

УДК 531.38

З. П. КОЗЛОВА К ЗАДАЧЕ СУСЛОВА

Рассматривается задача Суслова о вращении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки с неголономной связью: проекция угловой скорости на некоторую неподвижную в теле прямую ζ равна нулю. Известно [1], что проекции угловой скорости твердого тела на оси инерции выражаются в элементарных функциях времени. Однако нахождение ориентации оказалось нетривиальной задачей: кинематические уравнения Пуассона не удается явно проинтегрировать. Если неподвижная ось ζ не является собственной для оператора инерции, то уравнения Пуассона принадлежат классу Фукса. Показано, что в общем случае решения этих уравнений многозначны как функции комплексного времени. С помощью методов комплексного анализа найдено асимптотическое представление решений при больших значениях времени.

1. Уравнения движения. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — подвижная система координат, p, q, r — проекции угловой скорости на оси $\xi\eta\zeta$, матрица инерции твердого тела в подвижных осях имеет строки: $A, D, E; D, B, F$ и E, F, C соответственно. Без ущерба общности уравнение неголономной связи Суслова можно принять в виде $r=0$. Поворотом осей координат ξ и η можно добиться выполнения равенства $D=0$.

В [1] найдена явная зависимость проекций угловой скорости p и q как функции времени:

$$\begin{aligned} p &= (2h/A)^{1/2} \sin \chi, \quad q = (2h/B)^{1/2} \cos \chi \\ \operatorname{tg}[(\chi + \delta)/2] &= e^z, \quad \operatorname{tg} \delta = FA^{1/2}E^{-1}B^{-1/2} \\ k^2 &= 2hA^{-2}B^{-2}(F^2A + E^2B), \quad z = kt + z_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где h — постоянная энергии, z_0 — постоянная интегрирования. Таким образом, задача сводится к решению кинематических уравнений Пуассона, из которых можно определить ориентацию твердого тела. Запишем их в матричной форме

$$\dot{\gamma} = \lambda \gamma, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

В дальнейшем предполагается, что ось ζ не является собственной для матрицы инерции, т. е. $E^2 + F^2 \neq 0$. В противном случае p и q не меняются со временем и задача становится тривиальной.

Удобно перейти к новому времени $z = kt + z_0$. Уравнение (1.2) примет вид

$$d\gamma/dz = \Lambda \gamma, \quad \Lambda = \lambda/k \quad (1.3)$$

Выпишем в явном виде элементы P и Q матрицы Λ как функции z :

$$\begin{aligned} P &= \frac{BE(AB)^{1/2}}{F^2A + E^2B} \frac{2e^z}{1 + e^{2z}} - \frac{ABF}{F^2A + E^2B} \frac{1 - e^{2z}}{1 + e^{2z}} \\ Q &= \frac{AF(AB)^{1/2}}{F^2A + E^2B} \frac{2e^z}{1 + e^{2z}} + \frac{ABE}{F^2A + E^2B} \frac{1 - e^{2z}}{1 + e^{2z}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Условия однозначности общего решения. В уравнениях (1.3) переменную z будем считать комплексной и изучим ветвление решений в окрестности особых точек матрицы A . Ими являются нули функции $e^{2z}+1$, т. е. точки вида $z_n = \pi(2n+1)i/2$, n — целые числа. Эти точки являются полюсами первого порядка функций (1.4). Следовательно, уравнения (1.3) принадлежат к классу Фукса [2]. Разложим функции (1.4) в ряды Лорана в окрестности точки z_n :

$$P = \kappa_n(z-z_n)^{-1} + \dots, \quad Q = \mu_n(z-z_n)^{-1} + \dots$$

$$\kappa_n = [(-1)^n BE(AB)^{1/2}i + ABF](F^2A + E^2B)^{-1}$$

$$\mu_n = [(-1)^n AF(AB)^{1/2}i - ABE](F^2A + E^2B)^{-1}$$

Для определения условий однозначности решений системы (1.3) надо найти собственные значения постоянной матрицы

$$M_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\mu_n \\ 0 & 0 & \kappa_n \\ \mu_n & -\kappa_n & 0 \end{vmatrix}$$

Ими являются числа $\pm \lambda_n = \pm i(\kappa_n^2 + \mu_n^2)^{1/2}$ и нуль. Считая для определенности, что $A \geq B$, получим явное выражение для λ_n :

$$\lambda_n = [AB(A-B)]^{1/2}(F^2A + E^2B)^{-1}[(-1)^n A^{1/2}F + iB^{1/2}E]$$

Так как по предположению $E^2 + F^2 \neq 0$, то при $A \neq B$ среди характеристических чисел M_n нет кратных. В этом случае общее решение (1.3) может быть однозначным лишь при выполнении одного из следующих соотношений [2]:

$$[AB(A-B)]^{1/2}(F^2A + E^2B)^{-1}[(-1)^n A^{1/2}F + iB^{1/2}E] = m$$

$$(m=0, 1, 2, \dots)$$

Следовательно, в общем случае решения уравнений (1.3) многозначны как функции комплексного времени. Эта заведомо выполнено, например при $A > B$ и $E \neq 0$ (или $A < B$ и $F \neq 0$).

Это обстоятельство указывает, по-видимому, на существование явления, сходного с тем, что обнаружила Ковалевская в динамике тяжелого твердого тела: интегрирование в явном виде уравнений движения возможно лишь в тех случаях, когда общее решение однозначно [3]. Интегрируемости в квадратурах препятствует некоммутативность матриц монодромии, соответствующих обходу особых точек z_n с разными по четности значениями n (ср. с [4]). Некоммутативность группы монодромии является также препятствием к существованию у системы (1.3) однозначных первых интегралов, независимых с геометрическим интегралом (γ, γ) . Более точно, речь идет об интегралах $f(\gamma, t)$, голоморфных в прямом произведении $\mathbb{C}^3 \times X$, где $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, а $X = \mathbb{C} \setminus \{z_n\}$. В качестве X можно взять риманову поверхность функций (1.4). Система уравнений (1.3) является гамильтоновой системой, только записанной в избыточных переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ [5]. Поэтому к ним можно применить результаты [6]. Обозначим через G_n матрицу монодромии системы (1.3), отвечающую обходу полюса z_n . Известно [2], что $G_n = \exp 2\pi i M_n$, собственные числа G_n равны 1, $\exp(\pm 2\pi i \lambda_n)$. Первое из них отвечает геометрическому интегралу. В [6] доказано, что если нетривиальные собственные числа матрицы G_0 не являются корнями из единицы, $G_0 G_1 \neq G_1 G_0$ и собственные значения матрицы G_1 не равны $\pm i$, то уравнения (1.3) не имеют дополнительного интеграла, голоморфного в $\mathbb{C}^3 \times X$. Первое и третье условия имеют вид $\lambda_0 \neq l/m$, $\lambda_1 \neq 1/4 + l/2$ ($m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$). Эти условия выполнены для почти всех значений параметров задачи. При малых значениях E и F из некоммутативности матриц M_0 и M_1 будет вытекать некоммутативность их экспонент. Можно показать, что $M_0 M_1 = M_1 M_0$ лишь в том случае, когда $AF^2 + BE^2 = 0$. Следовательно, почти всегда $G_0 G_1 \neq G_1 G_0$. Итак, в общем случае система уравнений (1.3) действительно неинтегрируема.

3. Асимптотическое представление решений при больших значениях времени. В полосе шириной π , содержащей вещественную ось z , все решения системы (1.3) являются голоморфными функциями [2]. Следовательно, их можно представить в виде сходящихся рядов Вейерштрасса — Пуанкаре [7]. Для этого выполним замену времени

$$z = \ln[(1+\tau)/(1-\tau)] \quad (3.1)$$

осуществляющую конформное отображение полосы $|\operatorname{Im} z| < \pi/2$ на внутренность единичного круга $|\tau| < 1$. Уравнения Пуассона (1.3) в новом времени τ сохраняют свой вид

$$d\gamma/d\tau = \Lambda_* \gamma \quad (3.2)$$

Выпишем явный вид ненулевых элементов P_* и Q_* матрицы Λ_* :

$$\begin{aligned} P_* &= BA^{1/2}(F^2A + E^2B)^{-1}[2B^{1/2}E(1+\tau^2)^{-1} + 4\tau A^{1/2}F(1+\tau^2)^{-1}(1-\tau^2)^{-1}] \\ Q_* &= AB^{1/2}(F^2A + E^2B)^{-1}[2A^{1/2}F(1+\tau^2)^{-1} - 4\tau B^{1/2}E(1+\tau^2)^{-1}(1-\tau^2)^{-1}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Все решения системы (3.2) можно найти в виде степенных рядов, сходящихся в круге $|\tau| < 1$. Однако нас интересует вопрос о поведении решений при $\tau \rightarrow \pm 1$ (тогда $t \rightarrow \pm \infty$). Точки $\tau = \pm 1$ являются полюсами первого порядка для функций (3.3), следовательно, уравнения (3.2) снова являются системой класса Фукса. Рассмотрим для определенности точку $\tau = 1$. В ее окрестности будем иметь разложения Лорана

$$\begin{aligned} P_* &= -ABF(F^2A + E^2B)^{-1}(\tau-1)^{-1} + \dots \\ Q_* &= ABE(F^2A + E^2B)^{-1}(\tau-1)^{-1} + \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\sigma E \\ 0 & 0 & -\sigma F \\ \sigma E & \sigma F & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma = \frac{AB}{F^2A + E^2B}$$

и вычислим ее собственные значения. Получим $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\sigma(E^2 + F^2)^{1/2}$. «Укороченная» система $d\gamma/d\tau = \Gamma(\tau-1)^{-1}\gamma$ имеет решения следующего вида:

$$c_1 + c_2(\tau-1)^{\lambda_2} + c_3(\tau-1)^{\lambda_3} \quad (3.4)$$

где c_1, c_2, c_3 — комплексные постоянные интегрирования. Нас интересуют вещественнозначные решения, поэтому представим (3.4) в виде

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin[\sigma(E^2 + F^2)^{1/2} \ln(1-\tau)] + \alpha_3 \cos[\sigma(E^2 + F^2)^{1/2} \ln(1-\tau)] \quad (3.5)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — некоторые вещественные постоянные.

Решение полной системы (3.2) будет отличаться от решения (3.5) «укороченной» системы множителем $f(\tau)$, голоморфным в окрестности точки $\tau = 1$.

Из формулы (3.1) следует, что $\ln(1-\tau)$ отличается от $-z + \text{const}$ на слагаемые, убывающие экспоненциально быстро с ростом времени t . Аналогично $(1-\tau)$ также быстро убывает при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, при больших значениях t решения уравнений Пуассона неограниченно приближаются к функциям вида ($\beta_s = \text{const}$):

$$\beta_1 + \beta_2 \sin[\sigma k(E^2 + F^2)^{1/2}(t-t_0)] + \beta_3 \cos[\sigma k(E^2 + F^2)^{1/2}(t-t_0)] \quad (3.6)$$

Нетрудно проверить, что функции (3.6) являются решениями «предельной» системы (1.3), в которой функции $p(t)$ и $q(t)$ заменены их предельными значениями $-ABF(F^2A + E^2B)^{-1}$ и $ABE(F^2A + E^2B)^{-1}$. С качественной точки зрения этот результат можно вывести из теоремы Левинсона [8]. Однако изложенный подход позволяет записать асимптотические разложения решений при больших t с любой степенью точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
3. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
4. *Хованский А. Г.* О представимости функций в квадратурах // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. Вып. 4. С. 251–252.
5. *Козлова З. П.* Геометрия кинематических уравнений Пуассона в динамике твердого тела // Численные методы решения краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 44–52.
6. *Зиглин С. Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 3. С. 30–41.
7. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.-Л.: ОНТИ. Глав. ред. техн.-теорет. лит., 1937. 500 с.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.1.1987