

УДК 539.3:534.1

А. А. ЗЕЛЕНИН, Л. М. ЗУБОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ УПРУТОГО ЦИЛИНДРА С ДИСКЛИНАЦИЕЙ

Исследовано влияние внутренних напряжений, обусловленных наличием клиновой дисклинации, на выпучивание кругового полого цилиндра, нагруженного по боковой поверхности равномерным давлением. Рассмотрен также случай, когда внутренние напряжения создаются дисклинацией и выворачиванием цилиндра наизнанку. На плоскости параметров нагружения определена область устойчивости, при выходе из которой возникают плоские формы выпучивания цилиндра. Изучены случаи потери устойчивости, происходящей только за счет внутренних напряжений, без приложения внешнего давления. Исследовано начальное послекритическое поведение цилиндра с дисклинацией. Определено число ответвляющихся решений и даны их асимптотические представления при нагрузках, близких к критической.

1. Рассмотрим равновесие упругого кругового цилиндра при наличии внутренних напряжений, вызванных клиновой дисклинацией, и внешнего равномерного давления интенсивности q .

Пусть r, φ, z и e_r, e_φ, e_z — цилиндрические координаты и соответствующие им единичные базисные векторы в отсчетной конфигурации упругого тела; R, Φ, Z и e_R, e_Φ, e_Z — цилиндрические координаты и единичные базисные векторы в текущей конфигурации упругого тела соответственно. Дифференциальные уравнения равновесия при отсутствии массовых сил и граничные условия имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.1)$$

$$e_r \cdot \mathbf{D}|_{r=r_1} = 0, \quad e_r \cdot \mathbf{D}|_{r=r_0} = -q J e_r \cdot (\mathbf{C}^T)^{-1} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{C} = \nabla \mathbf{R}, \quad J = \det \mathbf{C}$$

где r_0, r_1 — внешний и внутренний радиусы цилиндра, \mathbf{R} — радиус-вектор точки деформированного тела, \mathbf{D} — несимметричный тензор напряжений Пиолы. Для описания упругих свойств тела принимается модель полуматериала [1]:

$$\mathbf{D} = 2\mu [v s_1 (1 - 2\nu)^{-1} - 1] \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{C} + 2\mu \mathbf{C} \\ \mathbf{U} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)^{1/2}, \quad s_1 = \text{tr } \mathbf{U} - 3 \quad (1.3)$$

где \mathbf{U} — тензор искажения, μ, ν — постоянные. В области малых деформаций μ и ν имеют смысл соответственно модуля сдвига и коэффициента Пуассона.

Начальная деформация, отвечающая докритическому, исследуемому на устойчивость состоянию равновесия, ищется в виде [2]:

$$\mathbf{R} = f^\circ(r), \quad \Phi = \kappa \varphi, \quad Z = z \quad (1.4)$$

Здесь и далее «градусом» отмечаются величины, относящиеся к начальному состоянию. Случай $\kappa > 1$ соответствует деформации, возникающей после удаления из кругового полого цилиндра сектора $2\pi\kappa^{-1} \leq \varphi \leq 2\pi$ и поворота сечения $\varphi = 2\pi\kappa^{-1}$ вокруг оси цилиндра до совмещения с плоскостью сечения $\varphi = 0$. Таким образом, в отсчетной конфигурации тело за-

нимает односвязную область ($0 \leq \varphi \leq 2\pi\kappa^{-1}$), а в деформированном состоянии двусвязную ($0 \leq \Phi \leq 2\pi$). Случай $0 < \kappa < 1$ соответствует деформации, когда в разрезанный полуплоскостью $\varphi=0$ цилиндр вставляется клин из того же упругого материала с углом раствора $2\pi(1-\kappa)$, причем тело как в отсчетной, так и деформированной конфигурациях занимает двусвязную область ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$). При $\kappa=-1$ имеем деформацию, возникающую после выворачивания цилиндра наизнанку. Случай $\kappa < -1$ описывает деформацию, возникающую после выворачивания цилиндра наизнанку, удаления сектора $-2\pi\kappa^{-1} \leq \varphi \leq 2\pi$ и поворота сечения $\varphi=2\pi\kappa^{-1}$ вокруг оси цилиндра до совмещения с плоскостью сечения $\varphi=-2\pi$. При $\kappa < -1$ тело в отсчетной конфигурации занимает односвязную область ($0 \leq \varphi \leq 2\pi\kappa^{-1}$), а в деформированном состоянии двусвязную ($-2\pi \leq \Phi \leq 0$). Случай $-1 < \kappa < 0$ соответствует деформации, когда после выворачивания наизнанку в разрезанный полуплоскостью $\varphi=-2\pi$ цилиндр вставляется клин из того же материала с углом раствора $2\pi(1+\kappa)$, при этом $-2\pi \leq \varphi \leq 0$, $-2\pi \leq \Phi \leq 0$.

Введем безразмерные величины $R^0 = f^0/r_0$, $p = q/(2\mu)$, $\eta = r/r_0$ и будем в дальнейшем рассматривать все соотношения в безразмерной форме. Градиент деформации, соответствующий преобразованию (1.4), имеет вид

$$C^0 = R^0 e_r e_r + (\kappa R^0/\eta) e_\varphi e_\varphi + e_z e_z, \quad R^0 = dR^0/d\eta \quad (1.5)$$

$$\det C^0 = R^0 R^0 \kappa/\eta > 0 \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что если $\kappa > 0$, то $R^0 > 0$, откуда имеем

$$U^0 = R^0 e_r e_r + (\kappa R^0/\eta) e_\varphi e_\varphi + e_z e_z, \quad s_1 = R^0 + \kappa R^0/\eta - 2 \quad (1.7)$$

Уравнение равновесия (1.1) и граничные условия (1.2) с учетом (1.3), (1.5), (1.7) принимают вид [2]:

$$R^{0''} + R^0/\eta - \kappa^2 R^0/\eta = (1-\nu)^{-1}(1-\kappa)/\eta \quad (1.8)$$

$$(1-2\nu)^{-1}[(1-\nu)R^0 + \kappa\nu R^0/\eta - 1] + p_1 \kappa R^0/\eta = 0 \quad (\eta=1, k) \quad (1.9)$$

Здесь $k=r_1/r_0$, $p_1=0$ при $\eta=k$, $p_1=p$ при $\eta=1$. Решая краевую задачу (1.8), (1.9), получаем

$$R^0 = \beta(C_1 \eta^\kappa + C_2 \eta^{-\kappa} + \eta) \quad (1.10)$$

$$\beta = [(1-\nu)(1+\kappa)]^{-1}, \quad C_1 = (1-2\nu)p_2(1-k^{\kappa+1})(p_3 - p_2 k^{2\kappa})^{-1} \\ C_2 = (k^{2\kappa} p_2 - p_3 k^{\kappa+1})(p_3 - p_2 k^{2\kappa})^{-1} \quad (1.11)$$

$$p_2 = 1-p, \quad p_3 = 1+p(1-2\nu)$$

Из (1.10), (1.11) видно, что внутренний радиус деформированного цилиндра $R^0(k) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 1$. При $\kappa < 0$ из (1.6) следует, что $R^0 < 0$, поэтому вместо (1.7) получаем

$$U^0 = -R^0 e_r e_r - (\kappa R^0/\eta) e_\varphi e_\varphi + e_z e_z \quad (1.12)$$

$$s_1 = -R^0 - \kappa R^0/\eta - 2$$

Краевая задача (1.1), (1.2) с учетом (1.3), (1.5), (1.12) принимает вид [2]:

$$R^{0''} + R^0/\eta - \kappa^2 R^0/\eta = (1-\nu)^{-1}(\kappa-1)/\eta \quad (1.13)$$

$$(1-2\nu)^{-1}[(1-\nu)R^0 + \kappa\nu R^0/\eta + 1] + p_1 \kappa R^0/\eta = 0 \quad (\eta=k, 1) \quad (1.14)$$

Заметим, что в (1.14) $p_1=0$ при $\eta=1$, $p_1=p$ при $\eta=k$, так как нагрузка прикладывается к внешней границе вывернутого цилиндра. Решая уравнение (1.13) совместно с граничными условиями (1.14), получаем

$$R^0 = \beta(H_1 \eta^\kappa + H_2 \eta^{-\kappa} - \eta) \quad (1.15)$$

$$H_1 = (1-2\nu)p_2(1-k^{\kappa+1})(p_3 k^{2\kappa} - p_2)^{-1} \quad (1.16)$$

$$H_2 = (p_3 k^{2\kappa} - p_2 k^{\kappa+1})(p_3 k^{2\kappa} - p_2)^{-1}$$

Раскрывая неопределенность, которая появляется в (1.15) при $\kappa = -1$, по правилу Лопитала, получаем

$$\begin{aligned} R^\circ &= \omega(G_1 \eta^{-1} + G_2 \eta - \eta \ln \eta) \\ \omega &= (1-\nu)^{-1}, \quad G_1 = (1-2\nu)p_2 \ln k(p_2 - p_3 k^{-2})^{-1} \\ G_2 &= p_2 \ln k(p_2 - p_3 k^{-2})^{-1} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Из (1.15)–(1.17) видно, что внутренний радиус деформированного цилиндра $R^\circ(1) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 1$.

Будем отыскивать плоские формы равновесия, близкие к начальному деформированному состоянию, т. е. положим

$$\begin{aligned} R &= R^\circ(\eta) + \rho(\eta, \varphi), \quad \Phi = \kappa\varphi + \psi(\eta, \varphi), \quad Z = z \\ \mathbf{R} &= R\mathbf{e}_R + Z\mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (1.18)$$

Подставив (1.18) в (1.1), (1.2) и умножив обе части уравнений (1.1), (1.2) на $(1-2\nu)[2\mu(1-\nu)]^{-1}$ и $(2\mu)^{-1}$ соответственно, получим нелинейную краевую задачу относительно неизвестных $\rho(\eta, \varphi)$, $\psi(\eta, \varphi)$:

$$l(x, D)\mathbf{w}(x) = \mathbf{f}(\mathbf{w}, x) \quad (1.19)$$

$$b(x, D)\mathbf{w}(x) = \mathbf{F}(\mathbf{w}, x) \quad (\eta = 1, k) \quad (1.20)$$

$$x = (\eta, \varphi), \quad \mathbf{w} = (\rho, \psi), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2), \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2)$$

$$l(x, D) = (l_{ij}(x, D)), \quad b(x, D) = (b_{ij}(x, D)) \quad (i, j = 1, 2)$$

$$l_{11}(x, D) = \partial_1^2 + \eta^{-2} B \partial_2^2 + \eta^{-1} \partial_1 - \kappa^2 \eta^{-2}$$

$$l_{12}(x, D) = \eta^{-1} R^\circ B_1 \partial_1 \partial_2 + [\eta^{-1} \delta(1-\nu)^{-1} - 2\eta^{-2} \kappa R^\circ] \partial_2$$

$$l_{21}(x, D) = \eta^{-1} B \partial_1 \partial_2 + \eta^{-2} [2\kappa - \kappa B_1 - B B_1 (\kappa - 1)] \partial_2$$

$$l_{22}(x, D) = R^\circ B \partial_1^2 + \eta^{-2} R^\circ \partial_2^2 + B [2R^\circ + \eta^{-1} R^\circ + \eta^{-1} R^\circ B (\kappa - 1)] \partial_1$$

$$\begin{aligned} f_1 &= R(\partial_1 \psi)^2 + 2\eta^{-2} \kappa \rho \partial_2 \psi + \eta^{-2} R(\partial_2 \psi)^2 + \\ &+ \delta(1-\nu)^{-1} [\eta^{-1} (MQ^{-1} - 1) + \partial_1 (MQ^{-1}) - NQ^{-1} \partial_1 \psi - \\ &- \eta^{-1} \partial_2 (NQ^{-1}) + \eta^{-1} C_3^{-1} \partial_2 N_1 - \eta^{-1} (MQ^{-1} - 1) \partial_2 \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \delta(1-\nu)^{-1} [\partial_1 (NQ^{-1}) - \partial_1 (N_1 C_3^{-1}) + \eta^{-1} \partial_2 (MQ^{-1}) + \\ &+ \eta^{-1} (1 - \partial_2 \Phi) NQ^{-1} - \eta^{-1} C_3^{-1} N_1 (1 - \kappa) + (MQ^{-1} - 1) \partial_1 \psi] - \\ &- 2\partial_1 \rho \partial_1 \psi - \rho \partial_1^2 \psi - \eta^{-1} \rho \partial_1 \psi - \eta^{-2} (2\partial_2 \rho \partial_2 \psi + \rho \partial_2^2 \psi) \end{aligned}$$

$$b_{11}(x, D) = \nu_1 (\partial_1 + \eta^{-1} \kappa) - \eta^{-1} \kappa p_2, \quad b_{12}(x, D) = \eta^{-1} R^\circ (\nu_1 - p_2) \partial_2$$

$$b_{21}(x, D) = -\nu_1 \eta^{-1} B \partial_2 + \eta^{-1} p_2 \partial_2, \quad b_{22}(x, D) = \nu_1 R^\circ B \partial_1$$

$$F_1 = \delta(1-2\nu)^{-1} (MQ^{-1} - 1) - (\nu_1 - p_2) M_2$$

$$F_2 = \delta(1-2\nu)^{-1} (NQ^{-1} - N_1 C_3^{-1}) - \nu_1 N_2$$

$$\nu_1 = (1-\nu)(1-2\nu)^{-1}, \quad B_1 = \delta(1-\nu)^{-1} C_3^{-1}, \quad B = 1 - B_1$$

$$C_3 = R^\circ + \kappa \eta^{-1} R^\circ, \quad M = C_3 + M_1 + M_2, \quad N = N_1 + N_2$$

$$M_1 = \partial_1 \rho + \kappa \eta^{-1} \rho + \eta^{-1} R^\circ \partial_2 \psi, \quad M_2 = \eta^{-1} \rho \partial_2 \psi$$

$$N_1 = R^\circ \partial_1 \psi - \eta^{-1} \partial_2 \rho, \quad N_2 = \rho \partial_1 \psi$$

$$O = C_3 [1 + 2C_3^{-1} (M_1 + M_2) + C_3^{-2} (M_1 + M_2)^2 + C_3^{-2} N^2]^{1/2}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & (\kappa > 0) \\ -1 & (\kappa < 0) \end{cases}, \quad p_2 = \begin{cases} 1 & (\eta = k, \kappa > 0 \text{ и } \eta = 1, \kappa < 0) \\ 1-p & (\eta = k, \kappa < 0 \text{ и } \eta = 1, \kappa > 0) \end{cases}$$

$$\partial_1 = \partial / \partial \eta, \quad \partial_2 = \partial / \partial \varphi$$

Дифференциальные выражения l и b в левой части (1.19), (1.20) являются линейными, а \mathbf{f} и \mathbf{F} не содержат линейных составляющих. В ка-

честве параметров в краевую задачу (1.19), (1.20) входят безразмерное давление p и величина κ , характеризующая длину вектора Франка дисклинации [2].

2. Можно показать, что эллиптичность [3] системы (1.19) нарушается только при $B=0$, что равносильно условиям $\kappa=0$, $\nu=1/2$. Требование дополнителности граничных условий [3] будет нарушаться только, если $p=1$ или $p_2=4\nu_1 B(1+B)^{-1}$. Численное решение последнего уравнения показало, что ему соответствует p , не лежащее в окрестности бифуркационного значения этого параметра, и поэтому условие дополнителности нарушаться не будет. Введем функциональные пространства $E_1 \equiv W_2^2(G) \oplus W_2^2(G)$, где $G: (k < \eta < 1, 0 \leq \varphi \leq \kappa_1)$ и $E_2 \equiv L_2(G) \oplus L_2(G) \oplus W_2^{1/2}(\Gamma) \oplus W_2^{1/2}(\Gamma)$, где $\Gamma: (\eta=1, \eta=k, 0 \leq \varphi \leq \kappa_1)$, $\kappa_1=2\pi|\kappa|^{-1}$. Здесь $W_2^2(G)$ — пространство Соболева, $L_2(G)$ — пространство Лебега, $W_2^{1/2}(\Gamma)$ — пространство Слободецкого; символом \oplus обозначается прямая сумма пространств.

Предположим, что искомые функции ρ, ψ принадлежат пространству $W_2^4(G)$, тогда можно показать, что правые части уравнений (1.19), (1.20) принадлежат E_2 . Это позволяет записать нашу краевую задачу в операторном виде

$$Aw = \tau, \quad Aw \equiv (lw, bw), \quad \tau \equiv (f, F) \quad (2.1)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (2.1) согласно [3, 4] будет равенство

$$\int_0^{\kappa_1} \int_k^1 \eta (f_1 v_1^r + f_2 R^0 v_2^r) d\varphi d\eta - \nu_1^{-1} \int_0^{\kappa_1} \eta (F_1 v_1^r + F_2 R^0 v_2^r) d\varphi \Big|_{\eta=k}^{\eta=1} = 0 \quad (r=1, \dots, s) \quad (2.2)$$

Здесь $v = (v_1^r, v_2^r)$ — собственные векторы оператора A , образующие базис подпространства нулей этого оператора, которое обозначим E_1^s , s — размерность этого подпространства.

Найдем значения параметров p и κ , при которых возникает бифуркация равновесия цилиндра. Для этого рассмотрим линеаризованную задачу

$$Aw = 0 \quad (2.3)$$

В силу периодичности решения по координате Φ будем искать собственные функции задачи (2.3) в виде

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(\eta) \cos \kappa_2 \varphi, \quad \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\eta) \sin \kappa_2 \varphi, \quad \psi_0(\eta) = 0 \quad (2.4)$$

где $\kappa_2 = |\kappa|n$. Подставляя (2.4) в (2.3) и приравнявая нулю члены, содержащие одинаковые гармоники, получаем краевые задачи для определения ρ_n, ψ_n :

$$\rho_0'' + \eta^{-1} \rho_0' - \eta^{-2} \kappa^2 \rho_0 = 0, \quad \psi_0 = 0 \quad (2.5)$$

$$\nu_1 \rho_0' + \eta^{-1} \kappa (\nu_1 - p_2) \rho_0 = 0 \quad (\eta=1, k)$$

$$\rho_n'' + \eta^{-1} \rho_n' - \eta^{-2} (\kappa^2 + B \kappa_2^2) \rho_n + \kappa_2 \eta^{-1} R^0 B_1 \psi_n' + \kappa_2 [\delta \eta^{-1} (1 - \nu) - 2 \eta^{-2} R^0 \kappa] \psi_n = 0 \quad (2.6)$$

$$\psi_n'' - B^{-1} \eta^{-2} \kappa_2^2 \psi_n + R^0^{-1} [2R^0 + \eta^{-1} R^0 + \eta^{-1} (\kappa - 1) R^0 B_1] \psi_n' - \eta^{-1} R^0^{-1} B^{-1} B_1 \kappa_2 \rho_n' - \eta^{-2} R^0^{-1} \kappa_2 [B^{-1} \kappa + \kappa - B_1 (\kappa - 1)] \rho_n = 0$$

$$\nu_1 \rho_n' + \eta^{-1} \kappa (\nu_1 - p_2) \rho_n + \eta^{-1} R^0 \kappa_2 (\nu_1 - p_2) \psi_n = 0$$

$$\nu_1 B R^0 \psi_n' + \eta^{-1} \kappa_2 (\nu_1 B - p_2) \rho_n = 0 \quad (\eta=1, k)$$

Решая (2.5), получаем, что нетривиальное решение ρ_0 существует только при $p > 1$. Так как всегда $p < 1$, то случай $n=0$ исключается из рассмотрения. Случай $n=1$ в (2.6) соответствует движению цилиндра как абсолютно твердого тела и поэтому также исключается из рассмотрения. Для $n > 1$ краевая задача (2.6) сводится к системе дифференциальных

уравнений первого порядка и решается численно методом ортогональной прогонки [5].

Исследование решения задачи (2.6) для случая $\nu=0,3$, $n>1$ показало, что собственные числа $p_0(k)$ могут быть простыми и двукратными в зависимости от значений k и n . На фиг. 1а и б изображены кривые собственных значений $p_0(k)$, $k>0$ для случаев $k=0,1$ и $k=0,4$ при разных n . Двукратным собственным числам будут соответствовать точки пересечения кривой для $n=2$ с кривыми для $n=3, 4, \dots$. Заметим, что, хотя вид кривых зависит от значения ν , точки их пересечения с осью k от ν не зависят и сходятся монотонно к некоторому значению при неограниченном возрастании n . Практически, при численном исследовании значения n достигали 150. Это значит, что в случае, когда деформация вызывается только дисклинацией ($p=0$), собственные значения k_0 всегда просты и не зависят от ν . Аналогичные результаты получаются и для других значений параметра k , связанного с относительной толщиной t стенки цилиндра соотношением $t=1-k$.

Критическое давление p_* является минимальным собственным значением из набора собственных чисел $p_0(n, k, \kappa)$ для всех значений n при фиксированных k, κ . Из фиг. 1 видно, что p_* достигается при $n=2$ или $n=\infty$ в зависимости от k, κ .

Таким образом, в упругом теле, содержащем дисклинацию, могут возникать формы потери устойчивости, характеризующиеся бесконечным числом волн.

На фиг. 2 изображены кривые собственных значений $p_0(k)$ для вывернутых оболочек ($\kappa=-1$) при разных n , причем абсциссы пересечения этих кривых с осью t от ν не зависят. Из графика видно, что минимальная толщина цилиндра, для которой происходит потеря устойчивости при выворачивании, будет соответствовать значению $k=k_* \approx 0,53$, когда $n=\infty$. Это означает, что достаточно толстые цилиндры ($k < k_*$) неустойчивы в вывернутом состоянии. Поэтому при $\kappa < 0$ следует рассматривать толщины, для которых $k > k_*$. На фиг. 3 заштрихованы области устойчивости в плоскости параметров p, κ для $k=0,9$. На фиг. 1, 2 области устойчивости также заштрихованы.

При $\kappa=1$ рассматриваемая здесь задача переходит в исследованную в [4] задачу устойчивости полого цилиндра без дисклинации. Найденное численным методом критическое значение p_* при $\kappa=1$ отличается от критического давления, найденного аналитически [4], не более чем на 0,1%.

3. Для построения новых форм равновесия, мало отличающихся от докритического состояния равновесия, применим операторный метод Ляпунова — Шмидта [6]. Полагая $p=p_0+\lambda$, где p_0 — собственное значение оператора A , λ — малый параметр добавочного нагружения ($|\lambda| < \epsilon$), уравнение (2.1) можно записать в виде

$$A_0 w = \tau - A w + A_0 w = h(w), \quad h(w) \equiv (t, T) \quad (3.1)$$

Здесь A_0 — оператор A , в котором p заменено на p_0 :

$$t \equiv (f^1, f^2), \quad T \equiv (F^1, F^2)$$

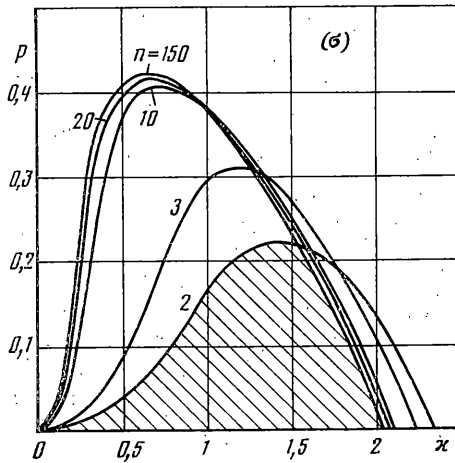
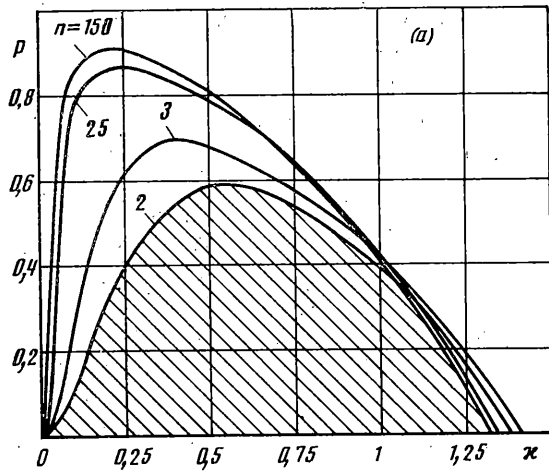
$$\begin{aligned} f^1 &= f_1 - \eta^{-2} (B - B_0) \partial_2^2 \rho - \eta^{-1} (R^\circ B_1 - R_0^\circ B_{10}) \partial_1 \partial_2 \psi + 2\kappa \eta^{-2} (R^\circ - R_0^\circ) \partial_2 \psi \\ f^2 &= f_2 - (R^\circ B - R_0^\circ B_0) \partial_1^2 \psi - \eta^{-2} (R^\circ - R_0^\circ) \partial_2^2 \psi - \\ &\quad - [BR_1^\circ + \eta^{-1} (\kappa - 1) BB_1 R^\circ - B_0 R_{10}^\circ - \eta^{-1} (\kappa - 1) B_0 B_{10} R_0^\circ] \partial_1 \psi + \\ &\quad + \eta^{-2} [\kappa B_1 + BB_1 (\kappa - 1) - \kappa B_0 - B_0 B_{10} (\kappa - 1)] \partial_2 \rho - \eta^{-1} (B_1 - B_{10}) \partial_1 \partial_2 \rho \\ F^1 &= F_1 + \eta^{-1} \kappa (p_2 - p_{20}) \rho - \eta^{-1} [R^\circ (\nu_1 - p_2) - R_0^\circ (\nu_1 - p_{20})] \partial_2 \psi \\ F^2 &= F_2 + \eta^{-1} (\nu_1 B - \nu_1 B_0 - p_2 + p_{20}) \partial_2 \rho - \nu_1 (R^\circ B - R_0^\circ B_0) \partial_1 \psi \\ R_0^\circ &= R^\circ|_{p=p_0}, \quad B_0 = B|_{p=p_0}, \quad B_{10} = B_1|_{p=p_0} \\ p_{20} &= p_2|_{p=p_0}, \quad R_1^\circ = 2R^\circ + \eta^{-1} R^\circ, \quad R_{10}^\circ = R_1^\circ|_{p=p_0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае простого собственного значения малые решения уравнения (3.1) разыскиваются в виде ряда

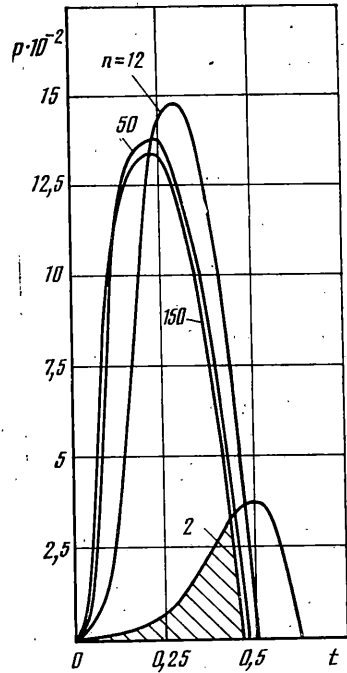
$$w = \xi v + \sum_{i=2}^{\infty} w_{i0} \xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \lambda^j \quad (3.3)$$

$$w_{ij} \equiv (\rho_{ij}(\eta, \psi), \psi_{ij}(\eta, \phi))$$

Здесь ξ — параметр, характеризующий амплитуду моды выпучивания цилиндра, $v \equiv (v_1, v_2)$ — собственная вектор-функция оператора A_0 . После



Фиг. 1



Фиг. 2

подстановки (3.3) в (3.1) получается рекуррентная система для определения всех w_{ij} :

$$A_0' w_{ij} = h_{ij}, \quad h_{ij} \equiv (t_{ij}, T_{ij}) \quad (3.4)$$

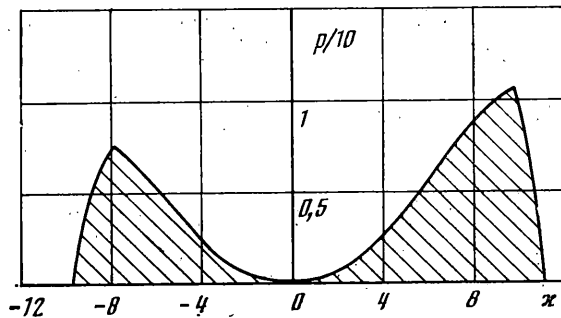
$$t_{ij} \equiv (f_{ij}^1, f_{ij}^2), \quad T_{ij} \equiv (F_{ij}^1, F_{ij}^2)$$

где A_0' — сужение оператора A_0 на $E_1^{\infty-4}$ ($E_1^{\infty-1}$ — дополнение подпространства E_1^1 до E_1), $f_{ij}^1, f_{ij}^2, F_{ij}^1, F_{ij}^2$ — коэффициенты разложения функций f^1, f^2, F^1, F^2 , определенных соотношениями (3.2), при степенях $\xi^i \lambda^j$.

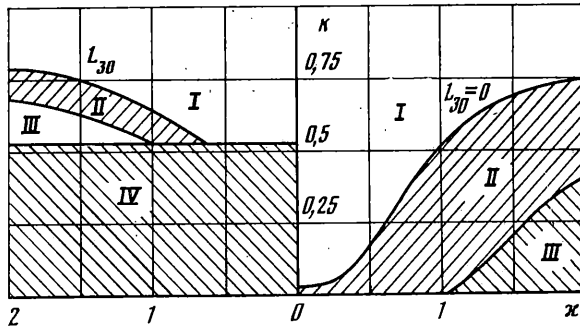
Система (3.4) однозначно разрешима относительно w_{ij} , так как в отличие от A_0 оператор A_0' имеет ограниченный обратный оператор. Эти решения разыскиваются путем численного интегрирования уравнений (3.4) методом ортогональной прогонки. Для построения уравнения разветвления, из которого находится неизвестная величина ξ , (3.3) подставляется в условие разрешимости (2.2) для уравнения (3.1). В результате получается

$$\sum_{i=2}^{\infty} L_{i0} \xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} \lambda^j = 0 \quad (3.5)$$

$$L_{ij} = \int_0^{\kappa_1} \int_{\kappa}^1 \eta (f_{ij}^1 v_1 + f_{ij}^2 R^0 v_2) d\varphi d\eta - v_1^{-1} \int_0^{\kappa_1} \eta (F_{ij}^1 v_1 + F_{ij}^2 R^0 v_2) d\varphi \Big|_{\eta=\kappa}^{\eta=1}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Численное нахождение коэффициентов L_{ij} показало, что первыми отличными от нуля будут коэффициенты L_{11} , L_{30} . Таким образом, приближенно уравнение разветвления (3.5) будет иметь вид $L_{30}\xi^3 + L_{11}\xi\lambda \approx 0$, откуда следует, что $\xi = \pm(-\lambda L_{11}/L_{30})^{1/2} + o(\lambda^{1/2})$ и решение (3.3) запишется в форме

$$w = \pm(-\lambda L_{11}/L_{30})^{1/2} v - (L_{11}/L_{30})\lambda w_{20} \pm (-\lambda L_{11}/L_{30})^{1/2} \lambda w_{11} + o(\lambda)$$

Здесь w_{11} , w_{20} — решения уравнения (3.4), когда $i=j=1$ и $i=2, j=0$.

В зависимости от знака выражения $(-L_{11}/L_{30})$ в одной из полукрестностей $(p_0 - \varepsilon, p_0)$ или $(p_0, p_0 + \varepsilon)$ будет возникать два новых решения, а в другой новых решений не будет.

Численное исследование коэффициентов L_{11} , L_{30} для случая минимального собственного значения p_* показало, что L_{11} всегда меньше нуля, а L_{30} может менять знак в зависимости от значения параметров k , x . На фиг. 4 приведен график функции $k(x)$, задаваемой неявно уравнением $L_{30}(p_*, k, x, v) = 0$. Заметим, что хотя L_{30} зависит от v , кривая $k(x)$ оказывается не зависящей от v . Если параметры k , x лежат в области I, то $L_{30} > 0$. Если k , x лежат в области II, то $L_{30} < 0$. Параметры k , x , лежащие в области III, характеризуются тем, что для них потеря устойчивости цилиндра происходит при значениях x , выходящих за пределы области устойчивости в плоскости (p, x) . По этой причине значения k и x , принадлежащие области III, рассматривать не имеет смысла. Область IV также выпадает из рассмотрения, потому что оболочки, имеющие относительную толщину t , превышающую 0,47, неустойчивы в вывернутом состоянии.

Из сказанного следует, что для параметров цилиндра k , x , лежащих в области I, к которой относятся и тонкостенные цилиндры, новые решения, отличные от тривиального, возникают только при нагрузках, больших критической p_* . Для параметров k , x , лежащих в области II, формы равновесия, отличающиеся от осесимметричного состояния R^0 , существуют при нагрузках, меньших критической.

Сравнение значения толщины цилиндра k при $x=1$, для которого $L_{30}=0$, с аналогичным значением k' , полученным из аналитического решения [4] показало, что они практически не отличаются: $k'=0,5098$, $k=0,5107$.

В докритическом состоянии цилиндра проверялось неравенство Адамара [7], которое оказалось выполненным при всех значениях p , x , лежащих внутри и на границе области устойчивости.

Случай, когда p_0 — двукратное собственное значение оператора A_0 , является исключительным (при фиксированном x двукратному собственному значению соответствует единственное значение k) и не представляет большого интереса. Опреде-

ление первых коэффициентов уравнения разветвления и построение новых решений для двукратного собственного значения можно выполнить методом, применяющимся в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Зубов Л. М. Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 69–73.
3. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Мат. сб. 1960. Т. 78. Вып. 3. С. 446–472.
4. Зеленин А. А., Зубов Л. М. Ветвление решений статических задач нелинейной теории упругости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 275–282.
5. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1969. 527 с.
7. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. Зеленин А. А., Зубов Л. М. Закритические деформации упругой сферы // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 76–82.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
10.XII.1987