МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 624.072.21

ОБ ИЗГИБЕ БАЛОК НА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОМ ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ РЕОЛОГИЧЕСКОГО ТИПА

КОЧЕТКОВ Б. Е., МАКАРОВ Б. П.

Рассматриваются стохастические краевые задачи для балок, расположенных на неоднородном винклеровском основании из упруго-наследственного материала. Исследуется влияние случайных пространственных неоднородностей основания и временных флуктуаций ядер ползучести на статистические характеристики прогиба балок при статических нагрузках.

1. Спектральный метод анализа стохастического уравнения ползучести. Деформации балок, расположенных на винклеровском основании из упруго-наследственного материала, описываются интегродифференциальным уравнением следующего вида [1]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+c(x)\left[w(x,t)-\int\limits_0^t w(x,\tau)R(t,\tau)\,d\tau\right]=q(x,t) \qquad (1.1)$$

Здесь EI — изгибная жесткость; $w(x,t)$ — функция прогиба; $c(x)$ — коэффициент податливости; $R(t,\tau)$ — резольвента ядра ползучести; q — интенсивность нагрузки.

Предположим, что коэффициент упругости основания $c(x)$ является однородной случайной функцией с математическим ожиданием $\langle c(x)\rangle=c_0$ и флуктуациями $c(x)$. Резольвенту ядра ползучести $R(t,\tau)$ также представим в виде суммы регулярной и флуктуационной частей: $R(t,\tau)=R_0(t,\tau)+R_1(t,\tau)$.

Для анализа стохастического уравнения (1.1) воспользуемся операционным методом, принимая в качестве начальных условий характеристики статического равновесия балки. Применяя к левой и правой частям (1.1) преобразование Лапласа, получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно изображений

$$EIw_*^{\mathrm{IV}}(x,s)+c(x)w_*(x,s)[1-R_*(s)]=q_*(x,s) \qquad (1.2)$$

Трансформанты Лапласа введены обычным образом: для функции $f(x,s)$ ее трансформанта $f_*(x,s)$ равна

$$f_*(x,s)=\int\limits_0^\infty f(x,t)\exp(-st)\,dt$$

Представим случайную функцию $w_*(x,s)$ в виде обобщенного интеграла Фурье [2]:

$$w_*(x,s)=w_0(x,s)+\iint W(k,\omega)\varphi(k,\omega;x,s)\exp i(kx+\omega s)\,dk\,d\omega \qquad (1.3)$$

В этом выражении $w_0(x,s)=\langle w_*(x,s)\rangle$ — математическое ожидание; $W(k,\omega)$ — случайный спектр стационарной части флуктуаций $w(x,s)$; $\varphi(k,\omega;x,s)$ — неизвестная детерминированная функция, характеризующая отличие $w_*(x,s)$ от однородного и стационарного поля.

Случайные функции $c(x)$ и $R_*(s)$ зависят от разных аргументов и, вообще говоря, не имеют двухмерных интегральных представлений типа (1.3). Однако если использовать дельта-функции Дирака $\delta(\omega)$ и $\delta(k)$, то $c(x)$ и $R_*(s)$ можно записать в форме, аналогичной (1.3):

$$c(x)=c_0+\iint C(k)\delta(\omega)\exp i(kx+\omega s)\,dk\,d\omega$$

$$R_*(s)=R_0(s)+\iint R(\omega)\delta(k)\exp i(kx+\omega s)\,dk\,d\omega \tag{1.4}$$

где c_0 и $R_0(s)$ — соответствующие математические ожидания.

Дальнейший анализ выполняется по методике, изложенной в работе [2]. Осредним уравнение (1.2) по множеству реализаций

$$EIw_0^{\mathrm{IV}}+(c_0w_0+\langle c_1w_1\rangle)(1-R_0)-c_0\langle w_1R_1\rangle=q_0 \tag{1.5}$$

Корреляционные моменты $\langle c_1w_1\rangle$ и $\langle w_1R_1\rangle$, входящие в уравнение (1.5), можно представить в интегральной форме

$$\langle w_1(x,s)R_1(s)\rangle=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} S_{wR}(k,\omega)\varphi(k,\omega;x,s)e^{ikx}\,d\omega\,dk$$

$$\langle w_1(x,s)c_1(x)\rangle=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} S_{wc}(k,\omega)\varphi(k,\omega;x,s)e^{i\omega s}\,d\omega\,dk \tag{1.6}$$

Здесь $S_{wc}(k,\omega)$ и $S_{wR}(k,\omega)$ — взаимные спектральные плотности, соответствующие спектрам $W(k,\omega)$, $C(k)$ и $R(\omega)$:

$$\langle W(k,\omega)C(k')\rangle=S_{wc}(k,\omega)\delta(k+k'),$$

$$\langle W(k,\omega)R(\omega')\rangle=S_{wR}(k,\omega)\delta(\omega+\omega') \tag{1.7}$$

Плотности $S_{wc}(k,\omega)$ и $S_{wR}(k,\omega)$ с множителем $\varphi(k,\omega;x,s)$ подчиняются соотношениям, которые получаются из стохастического уравнения (1.2) путем перехода к спектральным моментам второго порядка. Линеаризированный вариант этих соотношений имеет следующий вид

$$\begin{aligned}S_{wc}(k,\omega)[EI(\varphi^{\mathrm{IV}}+4ik\varphi'''-6k^2\varphi''-4ik^3\varphi'+k^4\varphi)+c_0\varphi(1-R_0)]=\\=-w_0\delta(\omega)S_c(k)(1-R_0)\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}S_{wR}(k,\omega)[EI(\varphi^{\mathrm{IV}}+4ik\varphi'''-6k^2\varphi''-4ik^3\varphi'+k^4\varphi)+\\+c_0\varphi(1-R_0)]=c_0w_0\delta(k)S_R(\omega)\end{aligned} \tag{1.9}$$

Полученные уравнения выведены в предположении, что нормальная нагрузка регулярна, а случайные спектры $C(k)$, $R(\omega)$ и $W(k,\omega)$ обладают свойством квазигауссовости [2].

Итак, исходная стохастическая задача сводится к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5), (1.8), (1.9) относительно статистических характеристик случайного поля $w_*(x,s)$ при некоторых начальных и граничных условиях, отражающих способ закрепления концов балки.

2. Случай регулярного ядра ползучести. Рассмотрим частные случаи. Допустим сначала, что ядро ползучести и его резольвента имеют регулярный характер:

$$K(t-\tau)=A\exp[-a(t-\tau)],\quad R(t-\tau)=B\exp[-b(t-\tau)] \tag{2.1}$$

Здесь $B=A$, $b=a+A$ — параметры. В этом случае интегродифференциальное уравнение изгиба (1.1) можно привести к дифференциальному уравнению в частных производных [1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{c(x)}{EI}w\right]-B\frac{c(x)}{EI}w=\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)\frac{q}{EI} \tag{2.2}$$

Анализ может быть выполнен без перехода к изображению по Лапласу.

Разрешающие уравнения относительно среднего прогиба $w_0(x, t)$ и спектрального момента $S_{wc}(k)\varphi(k, x; t)$ имеют следующий вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)\left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\frac{c_0 w_0}{EI}+\frac{1}{EI}\int_{-\infty}^{\infty} S_{wc}(k)\varphi(k, x; t)\,dk\right]-$$

$$-B\left[\frac{c_0 w_0}{EI}+\frac{1}{EI}\int_{-\infty}^{\infty} S_{wc}(k)\varphi(k, x; t)\,dk\right]=\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)\frac{q_0}{EI} \qquad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)\left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}+4ik\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}-6k^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-4ik^3\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\left(k^4+\frac{c_0}{EI}\right)\varphi\right]-B\frac{c_0\varphi}{EI}=-\frac{S_c(k)}{S_{wc}(k)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)w_0-Bw_0\right]\frac{1}{EI} \qquad (2.4)$$

Если балка имеет значительную протяженность, а нагрузка постоянна во времени и равномерно распределена по длине, то нормальный прогиб будет однородной случайной функцией координаты x, так что математическое ожидание w_0 и весовая функция φ не зависят от x: $w_0(x, t)=w_0(t)$, $\varphi(k, x; t)=\varphi(k, t)$.

Частное решение уравнений (2.3), (2.4) в этом случае имеет вид

$$\varphi_*(k)=-\frac{w_* S_c(k)}{EIS_{wc}(k)}\frac{1-\gamma}{N} \qquad (2.5)$$

$$w_*=\frac{q_0}{c_0(1-\gamma)}\left[1-\frac{1-\gamma}{c_0 EI}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_c(k)\,dk}{N}\right]^{-1}$$

$$4k_0^4=c_0/EI, \quad \gamma=B/b, \quad N=k^4+4k_0^4(1-\gamma) \qquad (2.6)$$

Общее решение однородных уравнений (2.3), (2.4) является экспоненциальным $C\exp\lambda t$, где λ — характеристический показатель, C — постоянная интегрирования. Подставляя это решение в левые части рассматриваемой системы и приравнивая результат к нулю, запишем характеристическое уравнение:

$$\frac{a-\lambda}{b-\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_c(k)\,dk}{k^4+4k_0^4(a-\lambda)/(b-\lambda)}=C_0 EI \qquad (2.7)$$

Пусть, например, спектральная плотность неоднородностей постоянна: $S_c(k)=\sigma/2\pi=\text{const}$. Выполнив интегрирование в левой части (2.7), получим для характеристического показателя λ следующее выражение:

$$\lambda=b(1+(1-\gamma)\sigma_*^4]/(1+\sigma_*^4) \qquad (2.8)$$

где $\sigma_*=\sigma k_0/(2\sqrt{2}c_0^2)$ — безразмерная интенсивность неоднородностей.

Общее решение задачи имеет вид

$$w_0(t)=w_*+(w_1-w_*)e^{-\lambda t} \qquad (2.9)$$

где w_1 — средняя осадка неограниченной балки без учета ползучести [3]. Как следует из формул (2.8), (2.9), с увеличением интенсивности характеристический показатель убывает; предельное значение осадки при $t\to\infty$ оказывается меньше, чем для однородного основания. Это означает, что наличие пространственных неоднородностей основания сглаживает процесс ползучести во времени.

3. Влияние временных флуктуаций ядра релаксации. Оценим влияние временных флуктуаций ядра релаксации на характеристики процесса ползучести для неограниченной балки. Представляя, как и ранее, прогиб балки в виде однородной случайной функции координаты x, найдем из уравнений (1.8), (1.9) выражения для взаимных спектральных плотностей $S_{wc}(k, \omega)$ и $S_{wR}(k, \omega)$:

$$S_{wc}\varphi = -w_0\delta(\omega) S_c(k)(1-R_0) M^{-1}$$
$$S_{wR}\varphi = c_0 w_0 \delta(k) S_R(\omega) M^{-1} \qquad (3.1)$$
$$M = EIk^4 + c_0(1-R_0)$$

Подставим эти функции в уравнение (1.5), выполнив предварительно интегрирование по формулам (1.6). В результате получим выражение для функции $w_0(s)$, которая имеет смысл изображения математического ожидания прогиба по Лапласу:

$$w_0(s) = \frac{q_0}{c_0}\left[1 - \frac{\sigma_R^2}{1-R_0} - \frac{1}{c_0 EI}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_c(k)\,dk}{k^4 + 4k_0^4(1-R_0)}\right] \qquad (3.2)$$

Здесь σ_R^2 — дисперсия флуктуаций резольвенты $R_*(s)$:

$$\sigma_R^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_R(\omega)\,d\omega$$

Как видно из формулы (3.2), изображение среднего прогиба $w_0(s)$ зависит от спектральной плотности неоднородностей $S_c(k)$, а также от регулярной части резольвенты $R_0(s)$ и ее дисперсии σ_R^2. Пусть, например, неоднородности основания имеют широкополосный характер: $S_c(k) = \sigma/2\pi = \mathrm{const}$. Вычислив интеграл в (3.2), получим явное выражение для изображения $w_0(s)$:

$$w_0(s) = \frac{q_0(s)}{c_0}\left[1 - \frac{\sigma_R^2}{1-R_0} - \frac{\sigma}{8k_0^3(1-R_0)^{3/4}}\right]^{-1} \qquad (3.3)$$

При заданных функциях $q_0(s)$, $R_0(s)$ и $\sigma_R^2(s)$ переход к оригиналу можно выполнить численно при помощи известных методов.

Рассмотрим методику расчета для балок конечной длины. Решение уравнений (1.5), (1.8), (1.9) или (2.3), (2.4) в этом случае можно искать в виде разложения по формам собственных колебаний балки без основания. Так, например, для шарнирно опертой балки можно принять:

$$w_0(x,t) = \sum_j w_j(t)\sin k_j x, \quad q_0 = \sum_j q_j \sin k_j x$$
$$\varphi(k, x; t) = \sum_j [a_j(k,t)\sin k_j x + b_j(k,t)\cos k_j x] \qquad (3.4)$$

где $k_j = j\pi/l$ — волновое число; l — длина балки; $w_j(t)$, $a_j(k,t)$, $b_j(k,t)$ — неизвестные функции.

После подстановки (3.4) в уравнения (2.3), (2.4) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. При отсутствии флуктуаций резольвенты анализ их можно выполнить непосредственно. В противном случае необходим переход к изображениям по Лапласу, как это сделано в предыдущем примере. В обоих случаях вычисления могут быть доведены до конечного результата, что позволяет ставить и решать задачи надежности рассматриваемых конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
2. *Макаров Б. П.* Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов. М.: Машиностроение, 1983. 262 с.
3. *Макаров Б. П., Кочетков Б. Е.* Расчет фундаментов сооружений на случайно-неоднородном основании при ползучести. М.: Стройиздат, 1987. 257 с.

Москва

Поступила в редакцию 27.IV.1987