

УДК 539.3

В. С. ЗАРУБИН, Г. Н. КУВЫРКИН

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРЕВЕ

Предложен подход к описанию поведения деформируемой среды с введением в качестве аргументов определяющих термодинамических функций векторного и тензорного внутренних структурных параметров. Первый структурный параметр, характеризующий процесс теплопроводности, ассоциирован с векторной функцией плотности распределения фононов и подчиняется кинетическому уравнению релаксационного типа. Второй структурный параметр служит для описания происходящих в материале на микроуровне структурных изменений при приложении внешней нагрузки и описывает релаксационные эффекты, проявляющиеся при интенсивном деформировании. На основе полученной системы определяющих уравнений рассмотрена задача о динамическом нагружении полупространства из поглощающего излучение материала импульсным тепловым потоком.

1. Предположим, что термонапряженное состояние деформируемого тела определяется четырьмя термодинамическими функциями [1, 2]: свободной энергией $A=A(\epsilon_{kl}, T, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(S)}, \vartheta_k)$, энтропией $S=S(\epsilon_{kl}, T, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(S)}, \vartheta_k)$, тензором напряжений и вектором плотности теплового потока соответственно с компонентами $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, T, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(S)}, \vartheta_k)$ и $q_i=q_i(\epsilon_{kl}, T, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(S)}, \vartheta_k)$, ϵ_{kl} — компоненты тензора малых деформаций; T — температура; $\chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(S)}$ — компоненты векторного и тензорного структурных параметров, характеризующих процессы передачи теплоты и распространения напряжений соответственно; $\vartheta_k=T_{,k}$; $(\cdot)_{,k}=\partial/\partial x_k$, x_k — декартовы координаты ($i, j, k, l=1, 2, 3$).

Для определения структурных параметров постулируется существование кинетических уравнений

$$\dot{\chi}_i^{(T)} = \kappa_i^{(T)}(\epsilon_{kl}, T, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(S)}, \vartheta_k) \quad (1.1)$$

$$\dot{\chi}_{ij}^{(S)} = \kappa_{ij}^{(S)}(\epsilon_{kl}, T, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(S)}, \vartheta_k) \quad (1.2)$$

Кроме того, в каждой точке тела должны выполняться [1–3] законы сохранения количества движения, момента количества движения, энергии и второй закон термодинамики (неравенство Клаузиуса — Дюгема):

$$\rho u_i \ddot{\cdot} - \sigma_{ji,j} = F_i \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.4)$$

$$\rho U \dot{\cdot} + q_{i,i} - \sigma_{ji} \epsilon_{ij} \dot{\cdot} - \rho r = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho T S \dot{\cdot} + T (q_i/T)_{,i} - \rho r \geq 0 \quad (1.6)$$

ρ — плотность; u_i, F_i — компоненты векторов перемещений и массовых сил; U, r — массовые плотности внутренней энергии тела и внутренних источников (стоков) теплоты; t — время, точкой вверху обозначается производная по t .

Если воспользоваться связью между внутренней и свободной энергиями $U=A+TS$, то из (1.5) и (1.6) в силу произвольности ε_{ij} , T , ϑ_i следует

$$\sigma_{ij} = \rho \partial A / \partial \varepsilon_{ij}, \quad S = -\partial A / \partial T, \quad \partial A / \partial \vartheta_i = 0 \quad (1.7)$$

а второй закон термодинамики приобретает вид

$$\rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(T)}} \dot{\chi}_i^{(T)} + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\sigma)}} \dot{\chi}_{ij}^{(\sigma)} + \frac{q_i T_{,i}}{T} \leq 0 \quad (1.8)$$

т. е. кинетические уравнения (1.1) и (1.2) не могут быть произвольными, конкретная их форма должна выбираться с учетом неравенства (1.8).

Закон сохранения энергии (1.5) с использованием (1.7) примет вид

$$\rho T S' + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(T)}} \dot{\chi}_i^{(T)} + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\sigma)}} \dot{\chi}_{ij}^{(\sigma)} + q_{i,i} - \rho r = 0 \quad (1.9)$$

В дальнейшем полагаются малыми не только полные деформации $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$, но и температурные деформации и структурные параметры $|\varepsilon_{ij}^{(T)}| \ll 1$, $|\chi_i^{(T)}| \ll 1$ и $|\chi_{ij}^{(\sigma)}| \ll 1$. Тогда свободная энергия может быть записана в виде, аналогичном предложенному в [4] для наследственной среды

$$A(\varepsilon_{kl}, T, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(\sigma)}) = A^*(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(\sigma)}) + B(T) - A^*(-\varepsilon_{kl}^{(T)}) \quad (1.10)$$

Представляя далее первое и третье слагаемые в правой части (1.10) в виде ряда Тейлора по соответствующим аргументам и ограничиваясь в разложении квадратичными членами, можно записать

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{kl}, T, \chi_k^{(T)}, \chi_{kl}^{(\sigma)}) = & 1/2 C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) + 1/2 K_{ij} \chi_j^{(T)} \chi_i^{(T)} + \\ & + 1/2 D_{ijkl} \chi_{kl}^{(\sigma)} \chi_{ij}^{(\sigma)} - M_{ijkl} \chi_{kl}^{(\sigma)} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) - N_{ijk} \chi_k^{(T)} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)}) - R_{ijk} \chi_k^{(T)} \chi_{ij}^{(\sigma)} + \\ & + \rho B(T) - 1/2 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(T)} \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad A(0, T_0, 0, 0) = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Коэффициенты при линейных членах в (1.11), очевидно, должны быть равны нулю. Выражения для тензора напряжений и энтропии с учетом первых двух равенств из (1.7) примут вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - N_{ijk} \chi_k^{(T)} - M_{ijkl} \chi_{kl}^{(\sigma)} \quad (1.12)$$

$$S = \rho^{-1} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - N_{ijk} \chi_k^{(T)} - M_{ijkl} \chi_{kl}^{(\sigma)}) \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T - \partial B / \partial T \quad (1.13)$$

и из (1.9) с учетом (1.13) можно получить закон сохранения энергии в иной форме

$$(C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - N_{ijk} \chi_k^{(T)} - M_{ijkl} \chi_{kl}^{(\sigma)}) T \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} -$$

$$- \rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} T + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i^{(T)}} \dot{\chi}_i^{(T)} +$$

$$+ \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\sigma)}} \dot{\chi}_{ij}^{(\sigma)} + q_{i,i} - \rho r = 0 \quad (1.14)$$

В (1.14) связь между температурной деформацией $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ и температурой принята линейной.

Для получения закона сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности необходимо конкретизировать выражения для вектора шот-

ности теплового потока и структурных параметров, приняв их, например, в виде

$$q_i = \Phi_{ij}^{(T)} \chi_j^{(T)} + \Phi_{ihl}^{(\sigma)} \chi_{hl}^{(\sigma)} \quad (1.15)$$

$$\tau_T \dot{\chi}_i^{(T)} = -\chi_i^{(T)} + F_{ihl}^{(T)} \varepsilon_{hl} + Q_i^{(T)} (T - T_0) + G_{ij}^{(T)} \theta_j \quad (1.16)$$

$$\tau_\sigma \dot{\chi}_{ij}^{(\sigma)} = -\chi_{ij}^{(\sigma)} + F_{ijkl}^{(\sigma)} \varepsilon_{kl} + Q_{ij}^{(\sigma)} (T - T_0) + G_{ijk}^{(\sigma)} \theta_k \quad (1.17)$$

τ_T, τ_σ — времена релаксации структурных параметров.

Последовательно исключая из (1.15) структурные параметры с помощью кинетических уравнений (1.16), (1.17) и объединяя далее получившееся уравнение для q_i с (1.14), можно получить уравнение теплопроводности в достаточно общем виде. Более простые выражения для тензора напряжений и вектора плотности теплового потока можно получить в том случае, если не учитывать влияние структурного параметра $\chi_i^{(T)}$ на напряженно-деформированное состояние, а $\chi_{ij}^{(\sigma)}$ — на распространение теплоты и предположить, что процесс распространения теплоты не зависит от деформаций и отклонения температуры от начальной T_0 , т. е.

$N_{ijk} = 0, \Phi_{ihl}^{(\sigma)} = 0, Q_{ij}^{(T)} = 0, F_{ihl}^{(\sigma)} = 0$, а также $Q_{ij}^{(\sigma)} = 0$ и $G_{ijk}^{(\sigma)} = 0$. Тогда

$$\tau_\sigma \sigma_{ij} + \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) + \tau_\sigma C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - T^* \partial \varepsilon_{kl}^{(T)} / \partial T) - M_{ijmn} F_{mnkl}^{(\sigma)} \varepsilon_{kl} \quad (1.18)$$

$$\tau_T q_i + q_i = \Phi_{ih}^{(T)} G_{hj}^{(T)} \theta_j \quad (1.19)$$

Соотношение (1.18) определяет стандартную линейную среду [5], но с учетом температурных членов, а (1.19) соответствует полученному ранее [6] уравнению для вектора плотности теплового потока исходя из других предположений. Времена релаксации τ_σ и τ_T могут лежать в широком диапазоне, но, как правило, τ_T достаточно мало. Для их определения могут быть использованы известные методы [7—9]. Слагаемые

$\chi_i^{(T)} \rho \partial A / \partial \chi_i^{(T)}$ и $\chi_{ij}^{(\sigma)} \rho \partial A / \partial \chi_{ij}^{(\sigma)}$ в (1.14) имеют более высокий порядок малости по сравнению с другими, поэтому их влиянием на изменение температуры можно пренебречь. Распределение температуры в исследуемом теле в таком случае может быть найдено из уравнения теплопроводности, которое запишется следующим образом:

$$\rho c_e (\tau_T T'' + T') + C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} + \tau_T \varepsilon_{kl}'') T_0 \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T - \\ - M_{ijkl} (\chi_{kl}^{(\sigma)} + \tau_\sigma \chi_{kl}^{(\sigma)'}) T_0 \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T = \lambda_{ij}^{(T)} T_{,ji} + \rho (r + \tau_T r') \quad (1.20)$$

$\lambda_{ij}^{(T)} = -\Phi_{ih}^{(T)} G_{hj}^{(T)}$ — тензор теплопроводности; $c_e = -T_0 \partial^2 B / \partial T^2$ — удельная теплоемкость при постоянной деформации и $T \approx T_0$. Уравнение (1.20) описывает процесс распространения теплоты с конечной скоростью и учитывает рассеяние энергии вследствие деформирования и изменения структуры материала. Введение в рассмотрение структурных параметров $\chi_i^{(T)}$ и $\chi_{ij}^{(\sigma)}$ отражает физическую суть происходящих при импульсном нагреве процессов, видоизменяет выражение для второго закона термодинамики — появляются дополнительные первые два слагаемых в неравенстве (1.8). В практически важных случаях влияние второго и третьего слагаемых в левой части (1.20) сравнительно невелико и в первом приближении ими можно пренебречь.

2. Одной из областей применения полученных соотношений является радиационная акустика [10], занимающаяся исследованием взаимодействия излучения с веществом. Интерес к этим вопросам вызван потребностями интенсивно развивающейся техники импульсных ускорителей, осуществляющих объемный нагрев, разрушение, структурную, химическую

или ядерную перестройку вещества. Возбуждение волн напряжений потоком излучения может быть также использовано при акустической дефектоскопии, при определении толщины покрытий и качества их контакта с подложкой и т. д. В зависимости от материала, характера и длины волны излучения подводимый тепловой поток может утилизироваться как на поверхности, так и в объеме тела. В дальнейшем рассматривается последний случай.

Для оценки целесообразности использования гиперболического уравнения теплопроводности, влияния соотношения времени релаксации структурного параметра $\chi_i^{(T)}$ и положения максимума переменного по времени подводимого импульсного теплового потока на распределение температурных напряжений в поглощающем излучение упругом изотропном теле была рассмотрена задача со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} t=0: T(x, 0) &= T_0, T'(x, 0) = 0, \sigma_{11}(x, 0) = 0, \sigma_{11}'(x, 0) = 0 \\ x=0: \partial T / \partial x &= 0, \sigma_{11}(0, t) = 0 \\ x \rightarrow \infty: T(x, t) &\rightarrow T_0, \sigma_{11}(x, t) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если предположить, что объемное энергосодержание обусловлено поглощением излучения, то $\rho r = Q_0(t) \exp(-vx)$, v — зависящий от частоты излучения коэффициент поглощения и $Q_0(t) = AMt^m \exp(-mt/t_0)$. Вводя далее обозначения $a = \lambda^{(T)} / (\rho c_e)$, $T^* = At_0^m / (\rho c_e)$, $M = m^m / (m-1)!$, $V_\sigma^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$, λ, μ — упругие постоянные, и безразмерные переменные и параметры $z = x(at_0)^{-1/2}$, $\tau = t/t_0$, $\theta = (T - T_0) / T^*$, $q_0 = Q_0(At_0^m)^{-1}$, $D^2 = \tau / t_0$, $R^2 = a(V_\sigma^2 t_0)^{-1}$, $\sigma = \sigma_{11} [(3\lambda + 2\mu) \alpha T^*]^{-1}$, $n = v(at_0)^{1/2}$, α — температурный коэффициент линейного расширения, распределения температуры и напряжения можно описать уравнениями

$$D^2 \theta'' + \theta'' = \partial^2 \theta / \partial z^2 + D^2 w'' + w \quad (2.2)$$

$$R^2 (\theta'' + \sigma'') = \partial^2 \sigma / \partial z^2 \quad (2.3)$$

$$w(z, \tau) = q_0(\tau) \exp(-nz), \quad q_0(\tau) = M \tau^m \exp(-m\tau), \quad \int_0^\infty q_0(\tau) d\tau = 1$$

Выбор показателя у экспоненты и коэффициента M в выражении для $q_0(\tau)$ обеспечивает максимум этой функции при $\tau = 1$ для всех m .

Решения уравнений (2.2) и (2.3) с однородными краевыми условиями (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = \sum_{i=1}^2 C_i \int_0^\tau w(z, \tau-u) \exp(\omega_i u) du - \frac{n}{D} \sum_{i=1}^2 C_i \int_0^\tau \left\{ \exp[\omega_i(\tau-u)] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\tau-u} q_0(v) \exp(-\omega_i v) dv \right\} F_1(z, u) du \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sigma(z, \tau) = \sigma_1(z, \tau) + \sigma_2(z, \tau) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(z, \tau) = \sum_{i=1}^4 B_i \left\{ \int_0^\tau q_0(\tau-u) \exp[\varphi_i(u-zR)] du - \right. \\ \left. - \int_0^\tau w(z, \tau-u) \exp(\varphi_i u) du \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2(z, \tau) = \frac{n/D}{1-D^2/R^2} \sum_{i=1}^3 A_i \int_0^\tau \exp[\kappa_i(\tau-u)] \times \\ \times \int_0^{\tau-u} q_0(v) \exp(-\kappa_i v) dv [F_1(z, u) - F_2(z, u)] du \end{aligned}$$

$$F_1(z, u) = \exp\left(-\frac{u}{2D^2}\right) I_0\left[\frac{(u^2 - z^2 D^2)^{1/2}}{2D^2}\right]$$

$$F_2(z, u) = \exp\left(-\frac{u - zR}{2D^2}\right) I_0\left(\frac{u - zR}{2D^2}\right)$$

$$F_1(z, u) \neq 0 \quad (u > zD), \quad F_2(z, u) \neq 0 \quad (u > zR)$$

$$\omega_{1,2} = 0,5[-1 \pm (1 + 4n^2 D^2)^{1/2}] / D^2$$

$$C_i = \pm (\omega_i + 1/D^2) / (\omega_i - \omega_2), \quad \varphi_{1,2} = \omega_{1,2}$$

$$\varphi_{3,4} = \pm n/R, \quad B_i = \frac{(\varphi_i + 1/D^2) \varphi_i^2}{(\varphi_i - \varphi_j) (\varphi_i - \varphi_k) (\varphi_i - \varphi_l)}$$

$$(i, j, k, l = 1, 2, 3, 4, i \neq j, i \neq k, i \neq l)$$

$$\kappa_{1,2} = \omega_{1,2}, \quad \kappa_3 = 1/(R^2 - D^2)$$

$$A_i = \kappa_i (\kappa_i + 1/D^2) (\kappa_i - \kappa_j)^{-1} (\kappa_i - \kappa_k)^{-1}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j, i \neq k)$$

При $D^2=0$ скорость распространения теплоты бесконечна, решения уравнений (2.2) и (2.3) с соответствующими краевыми условиями могут быть получены аналогично с помощью преобразования Лапласа.

Для слабо поглощающих излучение материалов ($n < 1$) можно пренебречь процессом теплопроводности. Распределение температуры в таком случае определяется только объемным энерговыделением, т. е.

$$\theta(z, \tau) = \int_0^\tau w(z, u) du \quad (2.6)$$

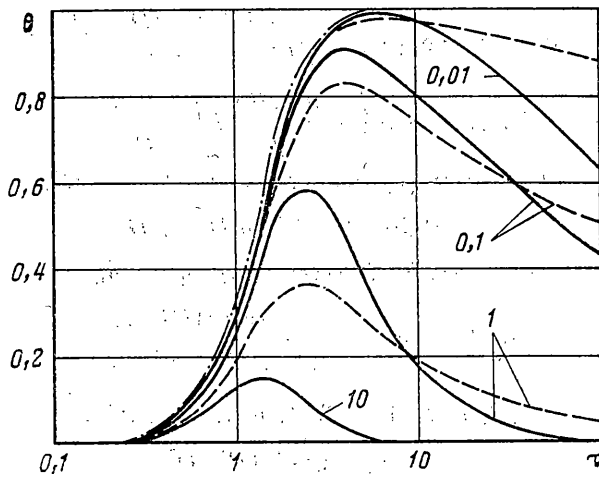
Для температурного поля (2.6) решением уравнения (2.3) будет

$$\sigma(z, \tau) = \int_0^\tau q_0(\tau - u) \operatorname{ch}[n(u - zR)/R] du - \int_0^\tau w(z, \tau - u) \operatorname{ch}(nu/R) du \quad (2.7)$$

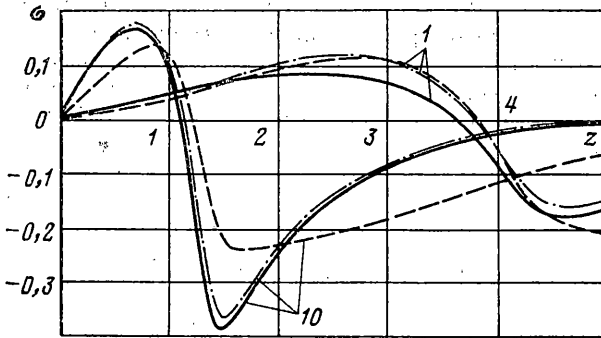
причем первое слагаемое в правой части отлично от нуля только при $u > zR$. Отметим, что (2.6) и (2.7) соответствуют соотношениям, которые могут быть получены с использованием параметра Грюнрайzena [11].

На фиг. 1 представлены результаты расчетов температуры $\theta(z, \tau)$ при $z=0$ и $m=2$, $D^2=10$ для момента времени $\tau=5$, когда практически вся подведенная энергия поглощена телом. Сплошные кривые соответствуют решению (2.4) гиперболического уравнения теплопроводности, штриховые — параболическому уравнению теплопроводности ($D^2=0$) и штрихпунктирные — соотношению (2.6). Возле кривых указаны соответствующие значения n . Очевидно, что при уменьшении n различия в значениях температуры, полученных с помощью разных подходов к описанию процесса теплопроводности, снижаются. Уменьшение параметра D^2 при неизменных значениях n , как показывают расчеты, приводит к тем же результатам. Результаты расчетов напряжений в поглощающем излучение полупространстве приведены на фиг. 2 для $R^2/D^2=0,1$ (скорость распространения теплоты меньше скорости звука в материале), $\tau=5$. В расчетах полагалось $n=1$, $m=2$. Сплошные кривые соответствуют зависимости (2.5), когда скорость распространения теплоты конечна, штриховые — параболическому распределению температуры ($D^2=0$) и штрихпунктирные — соотношению (2.7). Из представленных графиков видно, что положения экстремумов соответствующих кривых близки, однако различие их ординат существенно зависит от параметра R^2 , значения которого показаны возле кривых. Очевидно, что учет релаксационных эффектов при определении напряжений приводит к снижению их абсолютных величин.

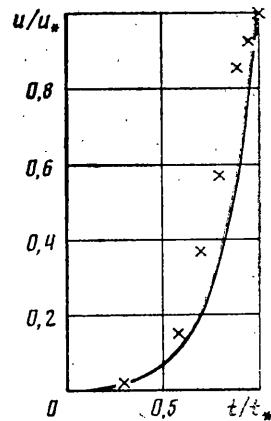
На фиг. 3 приведены результаты сравнения расчетов с экспериментальными данными [11]. Отдельными точками отмечены относительные перемещения свободной поверхности образца конечной толщины в зависимости от относительного времени, а сплошной линией — результаты расчетов для $m=2$. В данном случае u_* соответствует максимальному перемещению свободной поверхности до начала отражения волны напряжений в момент времени t_* . Предполагалось, что изменение перемеще-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ния свободной поверхности по времени для экспериментального образца аналогично тому, которое будет в точке полупространства с координатой, равной толщине образца до начала прохождения через нее волны напряжений. Качественное совпадение результатов экспериментов и расчетов дает основание заключить о целесообразности использования предложенного подхода к исследованию поведения конструкций при импульсном нагреве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
2. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 285 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1. 492 с.
4. Crochet M., Naghdi P. M. On «thermo-rheologically simple solids // Thermoelasticity: Proc. IUTAM Symp., East Kilbride, Scotland, 1968. Berlin; Wien; New York: Springer - Verlag, 1970. P. 59-86.
5. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
6. Лыков А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инж.-физич. журн. 1965. Т. 9. № 13. С. 287-304.
7. Новик А., Берри Б. Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975. 472 с.
8. Баргенов Г. М., Зеленов Ю. В. Физика и механика полимеров. М.: Высш. шк., 1983. 391 с.
9. Шашков А. Г., Яновский С. Ю. Идентификация времени релаксации теплового потока на основе метода модулированного нагрева // Вестн АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук. 1983. № 4. С. 76-81.
11. Залюбовский И. И., Калининченко А. И., Лазурик В. Т. Введение в радиационную акустику. Харьков: Вища шк., 1986. 186 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.1986