

УДК 539.3

В. В. МЫХАСЬКИВ, М. В. ХАЙ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОТОБРАЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА С ПЛОСКИМ РАЗРЕЗОМ

Динамические задачи об установившихся колебаниях бесконечного тела с плоским разрезом сведены [1-5] к сингулярным интегральным уравнениям с интегрированием по области, которую занимает разрез. В случае эллиптического разреза полученные интегральные уравнения решались [1-3] двухбазисным проекционным методом либо путем суммирования решений аналогичных статических задач с использованием разложения искомых функций в ряды по частоте колебаний внешней нагрузки. В данной работе предлагается метод отображений для решения двумерных сингулярных интегральных уравнений вида [4, 5]. Интегральные уравнения с интегрированием по области, которую занимает разрез, преобразуются к интегральным уравнениям с круговой областью интегрирования, которые решаются численно. Это позволяет определить коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности разреза для достаточно широкого диапазона изменения частоты колебаний внешней нагрузки. Эффективность метода иллюстрируется на примере эллиптического разреза, поверхности которого находятся под действием нормальных внешних усилий. Случай заданных касательных к поверхностям разреза внешних усилий не усложняет применения изложенной в работе методики, поэтому здесь не рассматривается. Впервые метод отображений при решении двумерных интегральных уравнений для эллиптической области интегрирования применялся в [6]. При этом использовалось явное выражение обратного оператора интегрального уравнения на круге.

1. Пусть бесконечное тело, ослабленное плоским разрезом, находится под действием установившихся во времени t нормальных к поверхностям разреза самоуравновешенных внешних усилий, заданных на поверхностях разреза, занимающего произвольную область S . Если декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ выбрать таким образом, что противоположным поверхностям плоского разреза $S^\pm$ соответствуют значения $x_3 = \pm 0$, то задача об определении функции $\beta(\xi)$, характеризующей раскрытие разреза в процессе деформации тела, сводится согласно [4] к решению интегрального уравнения вида

$$\iint_S \beta(\xi) \left[K_1(x, \xi) \frac{\exp(i\omega_1|x-\xi|)}{|x-\xi|^5} - K_2(x, \xi) \frac{\exp(i\omega_2|x-\xi|)}{|x-\xi|^5} \right] d\xi S = \\ = \frac{\omega_2^2}{4G} N(x), \quad (x \in S) \quad (1.1)$$

Здесь G — модуль сдвига, $\omega_j = k/c_j$ ($j=1, 2$), k — круговая частота колебаний внешней нагрузки с амплитудой $N(x)$, c_1 и c_2 — скорости распространения в теле продольных и поперечных волн, i — мнимая единица, $|x-\xi|$ — расстояние между точками $x(x_1, x_2)$ и $\xi(\xi_1, \xi_2)$, принадлежащими области разреза,

$$K_1(x, \xi) = 9 - 9i\omega_1|x-\xi| - (5\omega_1^2 - \omega_2^2)|x-\xi|^2 + i\omega_1(2\omega_1^2 - \omega_2^2)|x-\xi|^2 + \\ + 1/4(2\omega_1^2 - \omega_2^2)^2|x-\xi|^4, \quad (1.2)$$

$$K_2(x, \xi) = 9 - 9i\omega_2|x-\xi| - 4\omega_2^2|x-\xi|^2 + i\omega_2^3|x-\xi|^3$$

Сложная зависимость ядра интегрального уравнения (1.1) от величины $|x-\xi|$, а также произвольность области S , не позволяют построить обратный оператор этого уравнения, а затем по формулам работы [4] определить компоненты напряжений и перемещений в теле с разрезом.

В случае односвязной области S , интегральное уравнение (1.1) заменой переменных

$$x_j = f_j(y), \quad \xi_j = f_j(\eta) \quad (j=1, 2, x, \xi \in S, y, \eta \in S^*) \quad (1.3)$$

где f_j — известные функции, дающие взаимно однозначное отображение области S на круг S^* единичного радиуса, можно преобразовать к виду

$$\iint_S \beta_*(\eta) \left[K_1^*(y, \eta) \frac{\exp(i\omega_1 \vartheta(y, \eta) |y - \eta|)}{|y - \eta|^5} - K_2^*(y, \eta) \frac{\exp(i\omega_2 \vartheta(y, \eta) |y - \eta|)}{|y - \eta|^5} \right] d\eta S = \frac{\omega_2^2}{4G} N^*(y) \quad (1.4)$$

Здесь β_* — искомая функция, N^* и K_j^* — известные функции, зависящие от вида области S , выражений (1.2) и функции N , $y \in S^*$:

$$\vartheta(y, \eta) = [(f_1(y) - f_1(\eta))^2 + (f_2(y) - f_2(\eta))^2]^{1/2} |y - \eta|^{-1} \quad (1.5)$$

Интегральное уравнение (1.4), как и (1.1), имеет порядок особенности $|y - \eta|^{-3}$ и отличается от (1.1) тем, что в нем интегрирование ведется по круговой области S^* .

Построение приближенного решения уравнения (1.4) является задачей достаточно трудоемкой, поэтому решим его численно с использованием методики [7].

С этой целью, выделив в уравнении (1.4) особенности, преобразуем его к виду (ν — коэффициент Пуассона)

$$\iint_S \beta_*(\eta) \left\{ \frac{[\vartheta(y, \eta)]^{-3}}{|y - \eta|^3} + \frac{A\omega_2^2 [\vartheta(y, \eta)]^{-1}}{|y - \eta|} + \Omega(y, \eta) \right\} d\eta S = \frac{1 - \nu}{G} N^*(y) \quad (y \in S^*) \quad (1.6)$$

$$A = 1/8 [12(1 - \nu)^2 - 8(1 - \nu)(1 - 2\nu) + 3(1 - 2\nu)^2] (1 - \nu)^{-1}$$

$$\Omega(y, \eta) = \frac{4(1 - \nu)}{\omega_2^2} \left[K_1^*(y, \eta) \frac{\exp(i\omega_1 \vartheta(y, \eta) |y - \eta|)}{|y - \eta|^5} - K_2^*(y, \eta) \times \right. \\ \left. \times \frac{\exp(i\omega_2 \vartheta(y, \eta) |y - \eta|)}{|y - \eta|^5} \right] - \frac{[\vartheta(y, \eta)]^{-3}}{|y - \eta|^3} - \frac{A\omega_2^2 [\vartheta(y, \eta)]^{-1}}{|y - \eta|}$$

Можно показать, что ядро Ω интегрального уравнения (1.6) не содержит особенностей.

На контуре разреза смещения противоположных его поверхностей обращаются в нуль, поэтому решение уравнения (1.6) следует искать в классе функций, обращающихся в нуль на контуре разреза.

Представим неизвестную функцию $\beta_*(y)$ в виде произведения

$$\beta_*(y) = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \alpha(y) \quad (1.7)$$

где $\alpha(y)$ — неизвестная функция, которую определим численно. Для этого воспользуемся регулярным представлением сингулярного интегрального уравнения (1.6) в следующем виде:

$$\alpha(y) [I_{00}(y) + A\omega_2^2 J(y)] + I_{10}(y) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_1} + I_{01}(y) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_2} + \frac{1}{2} I_{20}(y) \frac{\partial^2 \alpha(y)}{\partial y_1^2} + \\ + \frac{1}{2} I_{02}(y) \frac{\partial^2 \alpha(y)}{\partial y_2^2} + I_{11}(y) \frac{\partial^2 \alpha(y)}{\partial y_1 \partial y_2} + \iint_S \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|^3} [\vartheta(y, \eta)]^{-3} [\alpha(\eta) -$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha(y) - (\eta_1 - y_1) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_1} - (\eta_2 - y_2) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_2} - \frac{1}{2} (\eta_1 - y_1)^2 \frac{\partial^2 \alpha(y)}{\partial y_1^2} - \\
& - \frac{1}{2} (\eta_2 - y_2)^2 \frac{\partial^2 \alpha(y)}{\partial y_2^2} - (\eta_1 - y_1) (\eta_2 - y_2) \frac{\partial^2 \alpha(y)}{\partial y_1 \partial y_2} \Big] d\eta S + \\
& + A\omega_2^2 \iint_S \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|} [\Phi(y, \eta)]^{-1} [\alpha(\eta) - \alpha(y)] d\eta S + \\
& + \iint_S (1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2} \Omega(y, \eta) d\eta S = \frac{1 - \nu}{G} N^*(y) \quad (y \in S^{\sim}) \quad (1.8)
\end{aligned}$$

$$I_{ij}(y) = \iint_S \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|^3} [\Phi(y, \eta)]^{-3} (\eta_1 - y_1)^i (\eta_2 - y_2)^j d\eta S \quad (1.9)$$

$$J(y) = \iint_S \frac{(1 - \eta_1^2 - \eta_2^2)^{1/2}}{|y - \eta|} [\Phi(y, \eta)]^{-1} d\eta S$$

В силу регулярности функции Φ в области $S^{\sim}$, сингулярные интегралы (1.9) вычисляются аналитически или численно. Подынтегральные функции в интегральном уравнении (1.7) ограничены в $S^{\sim}$, что позволяет решить его численным способом.

Располагая значениями $\alpha(y)$, по формуле (1.7) найдем функцию $\beta_*(y)$, через которую определяются напряжения и перемещения в теле с разрезом.

2. В качестве примера рассмотрим случай установившихся колебаний бесконечного тела с эллиптическим разрезом с полуосями a и b ($a \geq b$).

Функции $f_j(y)$, дающие отображение области S на круг единичного радиуса, определяются соотношениями

$$x_1 = ay_1, \quad x_2 = by_2 \quad (2.1)$$

Согласно (1.5) и (2.1), функция $\Phi(y, \eta)$, входящая в определяющие уравнения (1.6), (1.8), для эллиптической области S имеет вид

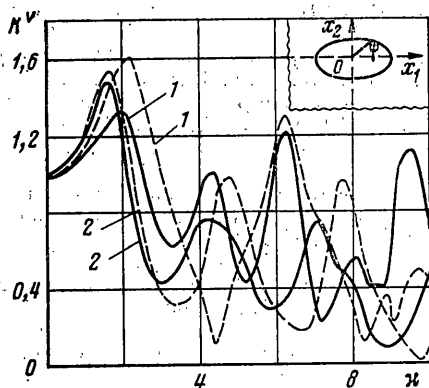
$$\Phi(y, \eta) = a[1 - q^2(y_2 - \eta_2)^2|y - \eta|^{-2}]^{1/2} \quad (q = (1 - e^2)^{1/2}, \quad e = b/a) \quad (2.2)$$

Сингулярные интегралы вида (1.9) с учетом (2.2) вычисляются в замкнутом виде и выражаются через полные эллиптические интегралы первого $K(q)$ и второго $E(q)$ рода

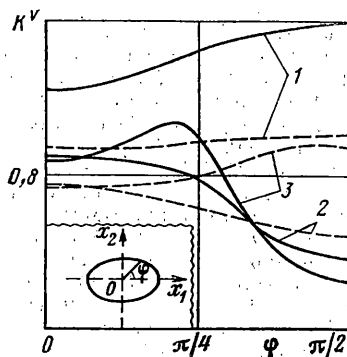
$$\begin{aligned}
I_{00}(y) &= -2\pi e^{-2} E(q), \quad I_{10}(y) = -2\pi y_1 q^{-2} [K(q) - E(q)], \\
I_{01}(y) &= -2\pi y_2 q^{-2} [e^{-2} E(q) - K(q)] \\
I_{20}(y) &= \pi q^{-2} \{K(q) - E(q) - y_1^2 q^{-2} [(1 + e^2) K(q) - 2E(q)] - y_2^2 q^{-2} \times \\
&\quad \times [(1 + e^2) E(q) - 2e^2 K(q)]\} \\
I_{02}(y) &= \pi q^{-2} \{e^{-2} E(q) - K(q) - y_1^2 q^{-2} [(1 + e^2) e^{-2} E(q) - 2K(q)] - y_2^2 q^{-2} \times \\
&\quad \times [(1 + e^2) K(q) - 2E(q)]\}, \quad I_{11}(y) = 2\pi q^{-4} y_1 y_2 [(1 + e^2) K(q) - 2E(q)] \\
J(y) &= \pi q^{-2} \{q^2 K(q) - y_1^2 [K(q) - E(q)] - y_2^2 [E(q) - e^2 K(q)]\} \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Подставив (2.3) в интегральное уравнение (1.8), определим значения функции $\alpha(y)$ численно. Необходимая точность расчетов обеспечивается увеличением плотности разбиения области $S^{\sim}$. Так для достижения относительной погрешности в 1% при вычислениях функции $\alpha(y)$ на контуре области $S^{\sim}$ в рассматриваемом диапазоне изменения частоты колебаний k достаточно равномерного разбиения на 11 точек по радиусу и 8 точек по угловой координате области $S^{\sim}$.

Непосредственно через значения $\alpha(y)$ определяются коэффициенты интенсивности напряжений как функции времени t и угловой координаты φ точки контура эллиптического разреза. Для эллиптического разреза



Фиг. 1



Фиг. 2

и рассматриваемого вида нагружения коэффициенты интенсивности напряжений определяются по формулам

$$k_2 = k_3 = 0$$

$$k_1(\varphi, t) = - \frac{2G\pi^{1/2}e}{(1-\nu)^{1/2}} \left(\frac{\sin^2 \varphi + e^4 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi} \right)^2 \alpha(y^*) \exp(-ikt) \quad (2.4)$$

Здесь y^* — образ точки контура эллиптического разреза, причем

$$y_1^* = [e^2 / (e^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi)]^{1/2}, \quad y_2^* = [\operatorname{tg}^2 \varphi / (e^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi)]^{1/2}$$

На фиг. 1 показана зависимость амплитуды относительного коэффициента интенсивности напряжений $K^v = |k_1|/k_*$ от волнового числа $k = ka/c_2$ для эллиптического разреза, находящегося под действием установившейся внешней нагрузки с амплитудой $N(x) = N_0 = \text{const}$, где

$$k_*(\varphi) = \frac{N_0(\pi b)^{1/2}e^{-2}}{E(q)} \left(\frac{\sin^2 \varphi + e^4 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + e^2 \cos^2 \varphi} \right)^{1/2}$$

— статический коэффициент интенсивности напряжений для эллиптического разреза в бесконечном теле, когда на его поверхностях задана нагрузка N_0 . Сплошные кривые иллюстрируют изменение K^v для точки контура разреза с угловой координатой $\varphi = 0$, штриховые — для точки контура разреза с угловой координатой $\varphi = \pi/2$. Цифры 1 и 2 соответствуют значениям $e = 0,6$; $0,9$. При вычислениях коэффициент Пуассона полагался равным $0,3$.

На фиг. 2 показана зависимость K^v от угловой координаты φ контура разреза при различных значениях e : $e = 0,6$ — сплошные кривые; $e = 0,9$ — штриховые кривые. Цифры 1, 2 и 3 соответствуют частотам колебаний $k = 2,2$; $4,0$; $4,6$.

Как следует из приведенных на фиг. 1 графиков, амплитуда коэффициентов интенсивности напряжений осциллирует с увеличением частоты колебаний внешней нагрузки, причем существуют частоты колебаний, при которых в отдельные моменты времени коэффициенты интенсивности напряжений могут превышать соответствующие им статические величины k_* . Если в случае дискообразного разреза такие частоты колебаний, опасные с точки зрения разрушения тела с разрезом, находятся в диапазоне низких частот колебаний внешней нагрузки [8, 9], то с увеличением величины q этот диапазон расширяется в сторону более высоких частот.

Как видно из фиг. 2, с изменением частоты колебаний внешней нагрузки точка, где наблюдается максимум амплитуды коэффициентов интенсивности напряжений, изменяет свое положение на контуре эллипса, в то время как в статической постановке задачи точка максимума коэффициента интенсивности напряжений неподвижна и имеет угловую координату $\varphi = \pi/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капцов А. В., Шифрин Е. Н. О рассеянии плоской трещиной нормально падающей продольной гармонической волны // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 106—112.
2. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В. О трещине нормального отрыва в упругой среде под действием гармонической волны // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 93—100.
3. Roy A. Diffraction of elastic waves by an elliptic crack // Intern. J. Engng. Sci. 1984. V. 22. № 6. P. 729—739.
4. Мыхаськив В. В., Хай М. В. Сведение к интегральным уравнениям динамических трехмерных задач теории упругости для тел с произвольно расположенными плоскими разрезами // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 943—950.
5. Хай М. В. О сведении трехмерных динамических задач теории упругости для тела с трещиной к интегральным уравнениям // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1980. Вып. 12. С. 63—69.
6. Ефимов А. Б., Воробьев В. Н. Одна смешанная краевая задача для гармонической функции в полупространстве // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 5. С. 1332—1335.
7. Хай М. В., Калыняк И. В. Об одном подходе к численному решению задач математической теории трещин // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1984. Вып. 20. С. 38—42.
8. Мыхаськив В. В., Хай М. В. Прочность бесконечного тела с дискообразной трещиной, находящегося под действием циклических нагрузок // Проблемы прочности. 1987. № 1. С. 13—16.
9. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение, 1985. 263 с.

Львов

Поступила в редакцию
2.VI.1987