

УДК 539.374

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА

ИСУПОВ Л. П.

Получено точное решение задачи об упругопластическом деформировании составного цилиндра при осевом нагружении. Анализ процесса упругопластического деформирования составного цилиндра представляет интерес для моделирования характеристик волокнистых композитов с металлической матрицей. Для описания нелинейно упругих и пластических свойств композитных материалов предложен ряд континуальных моделей [1-6], которые строятся на основе тех или иных методов осреднения и различных гипотез о взаимодействии компонентов без учета детального распределения и концентрации напряжений у границы раздела фаз. Исследование локального распределения напряжений и развития пластических зон на сравнительно простых моделях, допускающих построение аналитического решения, позволяет оценить погрешности используемых гипотез и уточнить особенности деформирования композита в переходной области.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим составной круговой цилиндр, состоящий из внутреннего упругого стержня радиуса  $a$  и внешней оболочки из упругопластического материала радиуса  $b$ . Цилиндр нагружен осесимметрично вдоль оси  $z$ . В силу симметрии для бесконечного цилиндра поперечные сечения остаются плоскими, так что  $\varepsilon_z = \varepsilon_0 = \text{const}$ . Будем считать задаваемой в процессе нагружения величину  $\varepsilon_0$ . Для перемещений в цилиндрической системе координат с учетом осевой симметрии имеем:  $u_\varphi = 0$ ,  $u_z = \varepsilon_0 z$ ,  $u_r = u(r)$ . Внешняя боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузок, а на поверхности раздела материалов заданы условия идеального контакта

$$\sigma_r(b) = 0, \quad \sigma_r^-(a) = \sigma_r^+(a), \quad u^-(a) = u^+(a) \quad (1.1)$$

где индексами минус и плюс обозначены значения соответствующих величин слева и справа от рассматриваемой границы раздела. Соответствующая осевая нагрузка определяется интегрированием напряжения  $\sigma_z$  по площади поперечного сечения.

Для компонент тензора деформаций в цилиндрической системе координат имеем

$$\varepsilon_r = du/dr, \quad \varepsilon_\varphi = u/r, \quad \varepsilon_z = du_z/dz = \varepsilon_0 \quad (1.2)$$

Отличны от нуля компоненты тензора напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ . Уравнение равновесия имеет вид

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = 0 \quad (1.3)$$

**2. Упругое деформирование.** Выпишем уравнения закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= (\sigma_r - \nu_i(\sigma_\varphi + \sigma_z))/E_i, & \varepsilon_\varphi &= (\sigma_\varphi - \nu_i(\sigma_r + \sigma_z))/E_i \\ \varepsilon_z &= (\sigma_z - \nu_i(\sigma_r + \sigma_\varphi))/E_i \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Упругие постоянные с индексами 1 и 2 будем относить к материалу внешнего цилиндра ( $a \leq r \leq b$ ) и упругого стержня ( $0 \leq r \leq a$ ) соответственно.

Решение системы уравнений (1.2), (1.3), (2.1) при условии  $u(0) = 0$  в области  $0 \leq r \leq a$  имеет вид

$$\begin{aligned} u &= A_2 r, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = A_2 \\ \sigma_r = \sigma_\varphi &= E_2'(A_2 + \nu_2 \varepsilon_0), \quad \sigma_z = E_2'(2\nu_2 A_2 + (1 - \nu_2) \varepsilon_0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

В области  $a \leq r \leq b$  получим

$$\begin{aligned} u &= A_1 r + B_1 / r, \quad \varepsilon_r = A_1 - B_1 / r^2, \quad \varepsilon_\varphi = A_1 + B_1 / r^2 \\ \sigma_r &= E_1' (A_1 - (1 - 2\nu_1) B_1 / r^2 + \nu_1 \varepsilon_0) \\ \sigma_\varphi &= E_1' (A_1 + (1 - 2\nu_1) B_1 / r^2 + \nu_1 \varepsilon_0) \\ \sigma_z &= E_1' (2\nu_1 A_1 + (1 - \nu_1) \varepsilon_0), \quad E_i' = E_i / [(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)] \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Входящие в (2.2) и (2.3) константы  $A_1, A_2, B_1$  определяются из граничных условий (1.1).

$$\begin{aligned} A_1 &= -\varepsilon_0 (E_2' \nu_1 + C) / D, \quad A_2 = -\varepsilon_0 (E_2' \nu_2 + C) / D \\ B_1 &= \varepsilon_0 E_2' (\nu_1 - \nu_2) a^2 / D \\ C &= (1 - 2\nu_1) (E_1' \nu_1 (1 - \rho^2) + E_2' \nu_2 \rho^2) \\ D &= (1 - 2\nu_1) (E_1' (1 - \rho^2) + E_2' \rho^2) + E_2', \quad \rho = a/b \end{aligned} \quad (2.4)$$

Исследуем распределение упругих напряжений во внешнем цилиндре. Примем  $\nu_1 > \nu_2$ , что справедливо для реальных композитных материалов с металлической матрицей и хрупкими волокнами. Используя условия  $\nu_1 \leq 1/2$  и  $\rho < 1$ , легко показать, что  $C > 0, D > 0$  и при  $\varepsilon_0 > 0$   $B_1 > 0, A_1 < 0$ . Отсюда следует, что

$$\sigma_\varphi - \sigma_r > 0, \quad \sigma_z - \sigma_\varphi > 0 \quad (a \leq r \leq b) \quad (2.5)$$

**3. Пластическое деформирование. Первая стадия.** Примем, что материал внешнего цилиндра является пластически несжимаемым. Для него справедлив критерий текучести Треска и ассоциированный закон пластичности. Уравнения пластического течения в осесимметричном случае хорошо изучены [7, 8]. В рассматриваемой задаче напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$  являются главными. На фиг. 1 показано сечение призмы Треска плоскостью  $\sigma_\varphi = \text{const}$ .

При упругом деформировании на основании (2.5)  $\sigma_z > \sigma_\varphi > \sigma_r$ , что дает возможность записать критерий текучести в виде

$$\sigma_z - \sigma_r = 2\tau_s \quad (3.1)$$

что соответствует грани  $BC$  на фиг. 1. Разность  $\sigma_z - \sigma_r$  достигает максимума при  $r = a$ . Условие  $\sigma_z(a) - \sigma_r(a) = 2\tau_s$  позволяет, используя (2.3), найти величину  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^{(1)}$ , при которой появляется пластическая зона на границе раздела компонентов:

$$\varepsilon_0^{(1)} = \varepsilon_s D (1 + \nu_1) (C + D + E_2' (2\nu_1 - \nu_2))^{-1}, \quad \varepsilon_s = 2\tau_s / E_1 \quad (3.2)$$

При  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_0^{(1)}$  во внешнем цилиндре от поверхности раздела  $r = a$  начинает развиваться пластическая зона, границу которой обозначим  $r = c$ . В этой зоне ассоциированный закон для скоростей пластических деформаций дает  $\varepsilon_z^{*p} = -\varepsilon_r^{*p} = \lambda, \varepsilon_\varphi^{*p} = 0$ , откуда следует, что деформация  $\varepsilon_\varphi$  остается упругой и для нее справедливо (2.1):

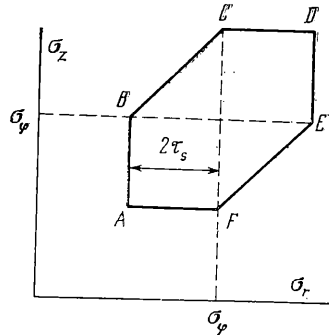
$$u/r = (\sigma_\varphi - \nu_1 (\sigma_r + \sigma_z)) / E_1 \quad (3.3)$$

Условие пластической несжимаемости с учетом (1.2) может быть записано в виде

$$du/dr + u/r + \varepsilon_0 = (1 - 2\nu_1) (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z) / E_1 \quad (3.4)$$

Соотношения (3.1), (3.3), (3.4) вместе с уравнением равновесия (1.3) образуют в пластической зоне  $a \leq r \leq c$  полную систему уравнений относительно  $u, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ , интегрирование которой дает

$$u = r (\varepsilon_0 - \varepsilon_s (1 + \nu_1)) + (A_3 (p - 2\nu_1) r^p - B_3 (p + 2\nu_1) r^{-p}) / (1 - 2\nu_1) \quad (3.5)$$



Фиг. 1

$$\begin{aligned}\sigma_r &= E_1'(1+\nu_1)(A_3 r^{p-1} + B_3 r^{-p-1} + \varepsilon_0 - \varepsilon_s) \\ \sigma_\varphi &= E_1'(1+\nu_1)(A_3 p r^{p-1} - B_3 p r^{-p-1} + \varepsilon_0 - \varepsilon_s) \\ \sigma_z &= \sigma_r + 2\tau_s, \quad p = (2(1-\nu_1))^{1/2} \geq 1\end{aligned}$$

Таким образом, имеются три зоны: упругий внутренний цилиндр  $0 \leq r \leq a$ , где решение имеет вид (2.2), пластическая зона  $a \leq r \leq c$  с решением (3.5) и внешняя упругая зона с решением (2.3). Для определения констант и внешней границы пластической зоны вместе с (1.1) необходимо использовать условия сопряжения на границе упругой и пластической зон

$$u^-(c) = u^+(c), \quad \sigma_r^-(c) = \sigma_r^+(c), \quad \sigma_z^-(c) = \sigma_z^+(c) \quad (3.6)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \varepsilon_s \frac{(c/a)^{-p+1} q_1 D_1 - (c/a)^{p+1} q_2 D_2 - p\chi D_3}{(c/a)^{-p+1} q_1 D_1 - (c/a)^{p+1} q_2 D_2 - p\chi D_4} \\ \chi &= 1 - (1-2\nu_1)/(c/b)^2, \quad q_1 = 1 - \nu_1 + \nu_1 p, \quad q_2 = 1 - \nu_1 - \nu_1 p \\ D_1 &= 1 - \lambda'(p-2\nu_1), \quad D_2 = 1 + \lambda'(p+2\nu_1), \quad \lambda' = E_2'/E_1 \\ D_3 &= 1 - \lambda'(1+\nu_1)(1-2\nu_1), \quad D_4 = 1 - \lambda'(1+\nu_2)(1-2\nu_1) \\ A_1 &= [\varepsilon_s(1+\nu_1)(1-2\nu_1)(c/b)^2 - \varepsilon_0(1-2\nu_1)(c/b)^2 - \nu_1 \varepsilon_0] / \chi \\ B_1 &= c^2(1+\nu_1)(\varepsilon_s - \varepsilon_0) / \chi \\ A_3 &= c^{-p+1} q_1 (\varepsilon_s - \varepsilon_0) / (p\chi), \quad B_3 = -c^{p+1} q_2 (\varepsilon_s - \varepsilon_0) / (p\chi) \\ A_2 &= \varepsilon_0 - \varepsilon_s(1+\nu_1) + [A_3(p-2\nu_1)a^{p-1} - B_3(p+2\nu_1)a^{-p-1}] / (1+2\nu_1)\end{aligned} \quad (3.7)$$

Это решение справедливо пока  $a \leq c \leq b$ . Можно показать, что при  $\nu_1 > \nu_2$  для любых  $a$  и  $b$  выполнено  $\partial \varepsilon_0 / \partial c > 0$ ,  $\varepsilon_0 < \varepsilon_s$ ,  $\sigma_z > \sigma_\varphi > \sigma_r$ .

*Вторая стадия.* Найдем из (3.7) осевую деформацию  $\varepsilon_0^{(2)}$ , соответствующую выходу пластической зоны на внешнюю границу цилиндра  $c=b$ :

$$\varepsilon_0^{(2)} = \varepsilon_s \frac{q_1 D_1 \rho^{p-1} - q_2 D_2 \rho^{-p-1} - 2\nu_1 p D_3}{q_1 D_1 \rho^{p-1} - q_2 D_2 \rho^{-p-1} - 2\nu_1 p D_4} \leq \varepsilon_s$$

При  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_0^{(2)}$  пластическая зона занимает все сечение внешнего цилиндра  $a \leq r \leq b$ , где решение имеет вид (3.5). Во внутренней упругой области по-прежнему справедливо (2.2). Для нахождения коэффициентов  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_3$  используем условия (1.1), что в результате дает (постоянные  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  определены в (3.7)):

$$A_3 = \frac{(D_3 \varepsilon_s - D_4 \varepsilon_0) a^{p+1} - D_2 (\varepsilon_s - \varepsilon_0) b^{p+1}}{D_1 a^{2p} - D_2 b^{2p}} \quad (3.8)$$

$$B_3 = (\varepsilon_s - \varepsilon_0) b^{p+1} - A_3 b^{2p}$$

$$A_2 = \varepsilon_0 - \varepsilon_s(1+\nu_1) + [A_3(p-2\nu_1)a^{p-1} - B_3(p+2\nu_1)a^{-p-1}] / (1-2\nu_1)$$

Анализ решения (3.5), (3.8) в пластической зоне позволяет заключить, что  $\min(\sigma_\varphi - \sigma_r) = \sigma_\varphi(b) - \sigma_r(b) \rightarrow 0$  при возрастании  $\varepsilon_0$ .

*Третья стадия.* Найдем значение осевой деформации  $\varepsilon_0^{(3)}$ , определяемое условием  $\sigma_\varphi(b) = \sigma_r(b)$ :

$$\varepsilon_0^{(3)} = \varepsilon_s \frac{(p+1)D_1 \rho^{p-1} + (p-1)D_2 \rho^{-p-1} - 2pD_3}{(p+1)D_1 \rho^{p-1} + (p-1)D_2 \rho^{-p-1} - 2pD_4}$$

При  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_0^{(3)}$  от внешней границы цилиндра начинает распространяться внутрь зона полной пластичности [7, 8], в которой равны значения двух главных напряжений:

$$\sigma_\varphi = \sigma_r \quad (3.9)$$

Этот режим соответствует ребру С призмы текучести Треска (фиг. 1). Обозначим границу этой зоны  $r=d$ . В области полной пластичности задача становится статически определимой: справедливы три уравнения для напряжений (1.3), (3.1), (3.9). Перемещение в этом случае может быть найдено из условия пластической несжимаемости (3.4). Решение имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_r = \sigma_\varphi = 0, \quad \sigma_z = 2\tau_s \\ u = (\varepsilon_s(1-2\nu_1) - \varepsilon_0)r/2 + A_4/r\end{aligned}\quad (3.10)$$

В составном цилиндре в этом состоянии существуют три зоны деформирования: упругая зона  $0 \leq r \leq a$  с решением (2.2), пластическая зона  $a \leq r \leq d$  с решением (3.5) и область полной пластичности  $d \leq r \leq b$ , где справедливо (3.10). Для определения постоянных  $A_2, A_3, B_3, A_4$  и координаты  $d$  вместе с (1.1) используем условия сопряжения на границе  $r=d$ :

$$\sigma_r^-(d) = 0, \quad \sigma_\varphi^-(d) = 0, \quad u^-(d) = u^+(d)$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 = \varepsilon_s \frac{(p+1)D_1(a/d)^{p-1} + (p-1)D_2(a/d)^{-p-1} - 2pD_3}{(p+1)D_1(a/d)^{p-1} + (p-1)D_2(a/d)^{-p-1} - 2pD_4} \\ A_3 = {}^1/2 d^{-p+1}(\varepsilon_s - \varepsilon_0)(p+1)/p \\ B_3 = {}^1/2 d^{p+1}(\varepsilon_s - \varepsilon_0)(p-1)/p, \quad A_4 = -{}^1/2 d^2(\varepsilon_s - \varepsilon_0) \\ A_2 = \varepsilon_0 - \varepsilon_s(1 + \nu_1) + [A_3(p - 2\nu_1)a^{p-1} - B_3(p + 2\nu_1)a^{-p-1}]/(1 - 2\nu_1)\end{aligned}\quad (3.11)$$

*Четвертая стадия.* Зона полной пластичности займет все сечение цилиндра при  $d=a$ . Соответствующую величину осевой деформации  $\varepsilon_0^{(4)}$  найдем из (3.11):

$$\varepsilon_0^{(4)} = \varepsilon_s \nu_1 / \nu_2 \quad (3.12)$$

Заметим, что в (3.12) не входят радиусы цилиндров  $a$  и  $b$  величина  $\varepsilon_0^{(4)}$  определяется только значением упругих коэффициентов Пуассона составляющих материалов.

Граничные условия для определения постоянных  $A_2$  и  $A_4$  в (2.2) и (3.10) можно записать так:  $\sigma_r^-(a) = 0, u^-(a) = u^+(a)$ .

Распределение напряжений при  $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_0^{(4)}$  оказывается кусочно постоянным. Решение имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_r = \sigma_\varphi = 0, \quad \sigma_z = E_2 \varepsilon_0, \quad u = -\nu_2 \varepsilon_0 r \quad (0 \leq r \leq a) \\ \sigma_r = \sigma_\varphi = 0, \quad \sigma_z = 2\tau_s \quad (a \leq r \leq b) \\ u = {}^1/2 \varepsilon_0 (-r + (1 - 2\nu_2)a^2/r) + {}^1/2 \varepsilon_s (1 - 2\nu_1)(r - a^2/r)\end{aligned}\quad (3.13)$$

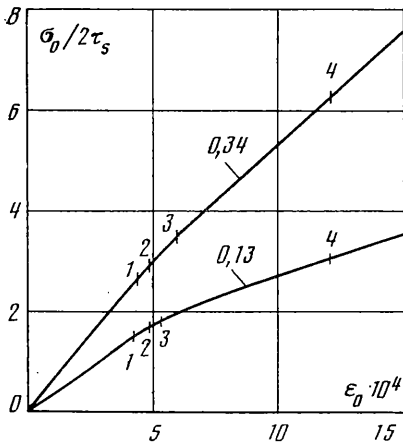
Полученное решение справедливо и при  $b \rightarrow \infty$ . При этом  $\varepsilon_0^{(2)} \rightarrow \varepsilon_s, \varepsilon_0^{(3)} \rightarrow \varepsilon_s$  и выпадает вторая стадия пластического деформирования.

**4. Разгрузка.** При уменьшении осевой деформации в составном цилиндре будет происходить упругая разгрузка. Часть осевой деформации оказывается необратимой:  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^p + \varepsilon_0^e$ , где  $\varepsilon_0^p$  — остаточная, а  $\varepsilon_0^e$  — упругая обратимая деформация. Остаточные напряжения после разгрузки легко могут быть определены:

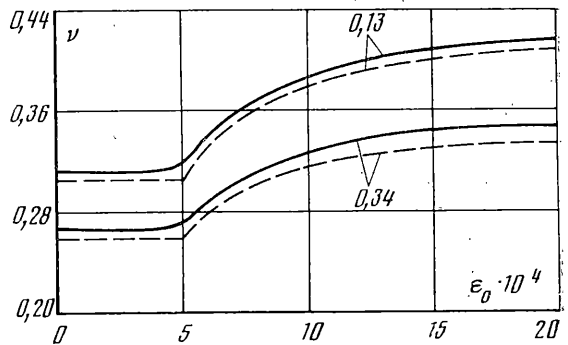
$$\sigma_r^0 = \sigma_r - \sigma_r^e, \quad \sigma_\varphi^0 = \sigma_\varphi - \sigma_\varphi^e, \quad \sigma_z^0 = \sigma_z - \sigma_z^e \quad (4.1)$$

Напряжения  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$  находятся из приведенного выше решения при активном нагружении по заданному значению  $\varepsilon_0$ , а  $\sigma_r^e, \sigma_\varphi^e, \sigma_z^e$  — по формулам (2.2), (2.3), (2.4) после замены в них  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon_0^e = \varepsilon_0 - \varepsilon_0^p$ . Величина остаточной осевой деформации  $\varepsilon_0^p$  находится из условия

$$N = 2\pi \int_0^b \sigma_z^0 r dr = 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Решение (4.1) справедливо, если остаточные напряжения не превосходят предела текучести. В противном случае необходимо рассматривать упругопластическое решение.

Используем составной цилиндр в качестве модели волокнистого композита при осевом нагружении. Будем считать внутренний упругий цилиндр волокном, а наружный — состоящим из материала матрицы, так что объемное содержание волокна в композите  $v_2 = a^2/b^2 = \rho^2$ . Среднее осевое напряжение  $\sigma_0$ , соответствующее деформации  $\epsilon_0$ , определяется осреднением по площади сечения составного цилиндра

$$\sigma_0 = \frac{1}{S} \int_S \sigma_z dS = \frac{2}{b^2} \int_0^b \sigma_z r dr$$

На основе полученного решения была построена диаграмма деформирования для композита с матрицей из алюминиевого сплава 1100, армированного волокном борсик. Объемное содержание волокна  $v_2 = 0,13$  и  $v_2 = 0,34$  указано у соответствующих кривых на фиг. 2. Характеристики матрицы:  $E_1 = 5,54 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_1 = 0,336$ ,  $2\tau_s = 27,5$  МПа,  $\epsilon_s = 4,99 \cdot 10^{-4}$ . Характеристики волокна:  $E_2 = 37,73 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_2 = 0,14$  [9]. Характерные точки диаграммы  $\epsilon_0 = \epsilon_0^{(i)}$  отмечены на графиках соответствующими цифрами. Переходным от одной линейной части диаграммы к другой является участок кривой между точками 1 и 4. Необходимо отметить, что участок между точками 3 и 4 мало отличается от линейного. Аналогичная диаграмма, полученная на основе континуальной модели [10] с гипотезой кусочно постоянных полей напряжений и деформаций в компонентах, отличается от приведенных на фиг. 2 по существу лишь на участке 1–3, который заменяется ломаной с угловой точкой.

На фиг. 3 приведены графики изменения коэффициента Пуассона для того же материала в процессе упругопластического деформирования. Эффективный коэффициент Пуассона для модели определяется следующим образом:

$$\nu = \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_0}, \quad \epsilon_{r0} = \frac{1}{b} \int_0^b \epsilon_r dr = \frac{u(b)}{b}$$

Пунктиром показаны результаты расчета на основе определяющих уравнений, предложенных в [10].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
2. Милейко С. Т., Сорокин Н. М., Голофаст Е. Г. Упруго-пластическое поведение композита с металлической матрицей при одноосном нагружении // Проблемы прочности. 1974. № 11. С. 45–48.
3. Зилауц А. Ф., Крегерс А. Ф., Лагздиньш А. Ж., Тетерс Г. А. Расчет упругопластических деформаций композита при сложном нагружении // Механика композитных материалов. 1981. № 6. С. 987–992.
4. Исупов Л. П., Работнов Ю. Н. О законе пластичности для композитной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 121–127.

5. *Dvorak G. J., Bahai-El-Din Y. A.* Plasticity analysis of fibrous composites // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 1982. V. 49. N. 2. P. 327–335.
6. *Sawicki A.* Engineering mechanics of elastoplastic composites // *Mech. of Materials.* 1983. V. 2. N. 3. P. 217–231.
7. *Shield R. T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.* 1953. V. 233. N 1193. P. 267–287.
8. *Иевлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966. 231 с.
9. *Allerd R. E., Hoover W. R., Horak J. A.* Elastic-plastic Poisson's ratio of borsic – aluminium // *J. Compos. Mater.*, 1974. V. 8. N 1. P. 15–28.
10. *Исупов Л. П.* Об эффективных характеристиках пластичности композитной среды // *Механика композитных материалов.* 1985. № 4. С. 614–619.

Москва

Поступила в редакцию  
27.X.1987