u, 0) = 1$, найдем функцию $D(z_0)$ при заданных σ_0 и s_0 , следовательно, и зависимость f от θ . Проводя измерения при различных σ_0 , s_0 , можно полностью восстановить вид функции f , а затем найти z . Будем менять точку излома s_0 ; тогда, измеряя $|\partial \sigma / \partial s_0|_s$ и учитывая, что зависимость $z = z(s)$ уже известна, из (4.4) найдем $J(z, z_0)$. Поскольку $J(z, z_0)$ определено раньше, то этим завершается процедура построения функций J , f и z .

5. Приведем конкретный пример соотношений эндохронной теории пластичности в виде (3.1), (4.2):

$$J(z, z') = \mu + (E - \mu) [(1 + \beta z') / (1 + \beta z)]^{\alpha/\beta}$$

$$f = \gamma + (1 - \gamma) [\cos(\theta/2)]^{2\nu} \quad (0 \leq \gamma \leq 1)$$

Уравнение (3.1) можно теперь переписать в виде

$$d\sigma = E d\epsilon - \alpha (\sigma - \mu \epsilon) (1 + \beta z)^{-1} f(\theta) ds \quad (5.1)$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что при постоянных параметрах это уравнение описывает материал, поведение которого аналогично поведению материала с комбинированным трансляционно-изотропным линейным упрочнением, хотя в (5.1) поверхность текущей величины нет. Параметр μ играет роль модуля трансляционного упрочнения, величина $(E/\alpha)\beta$ — модуля изотропного упрочнения, γ определяет меру неупругости разгрузки: при $\gamma = 0$ разгрузка абсолютно упруга и описывается законом Гука $d\sigma = E d\epsilon$, при $\gamma = 1$ уравнение (5.1) сводится к известному соотношению эндохронной теории [13], характеризующемуся «максимальной» не-

упругостью разгрузки, поскольку в этом случае dz одно и то же и для нагружения, и для разгрузки.

В случае $\beta \rightarrow 0$ ядро J приобретает вид

$$J(z, z') = \mu + (E - \mu) \exp[-\alpha(z - z')]$$

и соответствует материалу только с трансляционным упрочнением, если же $\mu = 0$, то получается материал без упрочнения (аналогичный модели п. 2).

Если ядро функционала (3.1) факторизуется, т. е. $J(z, z') = J_1(z)J_2(z')$, то уравнения эндохронной теории можно записать в виде (2.3), только функции ρ и ϕ в этом случае будут зависеть еще и от z . Следовательно, свойства эндохронной теории вполне аналогичны свойствам теории (2.4), однако есть и отличие. Особенно это заметно, если записать уравнения обеих теорий в виде (2.3). Тогда, в любой эндохронной теории функция непрерывна при изломе траектории деформации (так как в эндохронной теории A зависит только от z , а z непрерывна при изломах траектории деформации), в (2.1) функция A может зависеть от θ и, значит, при изломе траектории A будет меняться скачком.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А.* О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // ПММ, 1954. Т. 18. Вып. 6. С. 641–666.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
3. *Ленский В. С.* Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1978. Вып. 5. С. 65–96.
4. *Малый В. И.* Разложение функционала напряжений по малому параметру // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1967. Вып. 2. С. 73–80.
5. *Мосолов А. Б.* О соотношениях теории пластичности для двузвенных процессов деформации с искривленными звеньями // Изв. АН СССР. МТТ, 1985. № 6. С. 122–127.
6. *Ленский В. С.* Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962. № 5. С. 154–158.
7. *Ленский В. С.* О постановке краевой задачи общей теории пластичности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1979. Вып. 6. С. 92–95.
8. *Джо Зуй Бюк.* О приближенном методе решения плоской краевой задачи теории пластичности при сложном нагружении // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк., 1983. № 2. С. 41–44.
9. *Onashi Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals // Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ. 1982. V. 34. No 1. P. 1–76.
10. *Кадашев Ю. И.* О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. Вып. 6. С. 39–45.
11. *Кадашев Ю. И.* О новых тенденциях в развитии теории течения // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. Вып. 14. С. 15–20.
12. *Кадашев Ю. И., Михайлов А. Н.* О теории пластичности, не имеющей поверхности текучести // Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1980. Т. 254. № 3. С. 574–576.
13. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt. 1–2 // Arch. Mech. Stosow. 1971. V. 23. No 4. P. 517–551.
14. *Valanis K. C.* Fundamental consequences of a new intrinsic time measure: Plasticity as a limit of the endochronic theory // Arch. Mech. Stosow. 1980. V. 32. No 2. P. 171–191.
15. *Valanis K. C.* Continuum foundations of endochronic plasticity // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. 1984. V. 106. No 4. P. 367–375.
16. *Wu H. C., Yang R. J.* Application of the improved endochronic theory of plasticity to loading with multiaxial strain-path // Intern. J. Non Linear Mech. 1983. V. 18. No 5. P. 395–408.
17. *Watanabe O., Atluri S. N.* A new endochronic approach to computational elastoplasticity: example of a cyclically loaded cracked plate // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1985. V. 52. No 4. P. 857–864.

Москва

Поступила в редакцию
13.X.1986