МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1989

УДК 539.3

В. Е. ЮРИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ РАСТЯЖИМОГО КОЛЬЦА

Рассматриваются колебания тонкого упругого кольца с учетом его растяжимости. Кольцо вращается с малой угловой скоростью, являющейся медленной функцией времени. Методом осреднения получено решение во втором приближении. Показано, что как и в нерастяжимом кольце, влияние центробежных сил приводит к увеличению частот колебаний. Обнаружен другой эффект второго приближения — возникновение побочной волны, сдвинутой по амплитуде и по фазе. Этот эффект существенно связан с растяжимостью.

1. Рассмотрим тонкое упругое кольцо, вращающееся вокруг своей оси. Угловая скорость ω — малая и медленно меняющаяся величина по сравнению с собственными частотами кольца λ: $\omega \ll \lambda$; $\dot{\omega} \simeq \omega^2$ (точка означает дифференцирование по времени). Кольцо совершает колебания, причем деформации в любой его точке параллельны плоскости срединной линии. Срединная линия предполагается растяжимой.

Известно [1], что в этом случае для каждого числа $k=2, 3, \ldots$, существуют две формы колебаний таких, что на кольце укладывается k длин волн. При вращении кольца эти стоячие волны поворачиваются относительно него со скоростью, пропорциональной угловой скорости самого кольца ω. Изменение частоты колебаний в силу симметрии должно быть пропорционально ω^2.

Как и в случае нерастяжимого кольца, для построения второго приближения необходимо сначала уточнить математическую модель, причем это уточнение не ограничивается одним лишь добавлением центробежных и вращательных ускорений. Главная трудность здесь состоит в том, что даже в отсутствие колебаний кольцо будет деформировано — растянуто центробежными силами, поэтому радиальное смещение $u=u_c \sim \omega^2$. Колебания будут происходить в окрестности этого положения равновесия. Поэтому мы не можем воспользоваться обычными линейными уравнениями упругости, которые представляют собой линеаризацию нелинейных уравнений в окрестности нуля.

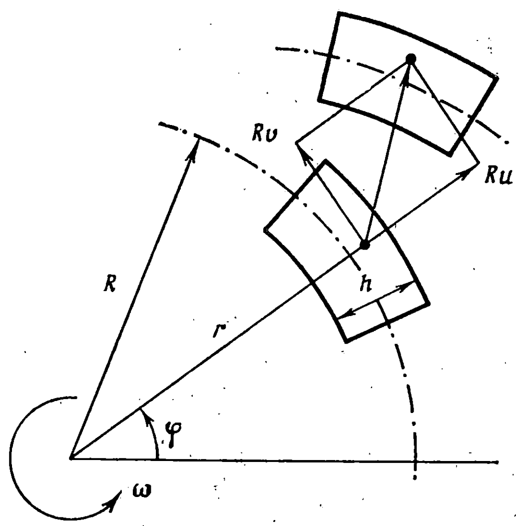
Нелинейность уравнений теории упругости следует из определения тензора деформаций

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = (\partial u_\alpha/\partial x_\beta + \partial u_\beta/\partial x_\alpha + (\partial u_\gamma/\partial x_\alpha)(\partial u_\gamma/\partial x_\beta))/2$$

u_α — компоненты вектора перемещений в данной точке (см. [2]). Поэтому выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}\, dV$$

$E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор упругих коэффициентов, будет содержать члены, пропорциональные третьей и четвертой степени смещений, которые приведут к появлению в уравнениях Лагранжа членов второй и третьей степени. Обычно уравнения линеаризуют в окрестности нуля, и этими членами пренебрегают. Но в данном случае линеаризация должна быть выполнена в окрестности положения равновесия $u=u_c$. При этом в уравнениях по-



явятся, в частности, члены типа $u_c u_v \sim \omega^2 u_v$, где u_v — колебательная составляющая смещения, т. е. именно того порядка, который мы рассматриваем. Без учета таких членов уравнения неверны.

Пусть радиус кольца равен R, толщина h, площадь и момент инерции поперечного сечения S, J, модуль Юнга E, плотность ρ. Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения $\delta^2=E/(\rho R^2)$; $\varkappa^2=EJ/(\rho S R^4)$, где δ и $\varkappa$ имеют размерность частоты. Так как кольцо тонкое, то $\varkappa^2/\delta^2 = J/(SR^2)=h^2/(12R^2)\ll 1$.

В цилиндрической системе координат, связанной с кольцом, радиальное смещение точки кольца обозначим $Ru(r, \varphi)$, касательное — $Rv(r, \varphi)$, где u, v — соответствующие безразмерные смещения (фигура). Задача двумерная, поэтому ненулевые компоненты тензора деформаций есть (штрихом обозначено дифференцирование по углу φ):

$$\varepsilon_r = R\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{R^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{R^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2$$

$$\varepsilon_\varphi = R\frac{u+v'}{r} + \frac{R^2}{2}\left(\frac{u+v'}{r}\right)^2 + \frac{R^2}{2}\left(\frac{u'-v}{r}\right)^2 \qquad (1.1)$$

$$2\gamma_{r\varphi} = R\frac{u'-v}{r} + R\frac{\partial v}{\partial r} + R^2\left(\frac{u'-v}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u+v'}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

На обоих сторонах кольца $\sigma_r=\tau_{r\varphi}=0$. Для простоты будем считать, что коэффициент Пуассона $\nu=0$. Тогда $\varepsilon_r=\gamma_{r\varphi}=0$ на границе.

Введем вспомогательную координату $x=(r-R)/R$, $|x|\leqslant x_0=h/2R$. Деформации ε_r и $\gamma_{r\varphi}$ можно разложить в ряд по x: $\varepsilon_r=O(u, v)[a_0+a_1x+a_2x^2+O(x^3)]$ ($\gamma_{r\varphi}$ — аналогично). Учитывая граничные условия, эти ряды можно записать в более конкретном виде: $\varepsilon_r=O(u, v)[x_0^2-x^2+x_0^2O(x)]$ ($\gamma_{r\varphi}$ — аналогично). Смещения u, v будем искать также в виде рядов по x:

$$u(x, \varphi)=u_0(\varphi)+xu_1(\varphi)+x^2u_2(\varphi)+O(u_0, v_0)O(x^3)$$

$$v(x, \varphi)=v_0(\varphi)+xv_1(\varphi)+x^2v_2(\varphi)+O(u_0, v_0)O(x^3)$$

u_0, v_0 — смещения средней линии. Пользуясь выражениями для ε_r, $\gamma_{r\varphi}$, можно последовательно найти коэффициенты этих рядов

$$u=u_0-(u_0'-v_0)^2x/2+x_0^2O(u_0, v_0)O(x)$$

$$v=v_0-(u_0'-v_0)(1-u_0-v_0')x+x_0^2O(u_0, v_0)O(x)$$

Подставляя эти выражения во вторую формулу (1.1), найдем окружную деформацию ε_φ. Для определения погонной плотности потенциальной энергии нужно вычислить интеграл по площади поперечного сечения

$$\Pi = \int\limits_s \frac{E}{2R}(\varepsilon_r^2+\varepsilon_\varphi^2+2\gamma_{r\varphi}^2)\,r\,dr\,dz = ES(u_0+v_0')^2/2+ \tag{1.2}$$
$$+EJR^{-2}(u_0+u_0'')^2/2+ES[(u_0+v_0')^3+(u_0+v_0')(v_0-u_0')^2]/2+$$
$$+EJR^{-2}(u_0+u_0'')[(u_0+v_0')(3u_0+u_0''+2v_0')+$$
$$+(v_0-u_0')(v_0+2v_0''-u_0')]/2+ESO(u_0^4, v_0^4)+ESh^4R^{-4}O(u_0^2, v_0^2)$$

Первые два члена в (1.2) соответствуют линейной теории, третий и четвертый представляют собой старшие (по h^2/R^2) члены третьей степени по смещениям. Так как $J/(SR^2)\ll 1$, то четвертый член мал по сравнению с третьим, и им можно пренебречь. Однако пренебрегать вторым членом по сравнению с первым нельзя, так как это качественно изменило бы систему, а именно привело бы к обращению половины собственных частот в ноль. Члены четвертой степени по u, v и члены высших степеней по h^2/R^2, в данной задаче интереса не представляют.

При вычислении погонной плотности кинетической энергии достаточно ограничиться квадратичными членами, так как все старшие члены дадут поправки порядка ω^3:

$$T=\rho SR^2[(v_0^{\boldsymbol{\cdot}}+\omega+\omega u_0)^2+(u_0^{\boldsymbol{\cdot}}-\omega v_0)^2]/2+\rho JO(u_0^{\boldsymbol{\cdot}2},\ v_0^{\boldsymbol{\cdot}2}) \tag{1.3}$$

Члены, содержащие множитель ρJ, соответствуют вращению сечения как жесткого целого и далее не учитываются.

Формулы (1.2), (1.3) определяют плотность энергии в кольце в зависимости от смещений средней линии $u_0(\varphi)$, $v_0(\varphi)$. Далее рассматриваются только эти средние смещения, индекс 0 далее опускается.

2. Уравнения Лагранжа с учетом квадратичных членов имеют вид

$$v^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+2\omega u^{\boldsymbol{\cdot}}+\omega^{\boldsymbol{\cdot}}u+\omega^{\boldsymbol{\cdot}}-\omega^2 v-\delta^2(v''+u')-3\delta^2(v'+u)(v''+u')+$$
$$+\delta^2(v-u')(u+u'')=p \tag{2.1}$$
$$u^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}-2\omega v^{\boldsymbol{\cdot}}-\omega^{\boldsymbol{\cdot}}v-\omega^2-\omega^2 u+\delta^2(v'+u)+\varkappa^2(u^{\mathrm{IV}}+2u''+u)-\delta^2[(v''+u')\times$$
$$\times(v-u')+(v'+u)(v'-u'')+3(v'+u)^2/2+(v-u')^2/2]=q$$

p, q — нормированные касательная и радиальная составляющие распределенных внешних сил, действующих на кольцо. Ограничимся случаем, когда эти силы не зависят от угла.

В отсутствие колебаний $v=0$, $u=u_c\sim\omega^2$. При определении u_c можно не учитывать квадратичные члены, так как они дадут поправку порядка ω^4. Такого же порядка будут члены $\omega u_c^{\boldsymbol{\cdot}}$, $\omega^{\boldsymbol{\cdot}} u_c$, $\omega^2 u_c$, $u_c^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$. Тогда получаем уравнения равновесия вращающегося кольца в виде $\omega^{\boldsymbol{\cdot}}=p$, $-\omega^2+\delta^2 u_c+$ $+\varkappa^2 u_c=q$. Из второго уравнения $u_c=(q+\omega^2)(\delta^2+\varkappa^2)^{-1}\approx(q+\omega^2)/\delta^2$. В дальнейшем для простоты положим $q=0$. Однако считать касательную силу p тоже равной нулю нельзя, так как в данной модели именно она определяет вращательное ускорение, согласно первому уравнению.

Подставляя $u=\omega^2/\delta^2+u_v$ в уравнения (2.1) и линеаризуя их по колебательным составляющим смещений v, u_v, получаем уравнения колебаний упругого кольца с учетом всех членов порядка ω^2 (индекс v опущен):

$$v^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+2\omega u^{\boldsymbol{\cdot}}+\omega^{\boldsymbol{\cdot}}u-\omega^2(3v''+4u')-\delta^2(v''+u')=0$$
$$u^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}-2\omega v^{\boldsymbol{\cdot}}-\omega^{\boldsymbol{\cdot}}v+\omega^2(4v'+2u-u'')+\delta^2(v'+u)+\varkappa^2(u^{\mathrm{IV}}+2u''+u)=0 \tag{2.2}$$

Решение невозмущенного уравнения ($\omega=0$) имеет вид

$$v=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2} V_{ki}[(a_{ki}\cos k\varphi+b_{ki}\sin k\varphi)\cos\lambda_{ki}t+$$

$$+(m_{ki}\cos k\varphi+n_{ki}\sin k\varphi)\sin\lambda_{ki}t] \tag{2.3}$$

$$u=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}U_{ki}[(-a_{ki}\sin k\varphi+b_{ki}\cos k\varphi)\cos\lambda_{ki}t+$$

$$+(-m_{ki}\sin k\varphi+n_{ki}\cos k\varphi)\sin\lambda_{ki}t]$$

a_{ki}, b_{ki}, m_{ki}, n_{ki} — произвольные постоянные. Собственные частоты и модальные столбцы равны

$$\lambda_{k1}=\delta[(k^2+1)^{1/2}+O(\varkappa^2/\delta^2)]$$

$$\lambda_{k2}=\varkappa[k(k^2-1)(k^2+1)^{-1/2}+O(\varkappa^2/\delta^2)] \tag{2.4}$$

$$\left\|\begin{matrix}V_{k1}\\U_{k1}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}k\\1\end{matrix}\right\|+O(\varkappa^2/\delta^2),\quad\left\|\begin{matrix}V_{k2}\\U_{k2}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}-1\\k\end{matrix}\right\|+O(\varkappa^2/\delta^2)$$

При этом

$$v^{\bullet}=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}V_{ki}\lambda_{ki}[-(a_{ki}\cos k\varphi+b_{ki}\sin k\varphi)\sin\lambda_{ki}t+ \tag{2.5}$$

$$+(m_{ki}\cos k\varphi+n_{ki}\sin k\varphi)\cos\lambda_{ki}t]$$

$$u^{\bullet}=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}U_{ki}\lambda_{ki}[-(-a_{ki}\sin k\varphi+b_{ki}\cos k\varphi)\sin\lambda_{ki}t+$$

$$+(-m_{ki}\sin k\varphi+n_{ki}\cos k\varphi)\cos\lambda_{ki}t]$$

Сделаем в возмущенном уравнении (2.2) замену переменных по формулам (2.3), (2.5), считая все a, b, m, n медленными функциями времени. При умножении на $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi$ и интегрирования по φ все формы с различными k разделяются, и при каждом k получаем четыре уравнения для восьми переменных: $a_{k1}\dots n_{k1}$, $a_{k2}\dots n_{k2}$. Еще четыре уравнения получаются из условий совместности замены (2.3), (2.5):

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}V_{ki}[(a_{ki}^{\bullet}\cos k\varphi+b_{ki}^{\bullet}\sin k\varphi)\cos\lambda_{ki}t+$$

$$+(m_{ki}^{\bullet}\cos k\varphi+n_{ki}^{\bullet}\sin k\varphi)\sin\lambda_{ki}t]=0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}U_{ki}[(-a_{ki}^{\bullet}\sin k\varphi+b_{ki}^{\bullet}\cos k\varphi)\cos\lambda_{ki}t+$$

$$+(-m_{ki}^{\bullet}\sin k\varphi+n_{ki}^{\bullet}\cos k\varphi)\sin\lambda_{ki}t]=0$$

Разрешая эти уравнения относительно производных, получаем при каждом k:

$$a_i^{\bullet}=-2\sum_{j=1}^{2}[\omega s_{ij}(-b_j\sin\lambda_jt+n_j\cos\lambda_jt)+\omega^2\tau_{ij}(a_j\cos\lambda_jt+m_j\sin\lambda_jt)+$$

$$+\omega^{\bullet}r_{ij}(b_j\cos\lambda_jt+n_j\sin\lambda_jt)]\sin\lambda_it$$

$$m_i^{\bullet}=2\sum_{j=1}^{2}[\omega s_{ij}(-b_j\sin\lambda_jt+n_j\cos\lambda_jt)+\omega^2\tau_{ij}(a_j\cos\lambda_jt+m_j\sin\lambda_jt)+$$

$$+\omega^{\bullet}r_{ij}(b_j\cos\lambda_jt+n_j\sin\lambda_jt)]\cos\lambda_it$$

$$b_i^{\bullet}=-2\sum_{j=1}^{2}[-\omega s_{ij}(-a_j\sin\lambda_j t+m_j\cos\lambda_j t)+\omega^2\tau_{ij}(b_j\cos\lambda_j t+n_j\sin\lambda_j t)-$$

$$-\omega^{\bullet}r_{ij}(a_j\cos\lambda_j t+m_j\sin\lambda_j t)]\sin\lambda_i t$$

$$n_i^{\bullet}=2\sum_{j=1}^{2}[-\omega s_{ij}(-a_j\sin\lambda_j t+m_j\cos\lambda_j t)+$$

$$+\omega^2\tau_{ij}(b_j\cos\lambda_j t+n_j\sin\lambda_j t)-$$

$$-\omega^{\bullet}r_{ij}(a_j\cos\lambda_j t+m_j\sin\lambda_j t)]\cos\lambda_i t \qquad (2.6)$$

$$\|s_{ij}\|=-A^{-1}\begin{Vmatrix}U_1\lambda_1 & U_2\lambda_2\\ V_1\lambda_1 & V_2\lambda_2\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix}V_1\lambda_1 & V_2\lambda_2\\ U_1\lambda_1 & U_2\lambda_2\end{Vmatrix},\quad \|r_{ij}\|=-\frac{1}{2}A^{-1}\begin{Vmatrix}U_1 & U_2\\ V_1 & V_2\end{Vmatrix}$$

$$\|\tau_{ij}\|=-\frac{1}{2}A^{-1}\begin{Vmatrix}3k^2V_1+4kU_1 & 3k^2V_2+4kU_2\\ 4kV_1+(k^2+2)U_1 & 4kV_2+(k^2+2)U_2\end{Vmatrix}$$

3. Для решения этой системы уравнений применим метод осреднения. Выполним замену $(a_i,\ b_i,\ m_i,\ n_i)\to(\alpha_i,\ \beta_i,\ \mu_i,\ \nu_i)$, устраняющую быстроменяющиеся члены первого порядка малости

$$a_i=\alpha_i+\omega[(s_{ii}/2\lambda_i)(-\beta_i\sin 2\lambda_i t+\nu_i\cos 2\lambda_i t)+$$
$$+(s_{ij}/\lambda_+)(-\beta_j\sin\lambda_+ t+\nu_j\cos\lambda_+ t)+(s_{ij}/\lambda_-)(\beta_j\sin\lambda_- t+\nu_j\cos\lambda_- t)]$$
$$m_i=\mu_i+\omega[(s_{ii}/2\lambda_i)(\beta_i\cos 2\lambda_i t+\nu_i\sin 2\lambda_i t)+$$
$$+(s_{ij}/\lambda_+)(\beta_j\cos\lambda_+ t+\nu_j\sin\lambda_+ t)+(s_{ij}/\lambda_-)(-\beta_j\cos\lambda_- t+\nu_j\sin\lambda_- t)] \qquad (3.1)$$
$$b_i=\beta_i-\omega[(s_{ii}/2\lambda_i)(-\alpha_i\sin 2\lambda_i t+\mu_i\cos 2\lambda_i t)+$$
$$+(s_{ij}/\lambda_+)(-\alpha_j\sin\lambda_+ t+\mu_j\cos\lambda_+ t)+(s_{ij}/\lambda_-)(\alpha_j\sin\lambda_- t+\mu_j\cos\lambda_- t)]$$
$$n_i=\nu_i-\omega[(s_{ii}/2\lambda_i)(\alpha_i\cos 2\lambda_i t+\mu_i\sin 2\lambda_i t)+$$
$$+(s_{ij}/\lambda_+)(\alpha_j\cos\lambda_+ t+\mu_j\sin\lambda_+ t)+(s_{ij}/\lambda_-)(-\alpha_j\cos\lambda_- t+\mu_j\sin\lambda_- t)].$$

В этих формулах и далее $j\neq i$; $\lambda_\pm=\lambda_i\pm\lambda_j$.

После этой замены и осреднения по времени первая и вторая формы разделяются и уравнения принимают вид

$$\alpha_i^{\bullet}=\omega s_{ii}\beta_i+\omega^2\sigma_i\mu_i-\omega^{\bullet}r_{ii}\nu_i \qquad (3.2)$$
$$\mu_i^{\bullet}=\omega s_{ii}\nu_i-\omega^2\sigma_i\alpha_i+\omega^{\bullet}r_{ii}\beta_i$$
$$\beta_i^{\bullet}=-\omega s_{ii}\alpha_i+\omega^2\sigma_i\nu_i+\omega^{\bullet}r_{ii}\mu_i$$
$$\nu_i^{\bullet}=-\omega s_{ii}\mu_i-\omega^2\sigma_i\beta_i-\omega^{\bullet}r_{ii}\alpha_i$$
$$\sigma_i=-\tau_{ii}+s_{ii}^2/2\lambda_i-2s_{ij}s_{ji}\lambda_i(\lambda_j^2-\lambda_i^2)^{-1} \qquad (3.3)$$

С точностью до обозначений эти уравнения совпадают с уравнениями, полученными в [1, 3] для нерастяжимого кольца, что позволяет воспользоваться приведенным там же решением. Частное решение, соответствующее стоячей волне $v=CV_{ki}\cos k\varphi\cos\lambda_{ki}t$, $u=-CU_{ki}\sin k\varphi\cos\lambda_{ki}t$ в неподвижном кольце, при вращении принимает вид

$$\alpha_i=(C/2)\,[\exp(-r_{ii}\omega)\cos(\Phi_i-\Psi_i)+\exp(r_{ii}\omega)\cos(\Phi_i+\Psi_i)]$$
$$\mu_i=(C/2)\,[\exp(-r_{ii}\omega)\sin(\Phi_i-\Psi_i)-\exp(r_{ii}\omega)\sin(\Phi_i+\Psi_i)]$$
$$\beta_i=(C/2)\,[-\exp(-r_{ii}\omega)\sin(\Phi_i-\Psi_i)-\exp(r_{ii}\omega)\sin(\Phi_i+\Psi_i)]$$
$$\nu_i=(C/2)\,[\exp(-r_{ii}\omega)\cos(\Phi_i-\Psi_i)-\exp(r_{ii}\omega)\cos(\Phi_i+\Psi_i)]$$
$$\alpha_j=\mu_j=\beta_j=\nu_j=0$$
$$\Phi_i=s_{ii}\int_0^t\omega(\theta)\,d\theta,\qquad \Psi_i=\sigma_i\int_0^t\omega^2(\theta)\,d\theta$$

Сохраняя принятую точность вычислений, можно положить $\exp(r_{ii}\omega)=1+r_{ii}\omega$. Тогда, выполняя замены (3.1), (2.3) и учитывая, что в силу обозначений (2.6) $s_{ii}/\lambda_i-2r_{ii}=0$, получаем решение в виде

$$v=CV_{ki}\cos(k\varphi+\Phi_i)\cos(\lambda_{ki}t+\Psi_i)+\omega A_iCV_{kj}\sin(k\varphi+\Phi_i)\sin(\lambda_{ki}t+\Psi_i)$$

$$u=-CU_{ki}\sin(k\varphi+\Phi_i)\cos(\lambda_{ki}t+\Psi_i)+\omega A_iCU_{kj}\cos(k\varphi+\Phi_i)\sin(\lambda_{ki}t+\Psi_i)$$

где $A_i=2s_{ji}\lambda_j/(\lambda_j^2-\lambda_i^2)$. Коэффициенты s_{ii}, σ_i, A_i, вычисленные по формулам (2.6), (3.3), с учетом (2.4), равны

$$\begin{gathered} s_{22}=-s_{11}=2k(k^2+1)^{-1}+O(\varkappa^2/\delta^2)\\ \sigma_1=(2\delta)^{-1}[(3k^6+16k^4+7k^2+7)(k^2+1)^{-5/2}+O(\varkappa^2/\delta^2)]\\ \sigma_2=(2\varkappa)^{-1}[k(k^2-1)(k^2+1)^{-3/2}+O(\varkappa^2/\delta^2)]\\ A_1=2\delta^{-1}[(k^2-1)(k^2+1)^{-3/2}+O(\varkappa^2/\delta^2)]\\ A_2=-2\varkappa\delta^{-2}[k(k^2-1)^2(k^2+1)^{-5/2}+O(\varkappa^2/\delta^2)] \end{gathered}\tag{3.4}$$

Как и в нерастяжимом кольце, вращение кольца приводит к вращению стоячей волны с относительной скоростью $\varphi_{ki}^{\bullet}=-\Phi_i^{\bullet}/k=-s_{ii}\omega/k$ и к увеличению частоты на $\Delta\lambda_{ki}=\Psi_i^{\bullet}=\sigma_i\omega^2$. Кроме того, в растяжимом кольце возбуждается побочная волна с малой амплитудой, пропорциональной ω. Узлы этой волны совпадают с пучностями основной, фаза сдвинута на $\pi/2$, частота и скорость вращения такие же, как у основной. Если вращение кольца прекращается, эта волна исчезает.

В предельном случае нерастяжимого кольца $\varkappa^2/\delta^2\to0$. При этом высокочастотные колебания по первой форме отсутствуют, а вторая форма описывает чисто изгибные колебания. Как видно из (3.4), коэффициенты s_{22}, σ_2 совпадают в этом случае со значениями, вычисленными для нерастяжимого кольца, а побочная волна исчезает, поскольку $A_2\to0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985, 125 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце. Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–23.

Москва

Поступила в редакцию 4.I.1987