

УДК 539.3

М. А. СУМБАТЯН

**РАСЧЕТ ДИАГРАММЫ ОТРАЖЕНИЯ ОТ КРУГЛОЙ ТРЕЩИНЫ
ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИСКАТЕЛЯ**

Разработан и численно реализован метод расчета диаграммы отражения для дефекта в виде дискообразной трещины, расположенной соосно с нормальным искателем. Метод основан на решении уравнений динамической теории упругости со смешанными граничными условиями для случая гармонических по времени колебаний. Рассматриваемая проблема исследовалась ранее [1, 2] при некоторых предположениях, которые в данной работе не вводятся.

1. Пусть на поверхности упругого полупространства расположен круглый ультразвуковой преобразователь радиуса R . Его действие определяется заданной равномерно распределенной по кругу нормальной нагрузкой, которая предполагается гармонической по времени: $p = \text{Re} [p_0 \exp(-i\omega t)]$. На глубине h в полупространстве имеется круглая плоская трещина радиуса b , расположенная соосно с преобразователем (фиг. 1).

Представим полное поле напряжений в среде в виде суммы двух: падающего и отраженного от трещины (рассеянного трещиной). Падающее поле вызвано приложенной нагрузкой p_0 , определено при $z > 0$ и может быть представлено в виде интеграла Ханкеля [3]:

$$\sigma_z^0 = p_0 R \int_0^{\infty} \frac{(2\alpha^2 - k_2^2)^2 e^{-\gamma_1 z} - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_2 z}}{\Delta(\alpha)} J_0(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha \quad (1.1)$$

$$\tau_{rz}^0 = 2p_0 R \int_0^{\infty} \frac{(2\alpha^2 - k_2^2) \gamma_1 (e^{-\gamma_1 z} - e^{-\gamma_2 z})}{\Delta(\alpha)} \alpha J_1(\alpha r) J_1(\alpha R) d\alpha$$

$$\gamma_i = \sqrt{\alpha^2 - k_i^2}, \Delta(\alpha) = (2\alpha^2 - k_2^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2$$

здесь $k_i = \omega/c_i$ ($i=1, 2$), c_1 и c_2 — скорости распространения продольных и поперечных волн.

Рассеянное поле будем считать состоящим из двух частей [4], определенных соответственно при $z_1 > 0$ и при $z_2 > 0$. Каждое из них также описывается интегралами Ханкеля. Например, перемещения имеют вид

$$u_r^h = \int_0^{\infty} (-A_k e^{-\gamma_1 z_k} + B_k \gamma_2 e^{-\gamma_2 z_k}) \alpha^2 J_1(\alpha r) d\alpha \quad (1.2)$$

$$u_z^h = \int_0^{\infty} (-A_k \gamma_1 e^{-\gamma_1 z_k} + B_k \alpha^2 e^{-\gamma_2 z_k}) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha$$

здесь индекс $k=1, 2$ относится либо к верхней части ($z_1 > 0$) либо к нижней части ($z_2 > 0$) рассеянного поля. Функции $A_1(\alpha)$, $B_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$, $B_2(\alpha)$ пока неизвестны и должны определяться из граничных условий. Напряжения в рассеянном поле легко находятся из (1.2) на основании закона Гука [3].

Граничные условия заданы в плоскости $z_1=z_2=0$, по которой трещина разделяет две части рассеянного поля, и имеют следующий вид

$$\sigma_z^0 + \sigma_z^1 = 0, \tau_{rz}^0 - \tau_{rz}^1 = 0, \sigma_z^0 + \sigma_z^2 = 0, \tau_{rz}^0 + \tau_{rz}^2 = 0 \quad (0 < r < b) \quad (1.3)$$

$$\sigma_z^1 = \sigma_z^2, \tau_{rz}^1 = -\tau_{rz}^2, u_z^1 = -u_z^2, u_r^1 = u_r^2 \quad (r > b) \quad (1.4)$$

Из граничных условий (1.3), (1.4) вытекает, в частности, что всюду в граничной плоскости $\sigma_z^1 = \sigma_z^2, \tau_{rz}^1 = -\tau_{rz}^2$. Отсюда следует

$$(2\alpha^2 - k_2^2)(A_1 - A_2) = 2\alpha^2 \gamma_2 (B_1 - B_2) \quad (1.5)$$

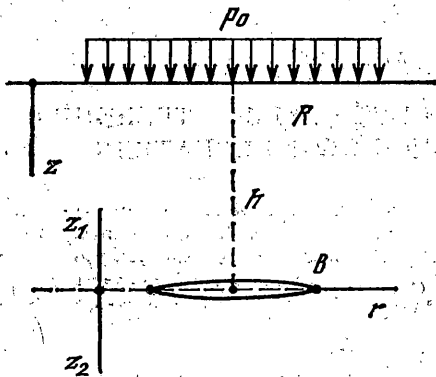
$$2\gamma_1 (A_1 + A_2) = (2\alpha^2 - k_2^2)(B_1 + B_2)$$

Из соотношений (1.2) и (1.5) легко получить, что при $z_1 = z_2 = 0$:

$$(1.6)$$

$$u_z^1 + u_z^2 = \frac{k_2^2}{2} \int_0^\infty (B_1 + B_2) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha$$

$$u_r^1 - u_r^2 = \frac{k_2^2}{2} \int_0^\infty (A_2 - A_1) J_1(\alpha r) d\alpha$$



Фиг. 1

Выражая функции $B_1 + B_2$ и $A_2 - A_1$ из (1.6) с помощью обращения преобразования Ханкеля и используя последние граничные условия в (1.3), (1.4), получаем два независимых интегральных уравнения относительно разности нормальных и тангенциальных перемещений берегов трещины (раскрытия трещины):

$$\int_0^b u_z \rho d\rho \int_0^\infty \frac{\Delta(\alpha)}{\gamma_1(\alpha)} \alpha J_0(\alpha r) J_0(\alpha \rho) d\alpha = \frac{2k_2^2}{\mu} \sigma_z^0 \quad (0 < r < b) \quad (1.7)$$

$$\int_0^b u_r \rho d\rho \int_0^\infty \frac{\Delta(\alpha)}{\gamma_2(\alpha)} \alpha J_1(\alpha r) J_1(\alpha \rho) d\alpha = \frac{2k_2^2}{\mu} \tau_{rz}^0 \quad (0 < r < b) \quad (1.8)$$

здесь $u_z = u_z^1 + u_z^2, u_r = u_r^2 - u_r^1, \mu$ — модуль сдвига. Уравнения (1.7), (1.8) стандартным способом [4] можно свести к уравнениям второго рода. Это удастся достичь введением новых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

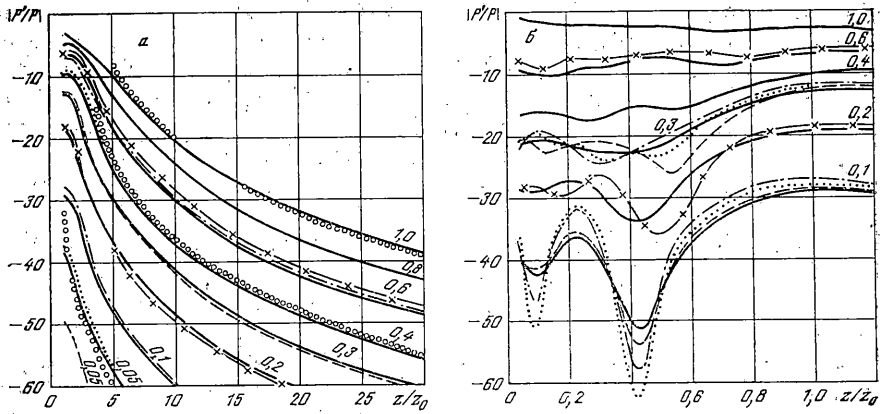
$$\int_0^\infty u_z \rho J_1(\alpha \rho) d\rho = \int_0^b \varphi(t) \sin \alpha t dt, \quad \int_0^\infty u_r \rho J_1(\alpha \rho) d\rho = \int_0^b \psi(t) \sin \alpha t dt$$

В результате, например, для нахождения функции $\varphi(x)$ получается уравнение

$$\int_0^b \varphi(t) dt \int_0^\infty \frac{\Delta(\alpha)}{\gamma_1(\alpha)} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \alpha t}{\alpha} d\alpha = f(x) = -\frac{2k_2^2}{\mu} \int_0^x \frac{r \sigma_z^0 dr}{\sqrt{x^2 - r^2}} \quad (0 < x < b) \quad (1.9)$$

которое является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, поскольку символ ядра $\Delta(\alpha)/\alpha \gamma_1(\alpha) \rightarrow \text{const} + O(1/\alpha^2)$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Подобное уравнение получается и для функции $\psi(x)$.

После нахождения неизвестных функций $u_z(r)$ и $u_r(r)$ или, что то же, функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, рассеянное поле полностью определяется во всем пространстве. В частности, величина P'/P , характеризующая отношение



Фиг. 2

полного нормального давления отраженного сигнала к полному приложенному давлению, где

$$P = 2\pi \int_0^a p_0 r dr = \pi R^2 p_0, \quad P' = 2\pi \int_0^R \sigma_z^1 r dr$$

определяется напряжением рассеянного поля σ_z^1 , взятым при $z_1 = h$. Тангенциальное напряжение не дает вклада в импульс, поступающий на преобразователь, ввиду наличия жидкостной прослойки между искателем и исследуемой средой. Окончательное выражение для величины, откладываемой на диаграмме [2] (фиг. 2), имеет вид

$$\frac{P'}{P} = \frac{\mu}{Rk_2^2 p_0} \left[- \int_0^b \varphi(t) dt \int_0^\infty \frac{(2\alpha^2 - k_2^2)^2 e^{-\gamma_1 h} - 4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_2 h} \sin \alpha t}{\gamma_1} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} J_1(\alpha R) d\alpha + \right. \\ \left. + 2 \int_0^b \psi(t) dt \int_0^\infty (2\alpha^2 - k_2^2) (e^{-\gamma_1 h} - e^{-\gamma_2 h}) \alpha \sin \alpha t J_1(\alpha R) d\alpha \right] \quad (1.10)$$

Заметим, что предлагаемый метод требует вычисления лишь однократных интегралов: в (1.1), (1.9) и (1.10).

2. Поскольку излучаемый монохроматический импульс давления является коротким по времени (дуг длиною в несколько длин волн), а скорость распространения продольных волн примерно в 2 раза больше скорости распространения поперечных, то фактически нормальный искатель работает только на продольных волнах [2]. Это означает, что из полного поля излучения и рассеяния надо выделить ту часть, которая соответствует продольным волнам. Для этого в (1.1) и (1.10) из двух экспоненциальных функций нужно оставить лишь $\exp(-\gamma_1 h)$, а вторую отбросить. Далее, поскольку экспериментатора интересует только первый отраженный от трещины сигнал, то схема расчета в п. 1 изложена для полного пространства с трещиной. Это исключает влияние на окончательный результат лучей, многократно отраженных от свободной поверхности и от трещины.

В отличие от предложенной выше основной схемы распространения волн в упругой среде, в ультразвуковой дефектоскопии широко используется жидкостная модель [2]. Она основана на допущении о том, что в среде могут распространяться только продольные волны. При таком подходе уравнения динамической теории упругости заменяются одним скалярным уравнением Гельмгольца для функции давления. Задаче от-

ражения от твердого диска в акустической среде соответствуют штриховые линии на фиг. 2. Аналогичный расчет в акустической среде, но с граничными условиями типа (1.3)–(1.4), соответствующими круглой трещине, отражен штрихпунктирными кривыми. Наконец, возможен еще подход, при котором дифракция на трещине происходит по законам теории упругости, а падающее и отраженное поля вычисляются на основе акустического приближения. Такому подходу соответствуют пунктирные кривые.

Известно, что при допущениях [2], решение выражается простой формулой

$$P'/P = \pi^2 R^2 b^2 / (\lambda^2 h^2) \quad (2.1)$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина продольной волны. Эта формула обеспечивает достаточную для практики точность лишь в дальней зоне — при $h > 5z_0$ (длина ближней зоны излучателя $z_0 = R^2/\lambda$) и отражена кривыми, обозначенными кружками.

Графики, представленные на фиг. 2, принято называть АРД-диаграммой (амплитуда — расстояние — диаметр). По вертикальной оси отложены значения P'/P в децибелах, т. е. величина $20 \lg(P'/P)$. Параметром семейства кривых служит отношение диаметров $d/D = b/R$. Следовательно, кривые на АРД-диаграмме определяются двумя параметрами — h/z_0 и b/R . В то же время легко видеть, что рассматриваемая задача является трехпараметрической. Таким образом, АРД-диаграмма не является универсальной, и оставался открытым вопрос о ее зависимости от изменения частоты колебания, а точнее, от параметра R/λ .

Интегральные уравнения вида (1.9) для нахождения функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$ решались численно методом коллокации с использованием квадратурной формулы Симпсона. Основной вариант расчетов был проведен при $R/\lambda = z_0/R = 2,5$. Это практически соответствует преобразователю с $R = 6$ мм, $f = 2,5$ МГц ($\omega = 2\pi f$) при контроле изделий из стали ($\nu = 0,3$). Число точек коллокации на отрезке $0 < r < b$ равнялось 10. Основное время затрачивается на вычисление интегралов Ханкеля в (1.1) и (1.10). В дальней зоне (при $h > 5z_0$) эти интегралы легко вычисляются с использованием асимптотических представлений, эффективных для $h/R \gg 1$. При $0 < h < 5z_0$ эти интегралы брались численно. Оценивалась зависимость точности расчета от числа узлов коллокации. Результаты, полученные для 20 точек, во всех случаях практически не отличались от соответствующих результатов для 10 точек коллокации. Это можно объяснить тем, что при перпендикулярном падении волны на трещину ее раскрытие является медленно меняющейся, а не сильно осциллирующей функцией, и для адекватного описания этой функции достаточно 10 точек.

Сравнивая кривые на фиг. 2, можно сделать следующие выводы:

В дальней зоне ($h > 5z_0$; фиг. 2, а) для отражателей, размеры которых соизмеримы или превышают длину волны, различные методы расчета с достаточной для практики точностью дают одинаковые результаты. Это объясняется тем, что в дальней зоне продольное поле излучателя в упругой среде мало отличается от поля излучателя в акустической среде. Это также связано с известным фактом об эквивалентности двух типов отражателей, когда их размеры велики (результат теории Кирхгофа). Естественно, что такое совпадение нарушается для малых отражателей.

В ближней зоне (фиг. 2, б) можно говорить лишь о качественном сопоставлении результатов различных методов расчета. Например, для небольших отражателей все подходы дают резкий минимум в диапазоне $0,4 - 0,5z_0$, однако величина этого минимума различна. Эксперимент также подтверждает наличие этого минимума [1], причем оказывается, что его глубина не такая значительная. В этой связи заметим, что наименьшую «впадину» в этой зоне дает основной метод расчета (в упругой среде).

АРД-диаграмма не является универсальной, а зависит от параметра R/λ . Расчеты, проведенные для частоты, в 2 раза превышающей частоту основного варианта ($R/\lambda = z_0/R = 5$), показаны кривыми, в которых чередуются штрихи и крестики. Эти кривые могут заметно отклоняться от кривых для меньшей частоты — даже в дальней зоне. В ближней же зоне это отклонение выражается особенно сильно.

Приведенное сравнение позволяет оценить степень точности акустической модели и теории Кирхгофа в зависимости от значений параметров задачи. Для получения наиболее точных количественных результатов следует применять основной вариант расчета.

Отметим, что задача о колебаниях упругого пространства с круглой трещиной рассматривалась, например в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krautkrämer J., Krautkrämer H.* Ultrasonic testing of materials. Berlin: Heidelberg; N. Y.: Springer - Verlag, 1983. 667 p.
2. *Ермолов И. Н.* Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
5. *Паргон В. З., Борисковский В. Г.* Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение, 1985. 263 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
10.IV.1987