**МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**
**№ 1 • 1989**

УДК 539.3

В. А. ПОПОВ

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Теория сингулярных возмущений [1–3] применена для нахождения собственных частот и форм колебаний тонкой прямоугольной призмы в условиях плоской деформации со свободными от напряжений сторонами. Такая задача решалась в [4, 5] методом суперпозиции сведением к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Применение метода однородных решений [6] также связано с необходимостью решать бесконечную систему уравнений. В отличие от этих подходов, теория сингулярных возмущений позволяет вычислить явно несколько первых членов внутреннего асимптотического разложения вектора смещений и асимптотики собственных частот в области низкочастотных колебаний.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о колебаниях тонкой прямоугольной призмы с сечением $D=\{(x_1, x_2):|x_1|<l, |x_2|<h\}$ со свободными от напряжений сторонами $x_1=\pm l$, $x_2=\pm h$. Пусть $\rho$ – плотность, $G$ – модуль сдвига, $\omega$ – частота колебаний, $\nu$ – коэффициент Пуассона, $\mu=(1-2\nu)\rho\omega^2l^2/G$, $a={}^3/_2(1-\nu)/(1-2\nu)$.

Вектор смещений $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ и величина $\mu$ являются решениями следующей краевой задачи

$$(l^2\mathbf{L}(\partial_1, \partial_2)+\mu)\mathbf{u}=0 \quad (\text{в } D) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{M}(\partial_1, \partial_2)\mathbf{u}|_{x_2=\pm h}=0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{N}(\partial_1, \partial_2)\mathbf{u}|_{x_1=\pm l}=0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{L}(\partial_1, \partial_2)=\mathbf{L}_0\partial_2^2+\mathbf{L}_1\partial_1\partial_2+\mathbf{L}_2\partial_1^2$$

$$\mathbf{M}(\partial_1, \partial_2)=\mathbf{M}_0\partial_2+\mathbf{M}_1\partial_1$$

$$\mathbf{N}(\partial_1, \partial_2)=\mathbf{N}_0\partial_2+\mathbf{N}_1\partial_1, \quad \partial_i\equiv\partial/\partial x_i \quad (i=1, 2)$$

$$\mathbf{L}_0=\begin{Vmatrix}1-2\nu & 0\\ 0 & 2(1-\nu)\end{Vmatrix}, \quad \mathbf{L}_2=\begin{Vmatrix}2(1-\nu) & 0\\ 0 & 1-2\nu\end{Vmatrix}, \quad \mathbf{N}_0=\begin{Vmatrix}0 & 2\nu\\ 1-2\nu & 0\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_0=\mathbf{L}_0, \quad \mathbf{M}_1=\mathbf{N}_0^T, \quad \mathbf{N}_1=\mathbf{L}_2, \quad \mathbf{L}_1=\mathbf{N}_0+\mathbf{M}_1$$

Введем безразмерный малый параметр $\varepsilon=h/l$ и безразмерные координаты $y=x_1/l$, $z=x_2/h$, $\xi=(x_1+l)/h$, $\eta=(x_1-l)/h$. Вектор смещений будем искать в виде суммы

$$\mathbf{u}(x_1, x_2)=\mathbf{v}(y, z, \varepsilon)+e(1+y)\mathbf{w}_-(\xi, z, \varepsilon)+e(1-y)\mathbf{w}_+(\eta, z, \varepsilon) \tag{1.4}$$

где $e(t)$ – срезающая функция из $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ такая, что $e(t)=1$ при $t\leqslant{}^1/_2$ и $e(t)=0$ при $t\geqslant 1$.

Функция $\mathbf{v}(y, z, \varepsilon)$ и величина $\mu$ являются асимптотическими решениями в полосе $\Omega=\{(y, z):|z|<1\}$ следующей задачи

$$(\mathbf{L}(\varepsilon\partial_y, \partial_z)+\varepsilon^2\mu)\mathbf{v}=0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{M}(\varepsilon\partial_y, \partial_z)\mathbf{v}|_{z=\pm 1}=0 \tag{1.6}$$

Для компенсации невязок на торцах $y=\pm 1$ вида

$$\varphi_\pm(z,\varepsilon)=\mathbf{N}(\varepsilon\partial_y, \partial_z)\mathbf{v}|_{y=\pm 1} \tag{1.7}$$

введены погранслойные функции $\mathbf{w}_\pm$. Функция $\mathbf{w}_-(\xi, z, \varepsilon)$ — асимптотическое решение в полубесконечной полосе $\Omega_-=\{(\xi, z): \xi>0, |z|<1\}$ следующей краевой задачи

$$(\mathbf{L}(\partial_\xi, \partial_z)+\varepsilon^2\mu)\mathbf{w}_-=0 \quad (\text{в } \Omega_-) \tag{1.8}$$
$$\mathbf{M}(\partial_\xi, \partial_z)\mathbf{w}_-|_{z=\pm1}=0$$
$$\mathbf{N}(\partial_\xi, \partial_z]\mathbf{w}_-|_{\xi=0}=-\varphi_-(z, \varepsilon)$$
$$\lim_{\xi\to\infty}\mathbf{w}_-=0$$

Аналогичный вид имеет краевая задача для функции $\mathbf{w}_+(\eta, z, \varepsilon)$ в полуполосе $\Omega_+=\{(\eta, z): \eta<0, |z|<1\}$.

**2. Построение асимптотики решения.** Рассмотрим случай низкочастотных колебаний прямоугольника, когда выполнено условие $\varepsilon^2\mu\ll1$ (т. е. $\omega\ll\omega_*$, где $\omega_*=\pi(G/\rho)^{1/2}/2h$ — первая сдвиговая частота). В этом случае функции $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_\pm$ и собственные числа $\mu$ можно искать в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра $\varepsilon$ (величина $m$ будет определена ниже):

$$\mathbf{v}(y, z, \varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\mathbf{v}^{(n)}(y, z), \qquad \mu=\sum_{n=0}^{N-2}\varepsilon^n\mu_n \tag{2.1}$$
$$\mathbf{w}_-(\xi, z, \varepsilon)=\varepsilon^m\sum_{n=0}^{N-m}\varepsilon^n\mathbf{w}_-^{(n)}(\xi, z), \qquad \mathbf{w}_+(\eta, z, \varepsilon)=\varepsilon^m\sum_{n=0}^{N-m}\varepsilon^n\mathbf{w}_+^{(n)}(\eta, z)$$

Подстановка разложений (2.1) в (1.5), (1.6) и группировка членов при одинаковых степенях $\varepsilon$ приводит к краевым задачам для функций $\mathbf{v}^{(k)}(y, z)$ $(0\leqslant k\leqslant N)$ в полосе $\Omega$ (при $n<0$ положим $\mathbf{v}^{(n)}=0$):

$$\mathbf{L}_0\,\partial_z^2\mathbf{v}^{(k)}+\mathbf{L}_1\partial_y\partial_z\mathbf{v}^{(k-1)}+\mathbf{L}_2\partial_y^2\mathbf{v}^{(k-2)}+\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n-2}\mathbf{v}^{(n)}=0 \tag{2.2}$$
$$(\mathbf{M}_0\partial_z\mathbf{v}^{(k)}+\mathbf{M}_1\partial_1\mathbf{v}^{(k-1)})_{z=\pm1}=0 \tag{2.3}$$

Условия разрешимости задач (2.2), (2.3) имеют вид

$$\int_{-1}^{1}\left(\mathbf{L}_2\partial_y^2\mathbf{v}^{(k-2)}+\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n-2}\mathbf{v}^{(n)}\right)dz+\mathbf{N}_0\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)}\Big|_{z=-1}^{1}=0 \tag{2.4}$$

а решения описываются формулами

$$\mathbf{v}^{(k)}(y, z)=-\mathbf{L}_0^{-1}\left\{\int_0^z\left[\mathbf{L}_1\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)}(y, s)+\right.\right. \tag{2.5}$$
$$\left.+(z-s)\left(\mathbf{L}_2\partial_y^2\mathbf{v}^{(k-2)}(y, s)+\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n-2}\mathbf{v}^{(n)}(y, s)\right)\right]ds-$$
$$-z\mathbf{N}_0\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)}(y, 1)-z\int_0^1\left[\mathbf{L}_2\partial_y^2\mathbf{v}^{(k-2)}(y, s)+\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n-2}\mathbf{v}^{(n)}(y, s)\right]ds\right\}+\mathbf{V}^{(k)}(y)$$

где $\mathbf{V}^{(k)}(y)$ — произвольные функции, не зависящие от $z$.

Из (1.7), (2.1) получаем асимптотическое разложение для функций $\varphi_\pm(z, \varepsilon)$:

$$\varphi_\pm(z,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\varphi_\pm^{(k)}(z),\qquad \varphi_\pm^{(k)}(z)=(\mathbf{N}_0\partial_z\mathbf{v}^{(k)}+\mathbf{N}_1\partial_y\mathbf{v}^{(k-1)})_{y=\pm1} \tag{2.6}$$

Функции $\mathbf{w}_-^{(k)}(\xi, z)$ $(0\leqslant k\leqslant N-m)$, согласно формулам (1.8), (2.1), (2.6), являются решениями краевых задач в $\Omega_-$:

$$\mathbf{L}(\partial_\xi,\partial_z)\mathbf{w}_-^{(k)}+\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n-2}\mathbf{w}_-^{(n)}=0,\qquad \mathbf{M}(\partial_\xi,\partial_z)\mathbf{w}_-^{(k)}\,|_{z=\pm1}=0 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{N}(\partial_\xi,\partial_z)\mathbf{w}_-^{(k)}|_{\xi=0}=-\varphi_-^{(k+m)}(z),\qquad \lim_{\xi\to\infty}\mathbf{w}_-^{(k)}(\xi,z)=0$$

Условия разрешимости задач (2.7), согласно [7—9], имеют вид

$$\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n-2}\int_0^\infty d\xi\int_{-1}^{1}\mathbf{w}_-^{(n)}(\xi,z)\mathbf{r}^{(i)}(\xi,z)\,dz+\int_{-1}^{1}\varphi_-^{(k+m)}(z)\mathbf{r}^{(i)}(0,z)\,dz=0 \tag{2.8}$$

$$\mathbf{r}^{(1)}=\|1,0\|,\quad \mathbf{r}^{(2)}=\|0,1\|,\quad \mathbf{r}^{(3)}=\|-z,\xi\|\qquad (i=1,2,3;\ k=0,1,\ldots,N-m)$$

Аналогично выписываются краевые задачи для функций $\mathbf{w}_+^{(k)}(\eta, z)$ в области $\Omega_+$. Условия их разрешимости:

$$\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n-2}\int_{-\infty}^{0}d\eta\int_{-1}^{1}\mathbf{w}_+^{(n)}(\eta,z)\mathbf{r}^{(i)}(\eta,z)\,dz-\int_{-1}^{1}\varphi_+^{(k+m)}(z)\mathbf{r}^{(i)}(0,z)\,dz=0 \tag{2.9}$$

$$(i=1,2,3;\ k=0,1,\ldots,N-m)$$

Решения исходной задачи распадаются на две независимые серии противоположной четности по $x_2$: $u_i(x_1,x_2)=(-1)^iu_i(x_1,-x_2)$ $(i=1,2)$ (изгибные колебания); $u_i(x_1,x_2)=(-1)^{i+1}u_i(x_1,-x_2)$ $(i=1,2)$ (продольные колебания).

Рассмотрим подробно первый случай.

**3. Изгибные колебания прямоугольника.** Положим в формулах (2.5) $V_1^{(k)}=0$, $V_2^{(k)}=f_k(y)$. Тогда условия (2.4) принимают вид

$$\int_{-1}^{1}\left[\partial_y^2v_2^{(k-2)}+\frac{1}{1-2\nu}\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n-2}v_2^{(n)}\right]dz+\partial_yv_1^{(k-1)}\,|_{z=-1}^{1}=0 \tag{3.1}$$

Из формул (2.5) находим при $k\leqslant1$:

$$\mathbf{v}^{(0)}(y)=\|0,f_0(y)\|,\qquad \mathbf{v}^{(1)}(y,z)=\|-zf_0'(y),f_1(y)\| \tag{3.2}$$

Уравнения (3.1) при $k=2$ и $k=3$ приводят к условиям $\mu_0=\mu_1=0$. При $k\geqslant2$ из формул (2.5) получаем интегрированием выражения для функций $\mathbf{v}^{(k)}(y,z)$:

$$v_1^{(k)}(y,z)=-zf_{k-1}'(y)+(1-\nu)^{-1}[{}^1/_6(2-\nu)z^3-z]f_{k-3}'''(y)+p_1^{(k)}(y,z) \tag{3.3}$$

$$v_2^{(k)}(y,z)=f_k(y)+{}^1/_2\nu z^2(1-\nu)^{-1}f_{k-2}''(y)+p_2^{(k)}(y,z)$$

где функции $p_i^{(k)}(y,z)$ являются полиномами по $z$ и зависят от $f_n(y)$ при $n\leqslant k-6+i$ и чисел $\mu_n$ при $n\leqslant k+i-4$. В частности, при $k\leqslant3$ $p_i^{(k)}=0$; при $4\leqslant k\leqslant7$ имеют место формулы ($f_n=0$ при $n<0$):

$$p_1^{(k)}(y,z)={}^1/_{240}\mu_2f_{k-7}'''(y)(1-\nu)^{-2}(1-2\nu)^{-1}[(4-\nu)(1-\nu)^2z^7/14-$$
$$-(24-26\nu-10\nu^2+7\nu^3)z^5/5+(43-30\nu-8\nu^2)z^3+4(\nu+9)(2\nu-3)z]-$$

$$-\frac{1}{4(1-2\nu)}\left[\frac{3-\nu}{20}z^5-\frac{5(3-2\nu)}{6(1-\nu)}z^3+\frac{7-2\nu}{1-\nu}z\right]\sum_{n=0}^{k-5}\mu_{k-n-3}f_n'(y)$$

$$p_2^{(k)}(y,z)={}^1/_{240}\mu_2 f_{k-6}''(y)(1-\nu)^{-2}(1-2\nu)^{-1}[(2+\nu)(1-\nu)^2z^6/2-$$
$$-(3+2\nu-3\nu^2-7\nu^3)z^4+3(1+4\nu)z^2]+\frac{z^2}{8(1-2\nu)}\left(-\frac{1+\nu}{2}z^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1+4\nu}{1-\nu}\right)\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-2}f_n(y)$$

Постановка выражений (3.3) в формулу (3.1) приводит к уравнениям для функций $f_{k-4}(y)$ при $4\leqslant k\leqslant N$:

$$f_0^{\mathrm{IV}}(y)=a\mu_2 f_0(y) \tag{3.4}$$

$$f_{k-4}^{\mathrm{IV}}(y)=a(\mu_2 f_{k-4}+\mu_{k-2}f_0(y))+F_{k-4}(y)\qquad(5\leqslant k\leqslant N) \tag{3.5}$$

$$F_{k-4}(y)=\frac{3(1-\nu)}{4}\left(\int_{-1}^{1}\partial_y{}^2p_2^{(k-2)}dz+\partial_y p_1^{(k-1)}\Big|_{z=-1}^{1}\right)+$$
$$+\frac{a}{2}\sum_{n=1}^{k-5}\mu_{k-n-2}\int_{-1}^{1}v_2^{(n)}dz+\frac{a}{2}\mu_2\left(\frac{\nu}{3(1-\nu)}f_{k-6}''+\int_{-1}^{1}p_2^{(k-4)}dz\right)$$

В частности, находим:

$$F_1=0,\quad F_k(y)=\frac{7\nu-17}{10(1-2\nu)}\sum_{n=0}^{k-2}\mu_{k-n}f_n''(y)+a\sum_{n=1}^{k-1}\mu_{k-n+2}f_n(y)+$$
$$+{}^1/_{1050}a\mu_2{}^2(33\nu^2+424\nu-422)(1-\nu)^{-2}(1-2\nu)^{-1}f_{k-4}(y)\qquad(2\leqslant k\leqslant 4)$$

Из (2.6), (3.3) получаем выражения для $\varphi_\pm{}^{(k)}(z)$:

$$\varphi_\pm^{(k)}(z)=(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}\|-2zf_{k-2}''(\pm1),\ (z^2-1)f_{k-3}'''(\pm1)\|+\psi_\pm^{(k)}(z) \tag{3.6}$$

где $\psi_\pm^{(k)}(z)$ зависят от функций $f_n(y)$ при $n\leqslant k-4$ и чисел $\mu_n$ при $n\leqslant k-2$. При $k\leqslant 3$ имеем $\psi_\pm^{(k)}=0$, при $4\leqslant k\leqslant 7$ имеют место формулы

$$\psi_\pm^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{k-4}\mu_{k-n-2}\left\|\left(z^3-\frac{6-\nu}{2(1-\nu)}z\right)f_n(\pm1),\quad\frac{1-z^2}{4}\left(z^2-\frac{7-2\nu}{1-\nu}\right)f_{n-1}'(\pm1)\right\|$$

Из (3.6) следует, что для удовлетворения краевым условиям (1.3) с точностью до $O(\varepsilon^4)$ достаточно потребовать выполнения условий

$$f_i''(\pm1)=f_i'''(\pm1)=0\qquad(i=0,1) \tag{3.7}$$

Тогда $\varphi_\pm^{(k)}=0$ при $k\leqslant 3$ и в разложении (2.1) для $\mathrm{w}_\pm$ можно положить $m=4$. Условия разрешимости (2.8), (2.9) для функций $\mathrm{w}_\pm^{(k)}$ при $k\geqslant 3$ в случае изгибных колебаний при $i=1$ тривиальны, а при $i=2$ и $i=3$ приводят к краевым условиям для функций $f_j(y)$ при $j\geqslant 2$:

$$f_j''(\pm1)=A_j^\pm,\qquad f_j'''(\pm1)=B_j^\pm \tag{3.8}$$

$$A_j^+=\frac{a}{2}\left\{\int_{-1}^{1}z\psi_{+,1}^{(j+2)}(z)dz+\sum_{n=0}^{j-6}\mu_{j-n-4}\int_{-1}^{1}dz\int_{-\infty}^{0}\mathrm{w}_+^{(n)}(\eta,z)\mathbf{r}^{(3)}(\eta,z)d\eta\right\}$$

$$A_j^- = \frac{a}{2}\left\{\int\limits_{-1}^{1} z\psi_{-,1}^{(j+2)}(z)\,dz - \sum_{n=0}^{j-6}\mu_{j-n-4}\int\limits_{-1}^{1}dz\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{w}_-^{(n)}(\xi,z)\,\mathbf{r}^{(3)}(\xi,z)\,d\xi\right\}$$

$$B_j^+ = \frac{a}{2}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\psi_{+,2}^{(j+3)}(z)\,dz - \sum_{n=0}^{j-5}\mu_{j-n-3}\int\limits_{-1}^{1}dz\int\limits_{-\infty}^{0}w_{+,2}^{(n)}(\eta,z)\,d\eta\right\}$$

$$B_j^- = \frac{a}{2}\left\{\int\limits_{-1}^{1}\psi_{-,2}^{(j+3)}(z)\,dz + \sum_{n=0}^{j-5}\mu_{j-n-3}\int\limits_{-1}^{1}dz\int\limits_{0}^{\infty}w_{-,2}^{(n)}(\xi,z)\,d\xi\right\}$$

При $j\leqslant 4$ находим отсюда

$$A_j^{\pm} = -\frac{24+\nu}{20(1-2\nu)}\sum_{n=0}^{j-2}\mu_{j-n}f_n(\pm 1) \tag{3.9}$$

$$B_j^{\pm} = \frac{9\nu-34}{20(1-2\nu)}\sum_{n=0}^{j-2}\mu_{j-n}f_n'(\pm 1)$$

**4. Вычисление асимптотики собственных частот.** Из уравнения (3.4) с краевыми условиями (3.7) определяем собственные функции $f_0(y)$ и собственные значения $\mu_2$. Заметим, что краевая задача для $f_0(y)$ при замене $\nu$ на $\nu_*=\nu/(1+\nu)$ совпадает с классической задачей об изгибных колебаниях балки (плоское напряженное состояние). Двукратному нулевому собственному значению $\mu_2=0$ отвечают жесткие смещения прямоугольника. Исключим этот случай из дальнейшего рассмотрения.

Введем обозначение $\lambda=(a\mu_2)^{1/4}$. Для функции $f_0(y)$, удовлетворяющей дополнительному условию нормировки

$$\int\limits_{-1}^{1} f_0^2(y)\,dy=1 \tag{4.1}$$

получаем две серии решений

$$\begin{aligned} f_0(y)&=(\operatorname{sh}^2\lambda-\sin^2\lambda)^{-1/2}(\operatorname{sh}\lambda\sin\lambda y+\sin\lambda\operatorname{sh}\lambda y) \quad (\lambda=\lambda_{1,n})\\ f_0(y)&=(\operatorname{ch}^2\lambda+\cos^2\lambda)^{-1/2}(\operatorname{ch}\lambda\cos\lambda y+\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda y) \quad (\lambda=\lambda_{2,n}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\lambda_{i,n}$ $(i=1, 2;\ n=1, 2,\ldots)$ — положительные корни уравнений

$$\sin\lambda\operatorname{ch}\lambda+(-1)^i\operatorname{sh}\lambda\cos\lambda=0 \tag{4.3}$$

Краевые задачи для функций $f_k(y)$ при $k\geqslant 1$, определенные формулами (3.5), (3.7), (3.8), являются неоднородными, причем соответствующие однородные задачи имеют нетривиальное решение $f_0(y)$. Для однозначной определенности решений $f_k(y)$ наложим условие ортогональности

$$\int\limits_{-1}^{1} f_0(y)f_k(y)\,dy=0 \quad (k\geqslant 1) \tag{4.4}$$

Условие разрешимости краевой задачи для $f_k(y)$ с учетом условий (4.1), (4.4) имеет вид

$$a\mu_{k+2}=(f_k'''f_0-f_k''f_0')\,|_{-1}^{1}-\int\limits_{-1}^{1}F_k(y)f_0(y)\,dy \tag{4.5}$$

Таблица 1

| $i$ | $n$ | $\mu_2$ | $\mu_4$ | $\mu_6$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $0{,}10566\cdot 10^3$ | $-0{,}22022\cdot 10^4$ | $0{,}54689\cdot 10^5$ |
| | 2 | $0{,}11095\cdot 10^4$ | $-0{,}74982\cdot 10^5$ | $0{,}60469\cdot 10^7$ |
| | 3 | $0{,}48300\cdot 10^4$ | $-0{,}68147\cdot 10^6$ | $0{,}11473\cdot 10^9$ |
| | 4 | $0{,}14124\cdot 10^5$ | $-0{,}34090\cdot 10^7$ | $0{,}98198\cdot 10^9$ |
| | 5 | $0{,}32889\cdot 10^5$ | $-0{,}12117\cdot 10^8$ | $0{,}53226\cdot 10^{10}$ |
| 2 | 1 | $0{,}13904\cdot 10^2$ | $-0{,}10105\cdot 10^3$ | $0{,}91313\cdot 10^3$ |
| | 2 | $0{,}40603\cdot 10^3$ | $-0{,}16588\cdot 10^5$ | $0{,}80897\cdot 10^6$ |
| | 3 | $0{,}24760\cdot 10^4$ | $-0{,}25004\cdot 10^6$ | $0{,}30136\cdot 10^8$ |
| | 4 | $0{,}85614\cdot 10^4$ | $-0{,}16084\cdot 10^7$ | $0{,}36069\cdot 10^9$ |
| | 5 | $0{,}22039\cdot 10^5$ | $-0{,}66447\cdot 10^7$ | $0{,}23922\cdot 10^{10}$ |

Из (3.5), (3.7), (3.8), (4.4), (4.5) находим

$$f_1=f_3=0,\qquad \mu_3=\mu_5=0$$

$$f_2(y)={}^1/_{60}f_0(y)\lambda t(1-\nu)^{-1}[27-7\nu-2\lambda t(7+8\nu)+(17-7\nu)\lambda^2t^2]+$$
$$+{}^1/_4\mu_4\mu_2^{-1}yf_0'(y)+{}^1/_{60}(7\nu-17)(1-\nu)^{-1}yf_0'''(y)-{}^1/_{30}(1-\nu)^{-1}f_0''(y)\times$$
$$\times[7+8\nu+(7\nu-17)\lambda t/2]$$

$$\mu_4={}^1/_{15}(1-\nu)^{-1}\mu_2\lambda t[(7\nu-17)\lambda t+13\nu-3]$$

$$\mu_6={}^1/_{600}(1-\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1}\mu_2^2[{}^1/_{14}(667\nu^2-5114\nu+2067)+(7\nu-17)^2\lambda t]+$$
$$+{}^1/_{120}(1-\nu)^{-1}\mu_4\lambda t[7(13\nu-3)+\lambda t(7\nu-17)(9-2\lambda t)]$$

где $t=\operatorname{ctg}\lambda$ при $\lambda=\lambda_{1,n}$ и $t=-\operatorname{tg}\lambda$ при $\lambda=\lambda_{2,n}$.

Таблица 2

| $n$ | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | [10] |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,186 | 0,185 | 0,185 | 0,186 |
| 2 | 1,01 | 0,95 | 0,96 | 0,98 |
| 3 | 2,49 | 2,15 | 2,26 | 2,31 |
| 4 | 4,63 | 3,37 | 4,12 | 4,06 |

Значения $\mu_2$, $\mu_4$, $\mu_6$ при $\lambda=\lambda_{i,n}$ ($i=1, 2$; $n=1, 2, \ldots, 5$), $\nu=0{,}25$ приведены в таблице 1. Анализ результатов расчета показывает, что при значениях $\varepsilon=0{,}2$; $0{,}1$ и $0{,}05$ описанный метод позволяет вычислять, соответственно, 2, 4 и 9 низших частот колебаний. При этом вычисление поправочных членов асимптотики дает поправку для низшей частоты, соответственно, в 9,7%, 3,4% и 0,9%.

В таблице 2 приведены значения $\mu^{1/2}$ при $\varepsilon=0{,}05$; $\nu=0{,}25$; $\lambda=\lambda_{2,n}$ ($n=1, 2, 3, 4$), посчитанные по формуле

$$\mu=\sum_{i=2}^{2k}\varepsilon^i\mu_i\qquad (k=1,2,3)$$

Значения $\mu^{1/2}$ при $k=1$ соответствуют результатам классической теории колебаний балки ($\nu_*=0{,}25$). В последнем столбце приведены значения $\mu^{1/2}$, посчитанные по теории Тимошенко [10] с учетом инерции вращения и деформации сдвига.

Можно доказать [3], что если $\mathbf{u}(x_1, x_2)$, $\mu$ — асимптотическое решение исходной задачи, построенное по формулам (1.4), (2.1), то при достаточно малых $\varepsilon$ существует точное собственное значение $\mu_*$ рассматриваемой задачи такое, что $|\mu-\mu_*|=O(\varepsilon^{N-1})$.

Заметим, что случай продольных колебаний рассматривается аналогично изложенному выше. При этом следует положить $V_1^{(k)}=g_k(y)$,

$V_2^{(k)}=0$, $m=4$. Для первых членов асимптотики решения получены формулы

$$v_1^{(k)}(y,z)=g_k(y)-{}^1/_4\nu z^2(1-2\nu)^{-1}\mu_0 g_{k-2}(y)$$

$$v_2^{(k)}(y,z)=-\nu z(1-\nu)^{-1}g'_{k-1}(y)+{}^1/_4\nu(1-\nu)^{-2}\times$$

$$\times[{}^1/_3(1-\nu-\nu^2)(1-2\nu)^{-1}z^3-z]\mu_0 g'_{k-3}\quad (0\leqslant k\leqslant 4,\ g_n(y)=0 \text{ при } n<0 \text{ и } 1\leqslant n\leqslant 4)$$

$$g_0(y)=\cos({}^1/_2\pi n(y+1)),\quad \mu_0=3\pi^2n^2/4a$$

$$\mu_1=\mu_3=0,\quad \mu_2=-{}^1/_6\nu^2\mu_0^2(1-\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1}$$

$$\mu_4={}^1/_{180}(7\nu^2+10\nu-6)(1-\nu)^{-2}(1-2\nu)^{-2}\nu^2\mu_0^3\quad (n=1,2,\ldots)$$

Решение задачи о колебаниях тонкого прямоугольника с другими краевыми условиями на торцах $y=\pm1$ также может быть построено в виде (1.4), (2.1). Условия существования погранслойных решений рассмотрены в [7, 8, 11].

В заключение автор выражает признательность В. В. Кучеренко за постановку задачи и внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 553 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
3. *Кучеренко В. В., Попов В. А.* Асимптотика решений задач теории упругости в тонких областях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 1. С. 58–61.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев, Наук. думка, 1981. 283 с.
5. *Рубцова И. Г.* Анализ изгибных колебаний упругой прямоугольной пластины в области высоких частот // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 2. С. 92–96.
6. *Аксентян О. К., Селезнева Т. Н.* Асимптотический метод определения частот собственных колебаний плиты // Тр. 9-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. 1973. Л.: Судостроение, 1975. С. 152–157.
7. *Гусейн-Заде М. И.* О плоской задаче теории упругости для полуполосы // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 124–133.
8. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 117 с.
9. *Попов В. А.* Асимптотическое решение задачи об упругих колебаниях тонкого клина // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 111–117.
10. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
11. *Gregory R. D., Wan F. Y. M.* Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elasticity. 1984. V. 14. № 1. P. 27–64.


Москва

Поступила в редакцию
27.VIII.1987