МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 624.07:534.1

АНАЛИЗ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

БРАТУСЬ А. С., ДИМЕНТБЕРГ М. Ф.

Рассматриваются свободные колебания стержня с поперечной трещиной, которая трактуется как разрез или «щель» (линейная задача). В [1] для невесомого стержня круглого сечения с сосредоточенной массой была предложена модель сосредоточенной изгибной податливости сечения с трещиной. Эта модель позволяет описывать динамику стержня в рамках гипотезы плоских сечений. Коэффициент податливости сечения с трещиной был найден в [1] как функция безразмерной глубины трещины на основе известного решения плоской задачи теории упругости. Аналогичная модель используется и в настоящей работе, но для сечения с трещиной вводится также коэффициент сдвиговой податливости. Результаты анализа собственных частот и форм колебаний могут быть использованы для вибродиагностики трещин в элементах машин и конструкций, в частности, роторах турбомашин, на основе данных об изменениях измеренных динамических характеристик.

1. Рассмотрим свободные колебаний стержня длины l. В свете возможных приложений к роторам турбомашин будем учитывать инерцию вращения поперечных сечений, имитирующую влияние угловых перемещений дисков, «размазанных» по длине ротора. Соответствующее уравнение задачи о собственных значениях имеет вид

$$(EJ(x)u'')''=\lambda[\gamma h(x)u-(J_0(x)u')'] \quad (0<x<l) \tag{1.1}$$

где $u(x)$ — поперечное перемещение сечения стержня, $EJ(x)$ — изгибная жесткость, $J_0(x)$ — погонный поперечный момент инерции «размазанных» дисков, $h(x)$ — площадь поперечного сечения, γ — плотность материала, $\lambda=\omega^2$ — квадрат собственной частоты. На концах стержня $x=0$ и $x=l$ считаются заданными самосопряженные краевые условия.

Пусть поперечное сечение $x=x_0$ стержня содержит трещину. Для описания динамических характеристик стержня в рамках гипотезы плоских сечений предлагается распространить на стержень с распределенной массой модель [1], предусматривающую введение коэффициентов податливости «ослабленного» сечения. Соответственно будем рассматривать следующую задачу о собственных значениях

$$(EJw'')''=\Lambda[\gamma hw-(\Phi(x)w']' \quad (0<x<x_0) \tag{1.2}$$

$$(EJv'')''=\Lambda[\gamma hv-(\Phi(x)v')'] \quad (x_0<x<l) \tag{1.3}$$

Здесь через $w(x)$ и $v(x)$ обозначены поперечные перемещения стержня соответственно слева и справа от трещины и $\Phi(x)=\gamma J_0(x)$. На концах стержня $x=0$ и $x=l$ краевые условия для функций $w(x)$ и $v(x)$ остаются теми же, что и для функции $u(x)$, а в сечении $x=x_0$ должны выполняться следующие условия

$$(Jw'')_{x=x_0}=(Jv'')_{x=x_0}, \quad (Jw'')'_{x=x_0}=(Jv')'_{x=x_0} \tag{1.4}$$

$$(w'-v')_{x=x_0}=-\varepsilon q_1(EJw'')_{x=x_0}, \quad (w-v)_{x=x_0}=\varepsilon q_2(EJw'')'_{x=x_0} \tag{1.5}$$

Условия (1.4) — это условия равновесия сил и моментов для стержня, расчлененного по сечению $x=x_0$ с трещиной, а условия (1.5) определяют «ослабление» сечения $x=x_0$ трещиной. Это ослабление характеризуется коэффициентами изгибной и сдвиговой податливости εq_1 и εq_2, причем в дальнейшем параметр ε считается малым (трещина малой глубины). При решении «прямой» задачи эти коэффициенты считаются известными, например, из экспериментов или из решения задачи теории упругости (одно из таких известных решений использовано в [1] для определения статического коэффициента изгибной податливости невесомого стержня εq_1). При решении «обратной» задачи вибродиагностики эти коэффициенты определяются по измеренным динамическим характеристикам стержня с трещиной.

2. Для вычисления собственных значений Λ стержня с трещиной воспользуемся методом возмущений [2]. Соответственно вводим разложения

$$\Lambda=\lambda+\varepsilon\mu+\ldots,\quad w=u+\varepsilon\psi(x)+\ldots,\quad v=u+\varepsilon\varphi(x)+\ldots \tag{2.1}$$

Из (1.2) и (1.3) следуют уравнения для функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, задающих первое приближение по ε к функциям $w(x)$ и $v(x)$:

$$(EJ\psi'')''-\lambda[\gamma h\psi-(\Phi\psi')']=\mu[\gamma hu-(\Phi u')'] \quad (0<x<x_0) \tag{2.2}$$

$$(EJ\varphi'')''-\lambda[\gamma h\varphi-(\Phi\varphi')']=\mu[\gamma hu-(\Phi u')'] \quad (x_0<x<l) \tag{2.3}$$

С учетом (2.1) краевые условия (1.4) и (1.5) принимают вид

$$(\psi''-\varphi'')_{x=x_0}=0,\qquad ((J\psi'')'-(J\varphi'')')_{x=x_0}=0 \tag{2.4}$$

$$(\psi'-\varphi')_{x=x_0}=-q_1(EJu'')_{x=x_0},\qquad (\psi-\varphi)_{x=x_0}=q_2(EJu'')'_{x=x_0} \tag{2.5}$$

Умножим уравнения (2.2) и (2.3) на функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению (1.1), и проинтегрируем результат от 0 до x_0 и от x_0 до l соответственно

$$\int_0^{x_0}[(EJ\psi'')''+\lambda(\Phi\psi')'-\lambda\gamma h\psi]u\,dx+\int_{x_0}^{l}[(EJ\varphi'')''+\lambda(\Phi\varphi')'-\lambda\gamma h\varphi]u\,dx=$$

$$=\mu\left[\int_0^l\gamma hu^2\,dx-\int_0^l(\Phi(x)u')u\,dx\right]$$

Произведя далее интегрирование по частям и воспользовавшись краевыми условиями на концах $x=0$ и $x=l$, а также условиями непрерывности (2.4) при $x=x_0$, получим

$$\int_0^{x_0}[(EJu'')''+\lambda(\Phi u')'-\lambda\gamma hu]\psi\,dx+\int_{x_0}^{l}[(EJu'')''+\lambda(\Phi u')'-\lambda\gamma hu]\varphi\,dx-$$

$$-(EJu'')_{x=x_0}(\psi'-\varphi')_{x=x_0}+(EJu'')'_{x=x_0}(\psi-\varphi)_{x=x_0}-(\Phi u)_{x=x_0}(\psi'-\varphi')_{x=x_0}+$$

$$+(\Phi u')_{x=x_0}(\psi-\varphi)_{x=x_0}=\mu\int_0^l[\gamma hu^2+\Phi(x)(u')^2]dx \tag{2.6}$$

Рассмотрим функцию $f(x)$, равную $\psi(x)$ при $0<x<x_0$, и $\varphi(x)$ при $x_0<x<l$. Тогда два первых интеграла в левой части (2.6) дадут интеграл

$$\int_0^l[(EJu'')''+\lambda(\Phi u')'+\gamma hu]f(x)\,dx$$

который равен нулю в силу (1.1). Для преобразования выражений, вычисленных при $x=x_0$ и стоящих в левой части в (2.6), используется условие (2.5). В итоге получаем следующую формулу для величины μ — поправки первого приближения к собственному значению стержня с трещиной в сечении $x=x_0$

$$\mu=-\varkappa_{-1}\{q_1[(EJu'')^2_{x=x_0}+\Phi(x_0)(EJu'')_{x=x_0}u(x_0)]-q_2[((EJj'')')^2_{x=x_0}+$$
$$+\Phi(x_0)(EJu'')'_{x=x_0}u'(x_0)]\},\quad \varkappa=\int_0^l[\gamma hu^2+\Phi(x)(u')^2]dx \tag{2.7}$$

3. Полученный результат может быть использован для решения задачи вибродиагностики об обнаружении трещины и определении местоположения и глубины. Пусть $\nu_i=\omega_i^2$ — квадраты собственных частот неповрежденного стержня, а $u_i(x)$ — соответствующие собственные формы колебаний ($i=1, 2, \ldots$). Без ограничения общности можно полагать собственные функции $u_i(x)$ нормированными таким образом, что

$$\int_0^l[\gamma hu_i^2+\Phi(x)(u_i')^2]dx=1$$

Введем обозначения для момента и перерезывающей силы в сечении с трещиной $M_i(x_0)=(EJu_i'')_{x=x_0}$, $Q_i(x_0)=Q_i(x_0)=(EJu_i'')'_{x=x_0}$. Из (2.7) следует, что снижение квадрата i-й собственной частоты вследствие присутствия трещины определяется формулой

$$\mu_i=2\omega_i\delta\omega_i=-q_1^i[M_i^2(x_0)+\Phi(x_0)M_i(x_0)u_i(x_0)]-$$
$$-q_2^i[Q_i^2(x_0)+\Phi(x_0)Q_i(x_0)u_i'(x_0)] \tag{3.1}$$

Здесь $\delta\omega_i$ — изменение i-й собственной частоты. Отметим, что в (3.1), вообще говоря, предполагается зависимость коэффициентов податливости от частот колебаний. В частном случае, когда инерция вращения поперечных сечений не учитывается, величина $\delta\omega_i$ пропорциональна взвешенной сумме квадратов момента и перерезывающей силы в сечении с трещиной.

Формула (3.1) позволяет проводить анализ чувствительности частот свободных колебаний к положению и глубине трещины. В частности, изменение собственной частоты $\delta\omega_i$ наиболее значительно, если трещина расположена в сечениях, где одна из величин $M_i(x_0)$ или $Q_i(x_0)$ максимальна.

В общем случае, когда q_1^i, q_2^i зависят от частоты, а следовательно, и от i, должна быть известна зависимость этих коэффициентов от глубины трещины. В противном случае увеличение числа замеренных $\delta\omega_i$ будет сопровождаться ростом числа неизвестных q_1^i, q_2^i. В первом приближении, однако, можно считать q_1, q_2 независящими от частоты; такое приближение отвечает, в частности, модели невесомого вала [1] с сосредоточенными массами (и, быть может, моментами инерции) дисков. В этом случае для определения трех неизвестных q_1, q_2, x_0 в принципе достаточно измерить изменения трех собственных частот. Наконец, если в экспериментах можно наряду с $\delta\omega_i$ измерить с достаточной точностью собственные функции поврежденного стержня, то для оценки коэффициентов q_1, q_2 по данным виброиспытаний можно привлечь соотношения (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dimaragonas A. D., Papadopoulos C. A.* Vibrations of cracked shafts in bending // J. Sound and Vibration. 1983. V. 91. № 4.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.XII.1986