

УДК 539.375

Ш. А. МУХАМЕДИЕВ, Л. В. НИКИТИН

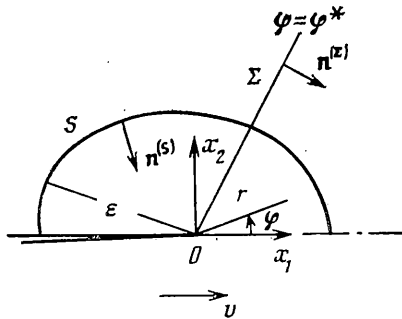
## К АНАЛИЗУ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ У КРАЯ РАСТУЩЕЙ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

В [1-3] и других работах, посвященных изучению квазистатического или динамического развития трещин в упругопластических материалах, на основе той или иной теории пластичности построены асимптотические поля напряжений и деформаций у вершины трещины при ее установившемся движении, проанализированы схемы с непрерывным напряженно-деформированным состоянием вблизи конца растущей трещины. В данной работе исследуется новая схема с наличием поверхностей сильного разрыва в поле напряжений у края трещины. Такая схема необходима при некоторых значениях скорости роста трещины. Анализ проводится в рамках теории малых деформаций и в пренебрежении тепловыми эффектами. Результаты справедливы для произвольной теории изотропно-упрочняющегося материала с упругим законом разгрузки.

**1. Основные соотношения.** Рассмотрим трещину продольного сдвига, распространяющуюся в неподвижной системе отсчета с постоянной скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $x$ . У края трещины выполняется условие стационарности

$$\partial w / \partial t = -v (\partial w / \partial x) \quad (1.1)$$

где  $w$  — единственное отличное от нуля перемещение в направлении фронта трещины,  $t$  — время. Введем в плоскости, нормальной к фронту трещины, подвижные декартовы  $x_1, x_2$  и полярную  $r, \varphi$  системы координат с началом в кончике трещины и осью  $x_1$ , направленной вдоль скорости края трещины (фиг. 1). Для напряженно-деформированного состояния с учетом (1.1) имеем



Фиг. 1

$$w = w(x_1, x_2), \quad \gamma_i = w_{,i}, \quad \gamma_{1,2} - \gamma_{2,1} = 0 \quad (1.2)$$

$$\tau_i = \tau_i(x_1, x_2), \quad \tau_{i,i} = \rho v^2 \gamma_{1,1}$$

где  $\rho$  — плотность,  $\gamma_i$  — сдвиговые деформации,  $\tau_i$  — соответствующие им касательные напряжения. Здесь и в дальнейшем индекс  $i$  принимает значения

1, 2, индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Пусть  $\tau = (\tau_i \tau_i)^{1/2}$  и  $\gamma = (\gamma_i \gamma_i)^{1/2}$  — интенсивности касательных напряжений и сдвиговых деформаций,  $\tau_i^*$  и  $\gamma_i^*$  — компоненты напряжения и деформации, соответствующие началу процесса разгрузки ( $\tau_* = (\tau_i^* \tau_i^*)^{1/2}$ ,  $\gamma_* = (\gamma_i^* \gamma_i^*)^{1/2}$ ). Ограничимся рассмотрением сингулярного состояния у края трещины, где  $\gamma$  и  $\gamma_*$  неограниченно возрастают с приближением к кончику трещины. Рассмотрим изотропный упругопластический материал, характеризующийся при больших  $\gamma$  и  $\gamma_*$  линейным упрочнением с модулем  $\eta$ . Разгрузку считаем происходящей также по линейному закону с модулем упругости  $\mu$  ( $\mu > \eta$ ). Тогда для пластического нагружения и

разгрузки в рамках деформационной теории пластичности при  $\gamma$  и  $\gamma_* \rightarrow \infty$  имеем соответственно

$$\tau_i = \eta \gamma_i \quad (1.3)$$

$$\tau_i = \mu (\gamma_i - C^2 \gamma_i^*) \quad (C = (1 - \eta/\mu)^{1/2}) \quad (1.4)$$

Берега трещины будем считать свободными от напряжений

$$\tau_2(x_1, 0) = 0 \quad (x_1 < 0) \quad (1.5)$$

В силу симметрии имеем

$$w(x_1, x_2) = -w(x_1, -x_2) \quad (1.6)$$

что дает возможность ограничиться рассмотрением области  $x_2 \geq 0$ . У вершины трещины могут реализовываться различные состояния материала, разделенные в асимптотике ( $r \rightarrow 0$ ) лучами  $\varphi = \text{const}$ . Пусть трещина растет со скоростью, промежуточной между скоростями распространения упругих и пластических возмущений

$$(\eta/\rho)^{1/2} \leq v < (\mu/\rho)^{1/2} \quad (1.7)$$

В секторе активного пластического нагружения (если он существует) и секторе разгрузки из (1.2)–(1.4) для  $w$  справедливы уравнения

$$B^2 w_{,11} - w_{,22} = 0, \quad \tau_{,1} < 0 \quad (1.8)$$

$$A^2 w_{,11} + w_{,22} = C^2 \gamma_{2,2}^*(x_2), \quad \tau(x_1, x_2) < \tau_*(x_2) \quad (1.9)$$

где введены обозначения  $B = (\rho v^2 / \eta - 1)^{1/2}$ ,  $A = (1 - \rho v^2 / \mu)^{1/2}$ .

Будем анализировать схему напряженно-деформируемого состояния, в которой пластическое нагружение происходит на линии  $\varphi = \varphi^*$  — сильно-го разрыва напряжений. Перед линией разрыва ( $\varphi < \varphi^*$ ) состояние материала несингулярно, за линией ( $\varphi > \varphi^*$ ) реализуется состояние разгрузки. Обоснование выбора этой схемы приведено в п. 3.

2. Решение задачи. Для скорости  $G_0$  поглощения энергии в кончике трещины справедливо выражение [4], которое с учетом (1.1) может быть записано в виде

$$G_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S 2E_i n_i^{(S)} dS \quad (2.1)$$

где  $S$  — движущийся с кончиком трещины и охватывающий его в верхней полуплоскости контур произвольной формы с максимальным радиусом  $\varepsilon$ ,  $n_i^{(S)}$  — компоненты вектора единичной нормали к  $S$ , направленного внутрь области, содержащей вершину трещины (фиг. 1)

$$E_i = -v \left( (e + \rho v^2 \gamma_1^2 / 2) \delta_{i1} - \gamma_1 \tau_i \right) \quad (2.2)$$

$$\left( e = \int \tau_i d\gamma_i, \delta_{11} = 1, \delta_{21} = 0 \right)$$

— компоненты вектора потока энергии-импульса в плоскости подвижных координат  $x_1, x_2$ . В (2.2) учитываются лишь главные сингулярные члены асимптотики. Видно, что выражение (2.1) сохраняет свой смысл и при наличии выходящих из кончика трещины линий  $\Sigma$  разрыва напряжений, которые могут являться носителями сосредоточенных источников энергии с сингулярной по  $r$  плотностью  $G_\Sigma$ :

$$G_\Sigma = [E_i] n_i^{(\Sigma)} \quad (2.3)$$

При этом полная скорость выделения энергии на  $\Sigma$  должна быть ограниченной. В (2.3)  $n_i^{(\Sigma)}$  — компоненты вектора единичной нормали к  $\Sigma$ , направленного в сторону распространения трещины ( $n_1^{(\Sigma)} > 0$ ; фиг. 1). Символ  $[ \cdot ]$  означает скачок соответствующей величины при переходе

через  $\Sigma$  в направлении  $n_i^{(2)}$ . Будем требовать, чтобы на  $\Sigma$  выполнялись условия непрерывности перемещений и потока импульса

$$[w]=0, \quad [\tau_i n_i^{(2)} - \rho v^2 \gamma_i n_i^{(2)}] = 0 \quad (2.4)$$

Возвращаясь к задаче об определении напряженно-деформированного состояния в окрестности края трещины, предположим, что состояние разгрузки доходит до берега трещины, занимая сектор  $\pi \geq \varphi > \varphi^*$ . Тогда деформации в нем выражаются в виде

$$\begin{aligned} \mu \gamma_i &= k \Gamma_i (A x_2)^{-\lambda}, \quad \mu \gamma_i^* = k \Gamma_i^* (A x_2)^{-\lambda} \\ \Gamma_1 &= A^2 C^{-2} \sin(\Lambda^* + \alpha^*) (\sin \alpha^*)^{\lambda-1} \\ \Gamma_1^* &= A^2 C^{-2} \sin(\Lambda^* + \alpha^*) (\sin \alpha^*)^{\lambda-1} \\ \Gamma_2^* &= -A C^{-2} \cos(\Lambda^* + \alpha^*) (\sin \alpha^*)^{\lambda-1} \\ \Lambda &= \lambda(\pi - \alpha), \quad \Lambda^* = \lambda(\pi - \alpha^*), \quad \lambda > 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = A \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \alpha^* = A \operatorname{tg} \varphi^*, \quad \varphi^* < \varphi \leq \pi$$

где  $k = \text{const}$  — аналог коэффициента интенсивности напряжений. Соотношения (2.5) являются сингулярным решением со степенной особенностью уравнения (1.9), удовлетворяющим на берегу трещины условию (1.5), а на линии разрыва  $\varphi = \varphi^*$  условиям

$$\gamma_1 \cos \varphi^* + \gamma_2 \sin \varphi^* = 0 \quad (2.6)$$

$$(\tau_1 - \rho v^2 \gamma_1) \sin \varphi^* - \tau_2 \cos \varphi^* = 0$$

вытекающим из (2.4) с учетом несингулярности состояния при  $\varphi < \varphi^*$ .

Рассмотрим локальную скорость выделения энергии  $G_2$  при конечных углах подхода линии разрыва  $\varphi = \varphi^*$  к берегу трещины или ее продолжению ( $\sin \varphi^* \neq 0$ ). Учитывая (2.2) и второе соотношение (2.4), выражение (2.3) можно представить в виде  $G_2 = v n_1^{(2)} (e - \rho v^2 \gamma_1^2 / 2)$ , где сингулярные величины  $\gamma_i$  и  $e = \mu(\gamma^2 + C^2 \gamma^{*2} - 2C^2 \gamma_i \gamma_i^*) / 2$  определены при  $\varphi = \varphi^* + 0$ . Для решения (2.5) получаем

$$\begin{aligned} 4\mu G_2 &= k^2 A^2 C^{-2} v (A x_2)^{-2\lambda} (\sin \alpha^*)^{-2+2\lambda} (\sin \varphi^*) \times \\ &\times (1 - C^2 + A^2 + (1 - A^2) \cos(2\Lambda^* + 2\alpha^*) - C^2 \cos 2\Lambda^*) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя условие (1.7), которое переписывается в виде

$$0 < A^2 \leq C^2 < 1 \quad (2.8)$$

легко видеть, что  $G_2 > 0$  при  $\lambda = 0,5$ . Это накладывает ограничение

$$0 < \lambda < 0,5 \quad (2.9)$$

на показатель особенности в решении (2.5), так как случай  $\lambda \geq 0,5$  приводит к бесконечно большой полной скорости выделения энергии на  $\Sigma$ .

Построенное решение (2.5), (2.8), (2.9) должно удовлетворять условию разгрузки

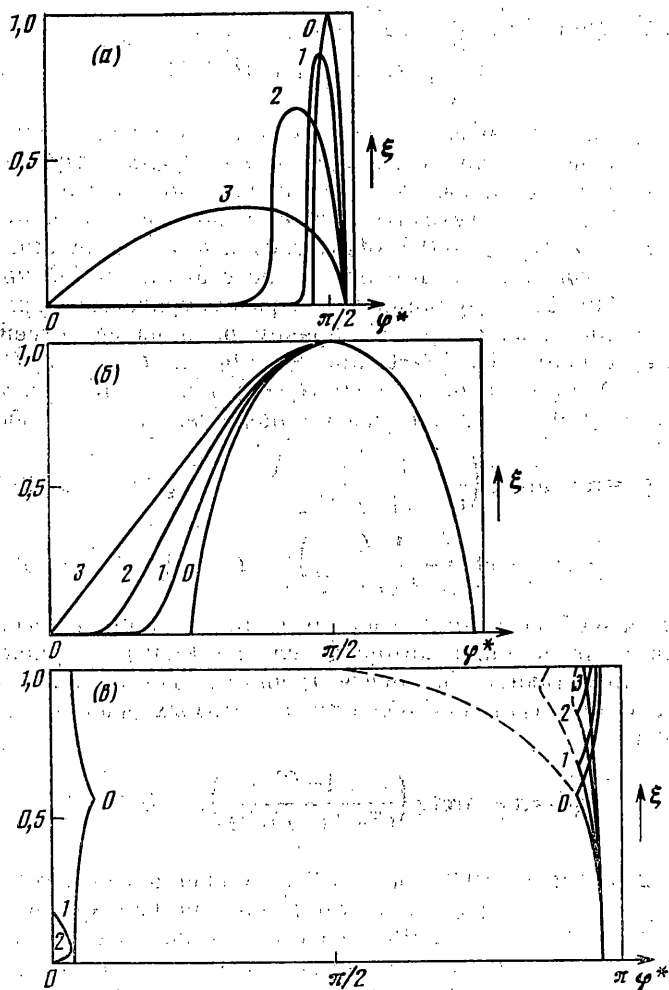
$$T(\varphi, \varphi^*) \leq T_*(\varphi^*) \quad (\varphi^* \leq \varphi \leq \pi) \quad (2.10)$$

$$T = ((\Gamma_i - C^2 \Gamma_i^*) (\Gamma_i - C^2 \Gamma_i^*))^{1/2}, \quad T_* = (1 - C^2) (\Gamma_i^* \Gamma_i^*)^{1/2}$$

Для конкретной модели материала (т. е. отношения  $\eta/\mu$ ), заданных скорости распространения трещины  $v$  и показателе сингулярности  $\lambda$  найдем допустимые диапазоны изменения угла  $\varphi^*$ . С этой целью для  $A$ ,  $C$  и  $\lambda$ , удовлетворяющим ограничениям (2.8), (2.9), определим параметрически зависящую от  $C$  и  $\lambda$  функцию  $\varphi^{**}$ :

$$\varphi^* = \varphi^{**}(\xi, C, \lambda), \quad \xi = A^2 C^{-2}, \quad 0 < \xi \leq 1 \quad (2.11)$$

которая в плоскости  $\varphi^*$ ,  $\xi$  отделяет область допустимых решений от области, где условие (2.10) нарушается.



Фиг. 2

На фиг. 2, а-в приведены графики функции  $\varphi^{**}$ , полученные в результате численного анализа неравенства (2.10) для  $C^2=0,1; 0,5; 0,9$ . Вычисления проводились для значений показателя сингулярности  $\lambda$ , равных  $+0, 0,1, 0,3$  и  $0,5$ . В случае  $\lambda=+0$  подразумевается предельная функция  $\varphi_0^{**}$ , полученная из (2.11) при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\xi \neq 0$ ). При фиксированных  $C$  и  $\lambda$  условие (2.10) нарушается в односвязной области, которая для  $C^2 \leq 0,5$  ограничена кривой  $\varphi^{**}$  и отрезком, отсекаемым этой кривой на оси  $\xi=0$  (фиг. 2, а, б), а для  $C^2 > 0,5$  содержит  $\varphi^* = \pi/2$  и ограничена двумя ветвями  $\varphi^{**}$ , отрезками на осях  $\xi=0, \xi=1$  и, быть может,  $\varphi^*=0$  (фиг. 2, в). Область допустимых решений дополняет указанную область до прямоугольника  $0 < \varphi^* < \pi, 0 < \xi \leq 1$  и включает в себя кривую  $\varphi^{**}$ .

Проанализируем некоторые асимптотические свойства функции  $\varphi^{**}$ . График функции  $\varphi_0^{**}$  ( $\lambda=+0$ ) представляет собой совокупность кривой

$$\varphi^* = \pi - \operatorname{arctg} D_1, \quad 0 < \xi \leq C^{-2}/2 \quad (2.12)$$

$$\varphi^* = \pi - \operatorname{arctg} D_2, \quad C^{-2}/2 < \xi \leq 1 \quad (2.13)$$

$$D_1 = C^{-2} \left( (1 - C^2 \xi)^2 / (1 - C^2)^2 - \xi^2 \right)^{-1/2}$$

$$D_2 = C^{-2} \xi^{-1} (C^2 / (1 - C^2)^2 - 1)^{-1/2}$$

и кривой, полученной отражением (2.12), (2.13) относительно оси  $\varphi^* = \pi/2$ . При  $\xi \rightarrow 0$  функция  $\varphi^{**}$  имеет два (не зависящих от  $\lambda$ ) предела.

Один из них (при  $\varphi^* > \pi/2$ ) выражается в виде

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi^{**} = \pi - \operatorname{arctg}(C^{-2} - 1)$$

а другой (при  $\lambda \neq +0$ ) равен нулю, причем в последнем случае при  $\xi \rightarrow 0$   $\varphi^{**} \sim \xi^{\lambda/(2-2\lambda)}$ . При  $C^2 < 0,5$  (фиг. 2, а) и  $\lambda \neq +0$  максимумы кривых  $\varphi^{**}$  с уменьшением  $C$  понижаются и для предельной модели материала  $\eta \rightarrow \mu$  ( $C \rightarrow 0$ ) область допустимых решений занимает весь прямоугольник  $0 < \varphi^* < \pi$ ,  $0 < \xi \leq 1$ . При  $C^2 = 0,5$  (фиг. 2, б) и  $\varphi^* > \pi/2$  функция  $\varphi^{**}$  не зависит от  $\lambda$  и ее график в этой области представляет собой кривую (2.12). При  $C^2 > 0,5$  (фиг. 2, в) функция  $\varphi^{**}$  в рассматриваемом прямоугольнике изображается двусвязной кривой, причем одна из ее ветвей (в области  $\varphi^* < \pi/2$ ) пересекает ось  $\varphi^* = 0$  при  $\xi^{-1} = \operatorname{tg}^2(\lambda\pi)C^2(C^4/(1-C^2)^2 - 1)$ . Для предельной модели материала  $\eta \rightarrow 0$  ( $C \rightarrow 1$ ) при  $\lambda > 0$  эта ветвь исчезает, а другая ветвь для  $C$ , близких к единице, представляет собой кривую

$$\varphi^* = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-C^2}{C^2 - (1-\lambda)C^4\xi}\right), \quad 0 < \xi \leq C^{-2}/(2-2\lambda) \quad (2.14)$$

$$\varphi^* = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-C^2}{(1-\lambda)C^4\xi}\right), \quad C^{-2}/(2-2\lambda) < \xi \leq 1$$

Отметим, что область допустимых решений может быть расширена, если в нее добавить решения, в которых условие (2.10) нарушается в очень узкой зоне, прилегающей к берегу трещины. Тогда, например, для  $C$ , близких к единице, границей области допустимых решений вместо (2.14) будет кривая

$$\varphi^* = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-C^2}{C^2 - (1-\lambda)C^4\xi}\right), \quad 0 < \xi \leq 1 \quad (2.15)$$

На фиг. 2, в для  $C^2 = 0,9$  и  $\varphi^* > \pi/2$  расширенная область допустимых решений ограничена штриховыми линиями для каждого из рассмотренных значений  $\lambda$ . Условие (2.10) здесь может нарушаться в секторе  $\pi \geq \varphi > \pi - 0,005$ . Наличие упомянутой зоны указывает на существование узкой области вторичного пластического нагружения у берега трещины. Такая область может существовать и в схемах с непрерывным напряженно-деформированным состоянием у вершины квазистатически растущей трещины ([1, 3 и др.]).

В схемах с непрерывным напряженно-деформированным состоянием для выделения единственного асимптотического решения приходится привлекать разного рода гипотезы об экстремальных свойствах решения или о гладком характере перехода из одного состояния материала в другое. В случае рассматриваемой схемы можно использовать гипотезу о подготовке зоны разгрузки на линии разрыва  $\Sigma$ :

$$\gamma_i = \gamma_i^*, \quad \varphi = \varphi^* \quad (2.16)$$

Из (2.5) тогда следуют соотношения

$$\varphi^* = \operatorname{arctg}(C^{-1}(1-C^2)^{1/2}(1-\xi)^{-1/2}) \quad (2.17)$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{arctg}((1-C^2)^{1/2}\xi^{-1/2}(1-\xi)^{1/2})}{\pi - \operatorname{arctg}((1-C^2)^{1/2}\xi^{1/2}(1-\xi)^{-1/2})}$$

определяющие совместно с (2.5) единственное решение задачи для тех диапазонов изменения  $\xi$ , при которых не нарушается условие (2.10). Другой возможностью сузить неоднозначность асимптотического решения может служить задание сингулярной плотности сосредоточенных источников энергии  $G_2$  на  $\Sigma$ . Такого рода процедура подразумевает использование модели упругопластического тела, в которой переход материала из одного состояния в другое (по крайней мере, в динамическом случае) сопровождается затратами энергии. В общем случае неоднозначность

асимптотического решения должна сниматься при решении краевой задачи для тела с трещиной.

Вследствие вырождения пластической зоны в область меры «нуль» и употребления в полевых уравнениях лишь закона разгрузки решение (2.5) и весь последующий анализ справедлив для произвольной теории пластичности (теории течения, деформационной и т. д.) при использовании модели материала с изотропным (асимптотически линейным) упрочнением и упругим законом разгрузки. Исследованная схема имеет место для диапазона (1.7) скорости роста трещины.

Из (2.1), (2.2) и (2.9) следует, что  $G_0 = 0$ , т. е. край трещины при стационарном ее росте не поглощает энергии. Ситуация, складывающаяся при наличии линий сильного разрыва в поле напряжений движущейся трещины, вполне аналогична той, которая реализуется в случае непрерывных полей напряжений и объемной пластической зоны. Энергия деформации, выделяемая из упругой области тела при стационарном продвижении трещины, диссипирует в первом случае на линии разрыва (по крайней мере, при ненулевом угле подхода этой линии к берегу трещины или ее продолжению), во втором случае — в зоне пластичности. Форма и длина линии сильного разрыва и показатель особенности  $\lambda$  в первом случае, так же как форма и размеры пластической области и характер сингулярности асимптотического решения во втором случае, могут быть найдены в результате полного решения краевой задачи для тела с трещиной.

**3. Выбор схемы.** Дадим обоснование выбранной схемы напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. В диапазоне (1.7), когда скорость роста трещины превышает скорость распространения пластических возмущений, в противоположность [2] не следует ожидать существования зоны активного пластического нагружения непосредственно перед кончиком трещины. В секторе  $0 \leq \varphi < \varphi^*$ , находящемся впереди трещины, асимптотическое решение не имеет особенности, т. е. реализуется несингулярный упругий предвестник. В зоне активного пластического нагружения ( $\varphi > \varphi^*$ ) справедливо уравнение (1.8) гиперболического типа с асимптотическим решением, имеющим степенную особенность у кончика трещины

$$w = c_1 |x_1 + Bx_2|^{1-\lambda} + c_2 |x_1 - Bx_2|^{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1/2 \quad (3.1)$$

где  $c_i = \text{const}$ . Пусть сингулярное решение (3.1) непрерывно переходит в неособое решение при  $0 \leq \varphi < \varphi^*$ . Можно видеть, что условия непрерывности  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  при  $\varphi = \varphi^*$  влекут за собой при  $\varphi^* \in (0, \pi)$  тривиальное решение  $c_1 = c_2 = 0$ . Следовательно, сектор пластического нагружения может следовать за сектором с неособым решением лишь через линию сильного разрыва. Используя на линии разрыва  $\varphi = \varphi^*$  условия для скачков (2.6) и соотношения для активного пластического нагружения (1.3), получаем систему

$$B^2 \gamma_1 \sin \varphi^* + \gamma_2 \cos \varphi^* = 0, \quad \gamma_1 \cos \varphi^* + \gamma_2 \sin \varphi^* = 0$$

которая имеет нетривиальное решение  $\gamma_1 + \gamma_2 \operatorname{tg} \varphi^* = 0$  лишь при  $\operatorname{ctg}^2 \varphi^* = B^2$ . Из выражения (3.1) тогда очевидно, что в зависимости от того, лежит ли  $\varphi^*$  в первой или второй четвертях, должна обращаться в нуль либо константа  $c_1$ , либо  $c_2$ . Однако в обоих случаях интенсивность касательных напряжений  $\tau$  в пластической области увеличивается с ростом  $x_1$  при  $x_2 = \text{const}$ , обращаясь на линии разрыва в бесконечность. Это нарушает условие активного пластического нагружения  $\tau_{11} < 0$ . Единственной возможностью остается вырождение пластической зоны в линию сильного разрыва  $\varphi = \varphi^*$ , за которой при  $\varphi > \varphi^*$  следует состояние разгрузки. Такая схема и исследуется в пп. 1, 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слепня Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
2. Ибрагимов В. А. Напряженно-деформированное состояние вблизи конца растущей трещины в упругопластической среде // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 337–345.
3. Amazigo J. C., Hutchinson J. W. Crack-tip fields in steady crack-growth with linear strain-hardening // J. Mech. Phys. Solids. 1977. V. 25. No. 2. P. 81–97.
4. Костров В. В., Никитин Л. В., Флигман Л. М. Механика хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 3. С. 112–125.

Москва

Поступила в редакцию  
15.IV.1987