МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 539.3:534.1

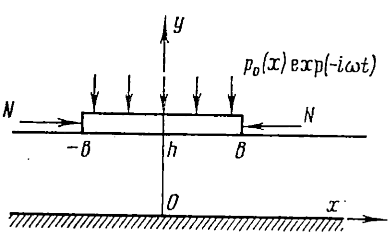
Е. И. ВОРОВИЧ, О. Д. ПРЯХИНА

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ БАЛКА — СЛОЙ

При гармонических колебаниях абсолютно жесткого штампа достаточно большой массы, контактирующего без трения с упругим слоем или полосой, при частотах, меньших частоты отпирания волновода – первой критической частоты возбуждения волн в слое,– имеют место изолированные резонансы, на которых амплитуда вынужденных колебаний становится бесконечной [1].

В публикуемой работе для анализа влияния упругости штампа на возникновение изолированных частот рассматривается плоская контактная задача о колебаниях упругого слоя (полосы) и связанной с ней без трения упругой балки. Резонансы в этой задаче также имеют место, начиная с некоторого соотношения толщины балки и полосы. На основе полученного решения дается анализ динамической реакции упругой полосы для определения возможности использования решений, основанных на гипотезе Винклера.

1. Основные уравнения. Пусть упругая балка постоянного сечения действует на упругую полосу, жестко защемленную по нижней грани, при отсутствии трения в области контакта. Полоса занимает область $0 \leqslant y \leqslant h$, $-\infty < x < \infty$, длина балки $2a$, концы балки шарнирно закреплены.



Фиг. 1

На балку действует распределенная поперечная нагрузка интенсивности $p_0(x)e^{-i\omega t}$ и осевая продольная сила N, постоянная по длине, причем $N>0$ для сжимающей силы (фиг. 1).

Влияние продольных сил оказывается существенным, если их абсолютная величина имеет один порядок с величиной усилий N_*, вызывающих потерю устойчивости балки. Анализ точных решений показывает, что особенности прогибов и изгибающих моментов в задачах продольно-поперечного изгиба зависят от безразмерного параметра гибкости $n=N/N_*$, где $N_*^{\min}=4\pi^2EJ/b^2$, $0\leqslant n\leqslant 1$. Тогда основное уравнение продольно-поперечных изгибных колебаний балки в амплитудных безразмерных параметрах (множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен) имеет вид

$$u^{(4)}+\alpha u^{(2)}-R\Omega^2 u=p-\beta q \tag{1.1}$$

$$\alpha={}^1/_4\pi^2 n a^{-2},\ \beta=12MH^{-3},\ \Omega^2=\rho\omega^2h^2\mu^{-1},\ a=bh^{-1}$$

$$R=R_0H\beta,\ R_0=\rho_0\rho^{-1},\ H=h_0h^{-1},\ M=\mu E^{-1}$$

Здесь ρ_0, h_0, E — соответственно плотность, толщина и модуль Юнга балки, ρ, h, μ — плотность, толщина и модуль упругости полосы; ω — частота колебаний; $u(x)$ — прогиб балки, a — полудлина балки, отнесенные к h, $p(x)$ — заданная распределенная нагрузка $p(x)=p_0(x)h^3/(EJ)$, $n(x)$ — жесткость сечения на изгиб, $q(x)$ — нормальные напряжения, возникающие в области контакта или реакция упругого основания, отнесенная к μ и меняющаяся по длине балки. Эта функция определяется при решении стандартной динамической контактной задачи о действии абсолютно жесткого штампа на указанную среду.

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\,q(\xi)\,d\xi = u(x), \qquad |x| \leqslant a \tag{1.2}$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} K(u)\,e^{-iux}\,du$$

Контур σ выбирается в соответствии с принципом излучения [2]. Функция $K(u)$ определяется типом среды и является аналитической, четной, вещественной при вещественных аргументах и имеет поведение на бесконечности вида $c|u|^{-1}$, $|u| \to \infty$.

Для упругой полосы с жестко защемленной нижней гранью и при заданных вертикальных смещениях $u(x)$ на поверхности среды в области $|x| \leqslant a$ (вне этой области поверхность свободна от нагрузок) функция $K(u)$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
K(u) = {}^1/_4\Delta^{-1}\varkappa_2{}^2\sigma_1(\sigma_1\sigma_2 \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{ch}\sigma_2 - u^2 \operatorname{ch}\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_2)\\
\Delta(u) = (2u^4 - u^2\varkappa_2{}^2)\sigma_1\sigma_2 - (2u^4 - u^2\varkappa_2{}^2 +\\
+ {}^1/_4\varkappa_2{}^4)\sigma_1\sigma_2 \operatorname{ch}\sigma_1 \operatorname{ch}\sigma_2 + u^2[2u^4 - u^2(\varkappa_1{}^2 + 2\varkappa_2{}^2) +\\
+ {}^1/_4\varkappa_2{}^4 + \varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2] \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_2, \quad \sigma_2 = u^2 - \varkappa_k{}^2\\
\operatorname{Re}\sigma_k \geqslant 0, \ \operatorname{Im}\sigma_k \leqslant 0 \ (k=1,2), \ \varkappa_1{}^2 = \rho\omega^2/(\lambda+2\mu)\\
\varkappa_2{}^2 = \rho\omega^2/\mu = \Omega^2, \ K(u) \to c/|u|, \ |u| \to \infty, \ c = 1-\nu
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Кроме того, в случае шарнирного опирания балки должны выполняться условия

$$u(x) = 0, \ d^2u(x)/dx^2 = 0, \ x = \pm a, \ y = 1 \tag{1.4}$$

2. Построение решения. Не нарушая общности, рассмотрим два случая нагрузки $p(x)$: кососимметричной (задача 1) и симметричной (задача 2) соответственно.

Решение (1.1) ищем в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{a} \tag{2.1}$$

$$u = \sum_{k=1,3,5,\ldots} b_k \cos\frac{\pi k x}{2a} \tag{2.2}$$

которые удовлетворяют граничным условиям задачи (1.4).

В [3] методом фиктивного поглощения построено решение $t(x, \eta)$ уравнение (1.2) для правой части $u(x) = e^{-i\eta x}$ ($\operatorname{Im}\eta = 0$).

На основании результатов этой работы для смещения $u(x)$ вида (2.1), (2.2) контактные давления будут определяться соотношениями

$$q(x) = \sum_k b_k q_k(x) \tag{2.3}$$

Задачи 1 и 2 соответственно

$$q_k(x) = {}^1/_2 i[t(x, -\theta_k) - t(x, \theta_k)], \ \theta_k = \pi k/a \ (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

$$q_k(x) = {}^1/_2[t(x, \theta_k) + t(x, -\theta_k)], \ \theta_k = \pi k/(2a) \ (k = 1, 3, 5, \ldots) \tag{2.5}$$

Функция $t(x, \eta)$ имеет следующий вид

$$t(x) = t(x, \eta) = K^{-1}(\eta)\exp(-i\eta x)[\operatorname{erf}\sqrt{(B+i\eta)(a-x)} +$$

$$+\operatorname{erf}\sqrt{(B-i\eta)(a-x)}-1]+\frac{1}{c}\frac{\exp[-B(a+x)+i\eta a]}{\sqrt{\pi(a+x)}}\sqrt{B+i\eta}+$$

$$+\frac{1}{c}\frac{\exp[-B(a-x)-ia\eta]}{\sqrt{\pi(a-x)}}\sqrt{B+i\eta}+ \tag{2.6}$$

$$+\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^*[\sqrt{B-i\eta}\exp(-i\eta a)\Phi_i(\eta,x)+\sqrt{B+i\eta}\exp(i\eta a)\Phi_i(-\eta,-x)]-$$

$$-i\sum_{k=1}^{2n}C_k(\eta)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^*\sum_{i=1}^{n}\beta_i^*[F_j(x_k)\Phi_i(-p_j,x)+F_j(-x_k)\Phi_i(-p_j,-x)]-$$

$$-i\frac{\exp[-B(a-x)]}{\sqrt{\pi(a-x)}}\sum_{k=1}^{2n}C_k(\eta)\sum_{j=1}^{n}\alpha_jF_j(x_k)-$$

$$-i\frac{\exp[-B(a+x)]}{\sqrt{\pi(a+x)}}\sum_{k=1}^{2n}C_k(\eta)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^*F_j(-x_k)$$

$$F_j(x_k)=\exp[ip_j(a-x_k)]/\sqrt{B-ip_j},\qquad \alpha_j^*=\alpha_j/2p_j,\qquad \beta_i^*=\beta_i/(2z_i)$$

$$\Phi_i(\eta,x)=\frac{\sqrt{B+iz_i}}{z_i-\eta}\exp[-iz_i(a-x)]\operatorname{erf}\sqrt{(B+iz_i)(a-x)}+$$

$$+\frac{\sqrt{B-iz_i}}{-z_i-\eta}\exp[-iz_i(a-x)][1-\operatorname{erf}\sqrt{(B-iz_i)(a-x)}$$

$$\alpha_j=\prod_{k=1}^{n}(p_j^2-z_k^2)\prod_{\substack{k\neq j\\k=1}}^{n}(p_j^2-p_k^2)^{-1},\qquad \beta_i=\prod_{k=1}^{n}(z_i^2-p_k^2)(z_i^2-z_k^2)^{-1}$$

Здесь z_k, p_k — вещественные и комплексные нули, полюса $K(u)$, имеющей вид (1.3), расположенные выше контура σ. Коэффициенты $C_k(\eta)$ определяются из линейной алгебраической системы уравнений порядка $2n$ вида

$$\sum_{k=1}^{2n}C_k\{\sqrt{B+iu}\exp(iua)Z(u,x_k)+\sqrt{B-iu}\exp(-iua)Z(-u,-x_k)\}=$$

$$=\frac{1}{ic(u-\eta)}\{\exp[ia(u-\eta)][\sqrt{(B+iu)(B-i\eta)}\operatorname{erf}\sqrt{2a(B+iu)}+$$

$$+\sqrt{B^2+\eta^2}\operatorname{erf}\sqrt{2a(B-i\eta)}-\sqrt{B^2+\eta^2}]-$$

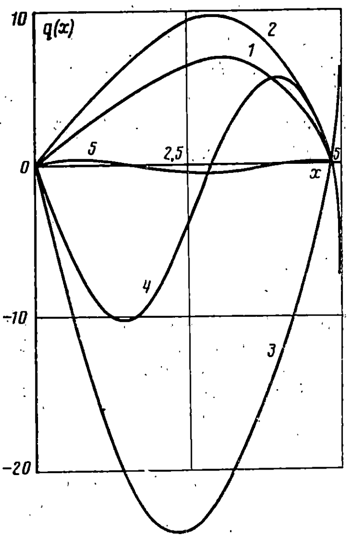
$$-\exp[-ia(u-\eta)][\sqrt{(B-iu)(B+i\eta)}\operatorname{erf}\sqrt{2a(B-iu)}+$$

$$+\sqrt{B^2+\eta^2}\operatorname{erf}\sqrt{2a(B+i\eta)}-\sqrt{B^2+\eta^2}]\}$$

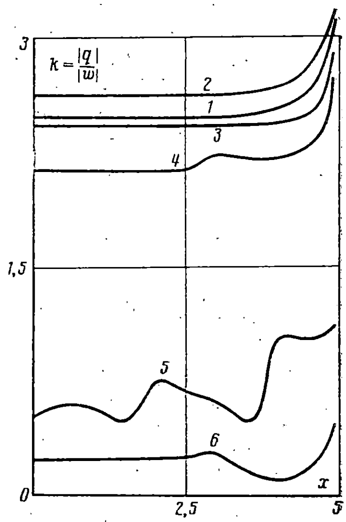
$$u=\pm z_l\quad(l=1,2,\ldots,n)$$

$$Z(u,x_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\frac{\exp[ip_j(a-x_k)]}{(u+p_j)2p_j\sqrt{B-ip_j}}$$

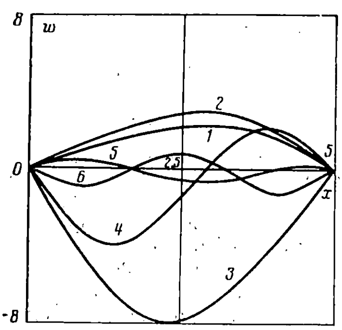
Подставляя (2.3) в исходное уравнение (1.1), умножая обе части полученного соотношения на $\sin(\pi lx/a)$ (1) или $\cos(\pi lx/a)$ (2) и интегрируя по x в пределах от $-a$ до a, получаем следующую систему линейных



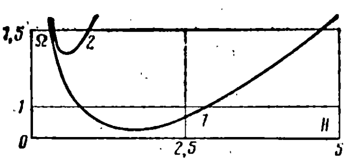
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5

алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов b_k:

$$a_l b_l+\beta\sum_k d_{kl}b_k=P_l \tag{2.7}$$

Задачи 1 и 2 соответственно:

$$a_l=\left(\frac{\pi l}{a}\right)^4-\alpha\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2-R\Omega^2,\qquad d_{kl}=\frac{1}{2ia}\int_{-a}^{a}q_k(x)\sin\frac{\pi lx}{a}dx \tag{2.8}$$

$$P_l=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}P(x)\sin\frac{\pi lx}{a}dx\qquad (k=1,2,3,\ldots;\ l=1,2,3\ldots)$$

$$a_l=\left(\frac{\pi l}{2a}\right)^4-\left(\frac{\alpha\pi l}{2a}\right)^2-R\Omega^2,\qquad d_{kl}=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}q_k(x)\cos\frac{\pi lx}{2a}dx \tag{2.9}$$

$$P_l=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}P(x)\cos\frac{\pi lx}{2a}dx\qquad (k=1,3,5\ldots,l=1,3,5,\ldots)$$

Коэффициенты матрицы $D=\|d_{kl}\|$, определяемые формулами (2.8), (2.9), вычисляются непосредственным интегрированием с учетом соотношений (2.4)–(2.6), являются функциями от аргументов Ω, a, ν (коэффициент Пуассона) и здесь не приводятся.

Для построения приближенного решения $u(x)$ и $q(x)$ достаточно взять в (2.1), (2.2), (2.3), (2.7) всего несколько членов ряда, чтобы обеспечить заданную точность, поскольку коэффициенты b_k достаточно быстро стремятся к нулю с ростом параметра k.

Отметим, что равнодействующая контактных давлений или реакция основания для задачи 1 в силу нечетности функции $q(x)$ равна нулю, а для задачи 2 определяется выражением

$$Q=a\sum_{k=1,3,5}^{\infty} b_k d_{k,0}$$

3. Анализ решения. Результаты расчетов. На фиг. 2, 3 приводятся графики амплитуд контактных давлений $q(x)$ и прогибов $u(x)$ для случая стальной балки, лежащей на бетонном основании при $P(x)=X$ (задача 1) в зависимости от частоты $\Omega=0$; 0,5; 1; 1,4 (кривые *1–4* соответственно). При $\Omega>\pi/2$ функции $q(x)$ и $u(x)$ комплексные, поэтому кривые *5*, *6* иллюстрируют $\operatorname{Re}q$, $\operatorname{Re}u$ для $\Omega=2{,}6$, $\Omega=3{,}0$. При этом $M=0{,}035$, $R_0=3{,}5$, $H=1$, $a=5$, $n=0{,}5$, $\nu=0{,}1$.

На фиг. 4 дается отношение $R=|q(x)|/|u(x)|=|q(x,\Omega)/u(x,\Omega)|$ для различного набора частот. Анализ результатов показывает, что в статике ($\Omega=0$) в качестве

H	Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_1^3	Ω_2^3
0,5	1,2	1,31	1,2	1,34	1,16	1,28
1,0	0,91	1,5	0,89	1,5	0,9	1,48
4	1,27	–	1,28	–	1,26	–

упругого основания можно использовать основание Винклера. При этом контактные давления будут пропорциональны прогибу ($q=-ku$) для всех точек области контакта, исключая границу. Например, для стальной балки на бетонном основании (безразмерный) коэффициент податливости $k=2{,}45$. В динамике же, как это видно из фиг. 4, не удается подобрать такого единого k, чтобы для всех частот реакция основания была пропорциональна прогибу балки. Однако в области $\Omega\leqslant\Omega_*$ ($\Omega_*=\pi/2$ для слоя) для каждой конкретной частоты можно указать свой коэффициент податливости $k(\Omega)$ в области $|x|\leqslant a-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$. При $\Omega>\Omega_*$, т. е. когда в системе появляются незатухающие колебания, использование гипотезы Винклера приводит к заведомо неверным результатам.

Резонансные системы находятся из равенства нулю определителя системы (2.7) $\Delta=\det\|\delta_{kl}a_l+\beta d_{kl}\|_{k,\,l}=0$ (δ_{kl} – символ Кронекера). Как и в случае абсолютно жесткого штампа, изолированные резонансы появляются только в области $0\leqslant\Omega\leqslant\pi/2$. На фиг. 5 дается график зависимости резонансной частоты от $H=h_0/h$. Очевидно, что с ростом параметра H значение резонансной частоты сначала падает, а затем растет. Для каждого конкретного значения $H\in[0{,}3;\ 5]$ в области $0\leqslant\Omega\leqslant1.3$ возможен только один резонанс (кривая *1*), а в области $1{,}3\leqslant\Omega\leqslant1{,}57$ появляется еще одна резонансная кривая (возникает второй резонанс).

Сопоставление резонансных явлений при колебаниях упругой балки на упругом слое (полосе) и на основании Винклера $k=k(\Omega)$ показывает, что винклеровское основание порождает также две резонансных кривых в области $[0,\ \pi/2]$, практически совпадающих с кривыми *1*, *2* на фиг. 5.

В таблице приведены значения резонансных частот для упругого слоя $\Omega_{1,2}^1$ и основания Винклера: $\Omega_{1,2}^2$ для $k=k(0)$ и $\Omega_{1,2}^3$ для $k=k(\Omega)$ для сравнения (балка – сталь, слой – бетон).

Анализ показывает, что для приближенного расчета изолированных резонансов с достаточной степенью точности можно использовать основание Винклера.

Авторы благодарят И. И. Воровича за внимание к работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М.* Динамические свойства упругой полуограниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 128–133.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для классических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.

Ростов-н/Д

Поступила в редакцию
17.II.1987