МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1989

УДК 624.07:534.1

СУХОЕ ТРЕНИЕ, ПАМЯТЬ И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

ВИНОГРАДОВА О. С., ЛОКШИН А. А., РОК В. Е.

В [1–3] предложена теория волновых процессов в линейно-упругих стержнях при наличии внешнего сухого трения. В публикуемой статье исследуется более общий случай, когда линейный материал стержня обладает памятью. А именно, рассмотрена задача о плавном нагружении конца стержня, при котором фронт волны является линией слабого разрыва (распространяющегося не по характеристике [1]). В упругом случае уравнение фронта может быть найдено как решение системы функциональных уравнений [1]. В наследственно упругом случае, рассматриваемом в данной работе, задача сводится к решению одного нелинейного интегрального уравнения. Следует отметить, что основным математическим инструментом, с помощью которого удается получить указанный результат, является псевдодифференциальное преобразование (по времени) уравнения движения стержня.

1. Рассмотрим линейно наследственно-упругий стержень плотности ρ=const с определяющим соотношением

$$\sigma=E(\varepsilon-R^{\smile}\varepsilon)$$

здесь σ — напряжение, ε — деформация, E — мгновенный модуль упругости, $R^{\smile}$ — оператор свертки с ядром релаксации $R(t)$:

$$R^{\smile}\varepsilon\equiv\int_{-\infty}^{t}R(t-\tau)\varepsilon(\tau)\,d\tau$$

Функция $R(t)$, $0\leqslant t<\infty$ считается неотрицательной, монотонно убывающей и локально интегрируемой.

Предположим, что на боковую поверхность стержня действует сила сухого трения F, имеющая вид [1], $F=-k\varkappa$ (k=const>0), где $\varkappa$ зависит от скорости $\partial u/\partial t$ следующим образом: $\varkappa=+1$ при $\partial u/\partial t>0$; $\varkappa=-1$ при $\partial u/\partial t<0$; при $\partial u/\partial t=0$ величина $\varkappa$ заранее не определена и может принимать любое значение в пределах от -1 до 1. Значение $\varkappa$ при $\partial u/\partial t=0$ определяется лишь в результате решения задачи. Если, например, некоторый участок стержня невозмущен, то на этом участке $F=0$ и, следовательно, $\varkappa=0$. Запишем уравнение движения стержня $\partial\sigma/\partial x+F=\rho\partial^2u/\partial t^2$.

Подставляя сюда значение F и используя определяющее соотношение (с учетом того факта, что $\varepsilon=\partial u/\partial x$), окончательно получаем уравнение для перемещений

$$\rho\partial^2u/\partial t^2-E(1-R^{\smile})\partial^2u/\partial x^2+k\varkappa=0 \tag{1.1}$$

2. Поставим следующую граничную задачу для уравнения (1.1)

$$u=0,\quad x>0,\quad t\leqslant0,\quad \partial u(t,0)=v_0(t) \tag{2.1}$$

Здесь $v_0(t)$ — гладкая функция, тождественно равная нулю при $t\leqslant0$. Для определенности будем считать также, что $v_0(t)>0$ при $t>0$.

Как показано в [1–3], уже в случае линейно-упругого стержня ($R^{\smile}\equiv0$) в поставленной задаче фронт волны распространяется не по характеристике, а по некоторой заранее не известной кривой. Поэтому естественно ожидать, что и в рассматриваемом здесь более общем случае

($R^{\smile}\neq 0$) фронт также должен распространяться по некоторой кривой, отличной от характеристики. Далее, так как в граничном условии сильные разрывы отсутствуют и так как опрокидывания волны происходить также не должно (вследствие линейности старшей части уравнения (1.1)), то, очевидно, фронт волны оказывается линией слабого разрыва, т. е. на фронте должны выполняться условия [1]:

$$[\partial u/\partial x]=0, \quad [\partial u/\partial t]=0 \tag{2.2}$$

здесь квадратные скобки обозначают разрыв заключенной в них величины. Наконец, поскольку перед фронтом $F=0$, само уравнение (1.1) для рассматриваемой задачи можно переписать следующим образом:

$$\rho\partial^2 u/\partial t^2 - E(1-R^{\smile})\partial^2 u/\partial x^2 + k\Theta(t-f(x))=0 \tag{2.3}$$

Здесь Θ — единичная функция Хевисайда.

3. Поставим теперь следующую задачу: определить из (2.1)—(2.3) уравнение линии фронта $t=f(x)$. После того как уравнение линии фронта будет определено, волна перемещений в задаче (2.1)—(2.4) может быть найдена стандартным способом с помощью преобразования Лапласа.

Ясно, что поставленная задача является нелинейной (эта нелинейность обусловлена нелинейной зависимостью F от $\partial u/\partial t$). Поэтому принцип Вольтерра (с помощью которого линейные наследственные задачи сводятся к линейно-упругим) здесь непосредственно не применим. Однако, как будет показано ниже, задачу все же удается свести к упругой с помощью соображений, близких к принципу Вольтерра.

Выполним преобразование Лапласа $L_{t\to p}$ уравнения (2.3)

$$\rho p^2 u^* - E(1-R^*(p))\frac{d^2u^*}{dx^2} + \frac{k}{p}\exp(-pf(x))=0 \quad (u^*\equiv L_{t\to p}u)$$

откуда имеем

$$\rho\left(\frac{p}{\sqrt{1-R^*(p)}}\right)^2 u^* - E\frac{d^2u^*}{dx^2} + k\frac{\exp(-pf(x))}{p(1-R^*(p))}=0 \tag{3.1}$$

Положим

$$q=p(1-R^*(p))^{-1/2} \tag{3.2}$$

и будем считать, что функция $R^*(p)$ представима в виде суммы $\Sigma c_n p^{-n}$ ($n\geqslant 1$). Тогда из (3.2) вытекает: $p(q)=q+\Sigma d_n q^{-n}$ ($n\geqslant 0$). Сделаем в (3.1) обратное преобразование Лапласа, но уже относительно новой переменной $L^{-1}_{q\to t}$. Композиция преобразований $L^{-1}_{q\to t} L_{t\to p}$ **представляет собой** псевдодифференциальный оператор по t. В результате получим

$$\partial^2 w/\partial t^2 - c^2\partial^2 w/\partial x^2 = -A(t, f(x)) \tag{3.3}$$

где обозначено

$$w\equiv L^{-1}_{q\to t}u^*(p(q),x), \quad c^2\equiv E/\rho,$$

$$A(t,x)\equiv\frac{k}{\rho}L^{-1}_{q\to t}\frac{\exp(-p(q)f(x))}{p(q)(1-R^*(p(q)))}$$

Лемма. Пусть носитель некоторой ограниченной функции $\varphi(t, x)$ совпадает с множеством $\{t\geqslant f(x)\}$. Тогда носитель функции $\psi(t, x)=L^{-1}_{q\to t}\times$ $\times L_{t\to p}\varphi$ также совпадает с указанным множеством. Если при этом функция $\varphi(t, x)$ непрерывна вместе со своими двумя первыми производными, то это же верно и для функции $\psi(t, x)$.

Доказательство леммы следует из свойств преобразования Лапласа и соотношения

$$\exp(-p(q)f(x))\equiv\exp\{-(q+d_0+d_1q^{-1}+\ldots)f(x)\}=$$
$$=\exp(-qf(x))\exp(-d_0f(x))\cdot(1+O(1/q))$$

4. Из леммы следует, что функция $w(t, x)$ будет иметь тот же фронт,

что и $u(t, x)$, и также будет непрерывна на этом фронте. Таким образом,

$$w(t, x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant f(x) \tag{4.1}$$

Из леммы ясно также, что будут выполняться равенства, аналогичные (2.2)

$$[\partial w/\partial x] = 0, \qquad [\partial w/\partial t] = 0 \tag{4.2}$$

Что касается функции $A(t, f(x))$, то она (снова в силу леммы) будет сосредоточена при $t \geqslant f(x)$.

Наконец, граничное значение для w находится из граничного условия (2.1)

$$w(t, 0) = L_{q\to t}^{-1} u^*(p, 0) = L_{q\to t}^{-1} v_0^*(p)/p \equiv w_0(t) \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь следующее частное решение уравнения (3.3):

$$w(t, x) = -\iint I(t-\tau, x-\xi) A(\tau, f(\xi))\, d\tau\, d\xi \tag{4.4}$$

где $I(t, x)$ — фундаментальное решение волнового оператора, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению $\partial^2 I/\partial t^2 - c^2 \partial^2 I/\partial x^2 = \delta(t)\delta(x)$.

Как известно, все фундаментальные решения волнового оператора могут быть получены из какого-то одного прибавлением общего решения однородного волнового уравнения: $F_1(t+x/c) + F_2(t-x/c)$.

Выберем такое фундаментальное решение $I(t, x)$, для которого функция (4.4) будет удовлетворять условию (4.1). При этом необходимо учитывать, что фронт $t=f(x)$ должен распространяться медленнее, чем характеристики [1]. Нетрудно видеть, что требуемым фундаментальным решением является функция

$$I(t, x) = -{}^1/_2 \quad \text{при} \quad x < -c|t|; \quad I(t, x) = 0 \quad \text{при} \quad x > -c|t| \tag{4.5}$$

Носитель функции (4.5) заштрихован на фиг. 1, *а*. На фиг. 1, *б* заштрихована область плоскости τ, ξ, по которой ведется интегрирование в (4.4). Ясно, что если точка (t, x) лежит перед фронтом, то в этой точке функция (4.4) оказывается равной нулю.

Из фиг. 2 видно, что другое часто употребляемое фундаментальное решение: $I_1(t, x) = {}^1/_2$ при $t > |x|/c$; $I_1(t, x) = 0$ при $t < |x|/c$ не может дать в (4.4) волну, распространяющуюся со скоростью, меньшей c. Можно показать, что использование I_1 вместо I привело бы к рассмотрению активной среды.

5. Итак, с помощью (4.5) функция (4.4) может быть переписана в виде

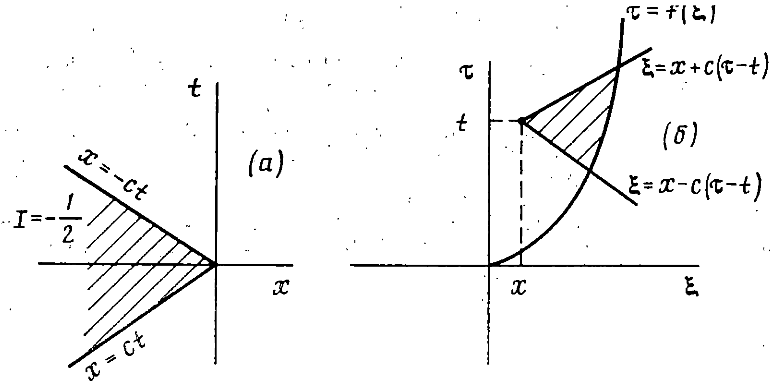
$$w = \frac{1}{2} \iint\limits_{D(t,x)} A(\tau, f(\xi))\, d\tau\, d\xi \tag{5.1}$$

где интегрирование ведется по области $D(t, x)$, заштрихованной на фиг. 1, *б* и задаваемой неравенствами

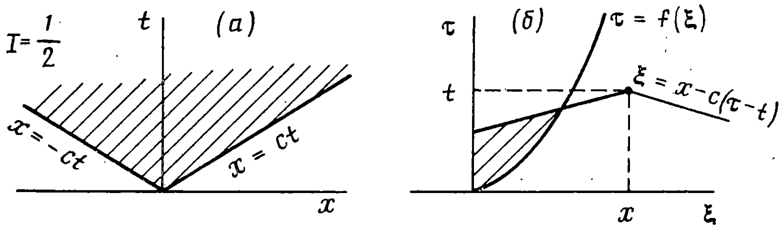
$$D(t, x) = \{(\tau, \xi):\ x + c|t-\tau| < \xi;\ \tau > f(\xi)\} \tag{5.2}$$

Далее, как уже отмечалось выше, фронт $t=f(x)$ в рассматриваемой задаче о плавном нагружении распространяется медленнее, чем характеристики (и не содержит кусков характеристик). Но тогда функция (5.1) оказывается непрерывной на фронте вместе со своими двумя первыми производными (см. также [4]). Таким образом, для функции (5.1) оказываются выполненными условия (4.1) и (4.2). Следовательно, осталось лишь подобрать функцию $f(x)$ так, чтобы удовлетворить граничному условию (4.3). Полагая в (5.1), (5.2) $x=0$, приходим к следующему нелинейному интегральному уравнению относительно f:

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{D(t,0)} A(\tau, f(\xi))\, d\tau\, d\xi = w_0(t) \tag{5.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Ясно, что, задавая произвольную функцию $f(\xi)$, касательные к графику которой во всех точках идут круче, чем характеристики, мы получим из (5.3) соответствующую локально ограниченную гладкую функцию $w_0(t)$. Затем по $w_0(t)$ восстанавливается граничное значение $v_0(t)$ (см. (4.3)):

$$v_0(t) = \overset{-1}{L}_{p\to t}\{pL_{t\to q(p)}w_0(t)\} = \{\overset{-1}{L}_{p\to t}L_{t\to q(p)}w_0(t)\}_t' \tag{5.4}$$

Представляет интерес решение не обратной, а прямой задачи о нахождении из интегрального уравнения (5.3) функции $f(x)$ по известному граничному значению. В общем случае эту задачу следует решать численно.

Замечание. Можно показать, что в случае материала без памяти, когда $A(\tau, f(\xi)) \equiv 1$, формула (5.3) эквивалентна соответствующим дифференциальным уравнениям из [1].

Наконец, рассмотрим интересный частный случай, когда $f(x) = x/a$ $(0 < a < c)$ и выясним, какие граничные нагрузки соответствуют семейству прямолинейных фронтов. В этом случае соответствующие граничные значения можно получить, не пользуясь формулой (5.4), а непосредственно из уравнения (3.1). Действительно, в рассматриваемом случае (3.1) запишем в форме

$$\frac{d^2u^*}{dx^2} - \left(\frac{p}{c\sqrt{1 - R^*(p)}}\right)^2 u^* = \frac{k}{E}\,\frac{\exp(-px/a)}{p(1 - R^*(p))}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u^*(p, x) = (k/E)p^{-3}(1 - R^*(p))^{-1}\{a^{-2} - c^{-2}(1 - R^*(p))^{-1}\}^{-1} +$$
$$+ A_1(p)\exp\{-pxc^{-1}(1 - R^*(p))^{-1/2}\} + A_2(p)\exp\{pxc^{-1}(1 - R^*(p))^{-1/2}\}$$

Однако, частным решением, соответствующим волне, распространяющейся со скоростью a, является

$$u^*(p, x) = (a^2k/E)p^{-3}\{1 - R^*(p) - (a/c)^2\}^{-1}\exp(-px/a)$$

Полагая здесь $x = 0$, выполняя обратное преобразование Лапласа и дифференцируя по t, получаем соответствующую граничную нагрузку

$$v_0(t) = \overset{-1}{L}_{p\to t}\{p^{-2}(1 - R^*(p) - (a/c)^2)^{-1}\}a^2k/E$$

Авторы благодарны Н. В. Зволинскому за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никитин Л. В., Тюреходжаев А. Н.* Демпфирование сухим трением динамических нагрузок в волокнистом композите // Механика композит. материалов. 1986. № 1. С. 28—37.
2. *Никитин Л. В.* Продольные колебания упругих стержней при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 137—145.
3. *Никитин Л. В.* Распространение волн в упругом стержне при наличии сухого трения // Инж. ж. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 126—130.
4. *Локшин А. А., Рок В. Е.* Ударные волны в линейных наследственных средах с пространственной дисперсией // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 61—66.

Москва

Поступила в редакцию 21.IV.1987