МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1988

УДК 539.214

ПЕРЕМЕННОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ, БЛИЗКОЕ К ПРОСТОМУ, ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В.

При формулировании определяющих соотношений в изотропном случае в теории малых упруго-пластических деформаций [1] из предположения изотропии в пространстве деформаций [2] следует зависимость от первых и вторых инвариантов деформаций. Для анизотропного материала такие предположения использовались в [3, 4], а при формулировке критерия разрушения – в [5]. Другие варианты таких условий симметрии для анизотропных материалов предложены, например, в [6]. В [3] приводится доказательство теоремы о простом активном деформировании для трансверсально изотропного материала. В [7] рассматриваются вопросы переменного деформирования изотропных пластичных материалов. В настоящей работе аналогичные результаты для анизотропного материала приводятся в форме с интенсивностями, характерными для моделей пластичности, для переменного нагружения, для простого переменного нагружения. Кроме того, рассматриваются первое и переменные нагружения, близкие к простым, для кубической сдвиговой нелинейности. Показано, как экспериментально определяются параметры материала.

1. Рассмотрим задачу о построении определяющих соотношений трансверсально изотропного материала при простом и близком к простому нагружении. Пусть ось симметрии материала обозначена номером 3. Для трансверсально изотропного материала в общем случае [8, 9] имеется пять (два первой степени, два второй степени и один третьей степени) независимых инвариантов тензора деформаций. Для малых деформаций ограничимся первыми и вторыми инвариантами относительно ортогональных преобразований и преобразований вращения около оси симметрии 3:

$$I_{11}=\varepsilon_{ii},\ I_{12}=\varepsilon_{33},\ I_{21}=\varepsilon_u^2,\ I_{22}=\varepsilon_{u3}^2 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_u^2={}^2/_3 e_{ij}e_{ij},\ \varepsilon_{u3}^2={}^2/_3 e_{i3}e_{i3} \tag{1.2}$$

$$e_{ij}=\varepsilon_{ij}-{}^1/_3\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{1.3}$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, e_{ij} — компоненты девиатора деформаций, δ_{ij} — символы Кронекера. Кроме выбора инвариантов (1.1) будем считать соотношения между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} потенциальными при первом нагружении, с линейной зависимостью от первого инварианта ε_{ii} и линейной зависимостью первого инварианта напряжений σ_{ii} от деформаций (непористые материалы). Для кубически нелинейной теории из этих предположений вытекает, что потенциал напряжений W имеет вид:

$$W=W_1+W_3 \tag{1.4}$$

$$W_1={}^1/_2K\varepsilon_{\alpha\alpha}^2+{}^1/_2K_1\varepsilon_{33}^2+K_2\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{33}+Ge_{ij}e_{ij}+G_1e_{i3}e_{i3} \tag{1.5}$$

$$W_3={}^1/_2G_3\varepsilon_u^4+G_{34}\varepsilon_u^2\varepsilon_{u3}^2+{}^1/_2G_4\varepsilon_{u3}^4 \tag{1.6}$$

где K, K_1, K_2, G, G_1, G_3, G_{34}, G_4 — постоянные материала. Для более сильной нелинейности, чем кубическая, ограничимся тремя функциями f_3, f_{34}, f_4 соответственно от трех слагаемых в (1.6). Тогда

$$W=W_1+W' \tag{1.7}$$

$$W'={}^1/_2 f_3(\varepsilon_u^2)+{}^1/_2 f_{34}(\varepsilon_u^2\varepsilon_{u3}^2)+{}^1/_2 f_4(\varepsilon_{u3}^2) \qquad (1.8)$$

где W_1 определяется по формуле (1.5). Дифференцируя потенциал (1.5), (1.7), (1.8) по деформациям, получим (штрих у f означает производную по своему аргументу):

$$\sigma_{ij}={}^1/_3\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij}+s_{ij} \qquad (1.9)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=(3K+K_2)\varepsilon_{\alpha\alpha}+(K_1+3K_2)\varepsilon_{33} \qquad (1.10)$$

$$s_{ij}=s_{ij}^{(1)}+s_{ij}^{(2)}+s_{ij}^{(3)} \qquad (1.11)$$

$$s_{ij}^{(1)}=\delta_{ij}'2\sigma_u^{(1)}/3\varepsilon_u', \qquad \delta_{ij}'=\delta_{i3}\delta_{j3}-{}^1/_3\delta_{ij}$$

$$s_{ij}^{(2)}=e_{ij}2\sigma_u^{(2)}/3\varepsilon_u, \qquad s_{ij}^{(3)}={}^2/_3 e_{ij}^{(3)}\sigma_u^{(3)}/\varepsilon_u^{(3)}$$

$$e_{ij}^{(3)}={}^1/_2(e_{i3}\delta_{j3}+e_{j3}\delta_{i3})-{}^1/_3 e_{33}\delta_{ij}$$

$$\sigma_u^{(1)}/\varepsilon_u'={}^3/_2(K_1\varepsilon_{33}+K_2\varepsilon_{\alpha\alpha}),\ \varepsilon_u'={}^2/_3 \qquad (1.12)$$

$$\varepsilon_u^{(2)}/\varepsilon_u=3G+f_3'(\varepsilon_u^2)+f_{34}'(\varepsilon_u^2\varepsilon_{u3}^2)\varepsilon_{u3}^2$$

$$\sigma_u^{(3)}/\varepsilon_u^{(3)}=3G_1+f_4'(\varepsilon_{u3}^2)+f_{34}'(\varepsilon_u^2\varepsilon_{u3}^2)\varepsilon_u^2$$

В формулы (1.11), (1.12) входят величины ε_u и ε_{u3}, определяемые в (1.2), и e_{ij} — в (1.3), а также

$$\sigma_u^{(2)}=({}^3/_2 s_{ij}^{(\alpha)}s_{ij}^{(\alpha)})^{1/2} \quad (\alpha=1,2,3), \qquad \varepsilon_u'=({}^2/_3\delta_{ij}'\delta_{ij}')^{1/2}={}^2/_3 \qquad (1.13)$$

$$\varepsilon_u^{(3)}=({}^2/_3 e_{ij}^{(3)}e_{ij}^{(3)})^{1/2}=[{}^1/_2\varepsilon_{u3}^2+{}^1/_6(\varepsilon_{33}-{}^1/_3\varepsilon_{\alpha\alpha})^2]^{1/2}$$

Справедлива следующая теорема о простом деформировании и нагружении (см. [3]).

Теорема 1. Пусть ось симметрии трансверсально изотропного материала (1.9)—(1.13) не деформируется $\varepsilon_{33}=0$ и его объем не изменяется $\varepsilon_{ii}=0$, граничные перемещения u_{is} на части S_u изменяются пропорционально одной функции времени $\mu(t)$, а вектор напряжений P_i на части S_σ и массовые силы X_i пропорциональны другой функции времени $\lambda(t)$

$$u_{is}=u_{is}^0(x)\mu(t),\ P_i=P_i^0(x)\lambda(t),\ X_i=X_i^0(x)\lambda(t) \qquad (1.14)$$

Тогда для степенных функций, входящих в (1.12),

$$3G+f_3'(\varepsilon_u^2)\cong A\varepsilon_u^{\gamma-1}$$

$$f_{34}'(\varepsilon_u^2\varepsilon_{u3}^2)=B(\varepsilon_u\varepsilon_{u3})^{(\gamma-3)/2}, \qquad 3G_1+f_4'(\varepsilon_{u3}^2)\cong C\varepsilon_{u3}^{\gamma-1} \qquad (1.15)$$

справедливо простое деформирование и нагружение, если

$$\lambda(t)=[\mu(t)]^\gamma \quad (\gamma=\mathrm{const}) \qquad (1.16)$$

2. Пусть при любом нагружении возникают напряжения $\sigma_{ij}^{(n)}$ и деформации ε_{ij}. Все величины при n-ом нагружении отмечаются индексом n. Введем новые величины (приращения)):

$$\Delta e_{ij}^{(n)}=(-1)^n(e_{ij}^{(n-1)}-e_{ij}^{(n)}), \qquad \Delta e_{ij}^{(3)(n)}=(-1)^n(e_{ij}^{(3)(n-1)}-e_{ij}^{(3)(n)}) \qquad (2.1)$$

$$\Delta s_{ij}^{(2)(n)}=(-1)^n(s_{ij}^{(2)(n-1)}-s_{ij}^{(2)(n)}), \qquad \Delta s_{ij}^{(3)(n)}=(-1)^n(s_{ij}^{(3)(n-1)}-s_{ij}^{(3)(n)})$$

Линейные соотношения для $\sigma_{\alpha\alpha}$ и для $s_{ij}^{(1)}$ (1.10)—(1.12) сохраняются и для n-го нагружения

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(n)}=(3K+K_2)\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)}+(K_1+3K_2)\varepsilon_{33}^{(n)} \qquad (2.2)$$

$$s_{ij}^{(1)(n)}=(K_1\varepsilon_{33}^{(n)}+K_2\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)})(\delta_{i3}\delta_{j3}-{}^1/_3\delta_{ij})$$

Следуя [1, 7] для переменных нагружений анизотропного материала принимается равенство направляющих [1] тензоров приращений напряжений $\Delta s_{ij}^{(2)(n)}$, $\Delta s_{ij}^{(s)(n)}$ направляющим тензорам деформаций соответственно $\Delta e_{ij}^{(n)}$, $\Delta e_{ij}^{(3)(n)}$. Тогда

$$s_{ij}^{(n)}=s_{ij}^{(1)(n)}+s_{ij}^{(2)(n)}+s_{ij}^{(3)(n)},\qquad \Delta s_{ij}^{(2)(n)}=\Delta e_{ij}^{(n)}2\sigma_u^{\Delta(2)(n)}/3\varepsilon_u^{\Delta(n)} \tag{2.3}$$

$$\Delta s_{ij}^{(3)(n)}=\Delta e_{ij}^{(3)(n)}\,2\sigma_u^{\Delta(3)(n)}/3\varepsilon_u^{\Delta(3)(n)},\qquad \sigma_u^{\Delta(r)(n)}=({}^3/_2\Delta s_{ij}^{(r)(n)}\,\Delta s_{ij}^{(r)(n)})^{1/2}\quad (r=2;\,3)$$

$$\varepsilon_u^{\Delta(n)}=({}^2/_3\Delta e_{ij}^{(3)(n)}\,\Delta e_{ij}^{(3)(n)})^{1/2},\qquad \varepsilon_u^{\Delta(3)(n)}=({}^2/_3\Delta e_{ij}^{(3)(n)}\Delta e_{ij}^{(3)(n)})^{1/2}$$

Связь между инвариантами приращений напряжений и приращений деформаций задается в виде, обобщающем (1.12);

$$\begin{aligned}\sigma_u^{\Delta(2)(n)}/\varepsilon_u^{\Delta(n)}&=3G+f_{3(n)}^{\Delta\prime}[(\varepsilon_u^{\Delta(n)})^2]+(\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)})^2 f_{34(n)}^{\Delta\prime}[(\varepsilon_u^{\Delta(n)}\,\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)})^2]\\ \sigma_u^{\Delta(3)(n)}/\varepsilon_u^{\Delta(3)(n)}&=3G_1+f_{4(n)}^{\Delta\prime}[(\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)})^2]+(\varepsilon_u^{\Delta(n)})^2 f_{34(n)}^{\Delta\prime}[(\varepsilon_u^{\Delta(n)}\,\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)})^2]\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}=({}^2/_3\Delta e_{i3}^{(n)}\Delta e_{i3}^{(n)})^{1/2} \tag{2.5}$$

Функции в (3.4) и параметры G, G_1 могут зависеть и от инвариантов приращений деформаций предыдущих нагружений.

Пусть α_n $(n>1)$ — коэффициенты изменения масштаба осей приращений (2.1) напряжений и деформаций для n-го нагружния по сравнению с масштабом осей напряжений и деформаций первого нагружения. Параметры α_n равны примерно двум [7, 10]. Не учитывая зависимость от деформаций в момент разгрузок вместо (2.4) можно принять

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_u^{\Delta(2)(n)}}{\varepsilon_u^{\Delta(n)}}&=3G+f_3'\left[\left(\frac{\varepsilon_u^{\Delta(n)}}{\alpha_n}\right)^2\right]+\left(\frac{\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}}{\alpha_n}\right)^2 f_{34}'\left[\left(\frac{\varepsilon_u^{\Delta(n)}\,\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}}{\alpha_n^2}\right)^2\right]\\ \frac{\sigma_u^{\Delta(3)(n)}}{\varepsilon_u^{\Delta(3)(n)}}&=3G_1+f_4'\left[\left(\frac{\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}}{\alpha_n}\right)^2\right]+\left(\frac{\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}}{\alpha_n}\right)^2 f_{34}'\left[\left(\frac{\varepsilon_u^{\Delta(n)}\,\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}}{\alpha_n^2}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{2.6}$$

Для простого нагружения условие n-го нагружения имеет вид $d\lambda^{(n)}(t)>0$, где $\lambda^{(n)}(t)$ — параметр n-го нагружения.

Справедлива следующая теорема о простом переменном нагружении.

Теорема 2. Пусть ось симметрии трансверсально изотропного материала (2.1)–(2.4) не деформируется $\varepsilon_{33}^{(n)}=0$, объем не изменяется $\varepsilon_{ii}^{(n)}=0$, граничные перемещения $u_{is}^{(n)}$ на части S_u изменяются пропорционально функциям времени $\mu^{(n)}(t)$, а вектор напряжений $P_i^{(n)}$ на части поверхности S_σ и массовые силы $X_i^{(n)}$ пропорциональны функциям времени $\lambda^{(n)}(t)$,

$$u_{is}^{(n)}=u_{is}^{0}(x)\mu^{(n)}(t),\qquad P_i^{(n)}=P_i^{0}(x)\lambda^{(n)}(t),\qquad X_i^{(n)}=X_i^{0}(x)\lambda^{(n)}(t) \tag{2.7}$$

Кроме того, пусть функции, входящие в (2.4), являются степенными

$$3G+f_{3(n)}^{\Delta\prime}[(\varepsilon_u^{\Delta(n)})^2]\cong A^{(n)}[\varepsilon_u^{\Delta(n)}]^{\gamma-1} \tag{2.8}$$

$$f_{34(n)}^{\Delta\prime}[(\varepsilon_u^{\Delta(n)}\,\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)})^2]=B_{(n)}[\varepsilon_u^{\Delta(n)}\,\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}]^{(\gamma-3)/2}$$

$$3G_1+f^{\Delta f}_{4(n)}[(\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)})^2]\cong C_{(n)}[\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}]^{\gamma-1}$$

Тогда справедливо простое переменное деформирование и нагружение, если

$$\lambda^{(1)}(t)=[\mu^{(1)}(t)]^{\gamma},\ \lambda^{(n)}(t)-\lambda^{(n-1)}(t_{n-1})= \tag{2.9}$$
$$=[\mu^{(n)}(t)-\mu^{(n-1)}(t_{n-1})]\,|\mu^{(n)}(t)/\alpha_n-\mu^{(n-1)}(t_{n-1})/\alpha_n|^{\gamma-1}$$

В (2.9) t_{n-1} — время в момент $(n-1)$-ой разгрузки. По гипотезе (2.6), обобщающей гипотезу $\alpha_n=2$ [10], получим

$$A_{(n)}=A/\alpha_n^{\gamma-1},\ B_{(n)}=B/\alpha_n^{\gamma-1}C_{(n)}=C/\alpha_n^{\gamma-1} \tag{2.10}$$

3. Ограничимся при первом нагружении потенциалом (1.4)—(1.6), соответствующим кубической сдвиговой нелинейности. В этом случае деформирование и нагружение будут близкими к простым, если

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{\circ}(x)\mu(t)+\varepsilon_{ij}'(x)\mu^3(t),\quad \sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{\circ}(x)\mu(t)+\sigma_{ij}'(x)\mu^3(t) \tag{3.1}$$

В (3.1) $\mu(t)$ — малый параметр, зависящий только от времени t.
Девиатор напряжений для кубической нелинейности имеет вид:

$$\begin{gathered} s_{ij}=s_{ij}^{(1)}+s_{ij}^{(2)}+s_{ij}^{(3)} \\ s_{ij}^{(1)}=(K_1\varepsilon_{33}+K_2\varepsilon_{\alpha\alpha})(\delta_{i3}\delta_{j3}-{}^1/_3\delta_{ij}) \\ s_{ij}^{(2)}=(2G+{}^4/_3G_3\varepsilon_u{}^2+{}^4/_3G_{34}\varepsilon_{u3}{}^2)e_{ij} \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$s_{ij}^{(3)}=(2G_1+{}^4/_3G_4\varepsilon_{u3}{}^2+{}^4/_3G_{34}\varepsilon_u{}^2)[{}^1/_2(e_{i3}\delta_{j3}+e_{j3}\delta_{i3})-{}^1/_3e_{33}\delta_{ij}]$$

Из (1.10) и (3.1), (3.2) следует

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha\alpha}{}^{\circ}=(3K+K_2)\varepsilon_{\alpha\alpha}{}^{\circ}+(K_1+3K_2)\varepsilon_{33}{}^{\circ} \\ s_{ij}{}^{\circ}=(K_1\varepsilon_{33}{}^{\circ}+K_2\varepsilon_{\alpha\alpha}{}^{\circ})(\delta_{i3}\delta_{j3}-{}^1/_3\delta_{ij})+ \\ +2Ge_{ij}{}^{\circ}+2G_1[{}^1/_2(e_{i3}{}^{\circ}\delta_{j3}+e_{j3}{}^{\circ}\delta_{i3})-{}^1/_3e_{33}{}^{\circ}\delta_{ij}] \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{\alpha\alpha}'=(3K+K_2)\varepsilon_{\alpha\alpha}'+(K_1+3K_2)\varepsilon_{33}' \\ s_{ij}'=(K_1\varepsilon_{33}'+K_2\varepsilon_{\alpha\alpha}')(\delta_{i3}\delta_{j3}-{}^1/_3\delta_{ij})+ \\ +2Ge_{ij}'+{}^4/_3(G_3\varepsilon_u{}^{\circ 2}+G_{34}\varepsilon_{u3}{}^{\circ 2})e_{ij}{}^{\circ}+ \\ +2G_1[{}^1/_2(e_{i3}'\delta_{j3}-e_{j3}'\delta_{i3})-{}^1/_3e_{33}'\delta_{ij}]+ \\ +{}^4/_3[G_4\varepsilon_u{}^{\circ 2}+G_{34}\varepsilon_u{}^{\circ 2}][{}^1/_2(e_{i3}{}^{\circ}\delta_{j3}+e_j{}^{\circ}\delta_{i3})-{}^1/_3e_{33}{}^{\circ}\delta_{ij}] \end{gathered} \tag{3.4}$$

В дополнение к (3.3) и (3.4) справедливы следующие уравнения для величин, помеченных градусом и штрихом

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{\sigma}_{ij,j}+X_i{}^{\circ}=0,\ \varepsilon_{ij}{}^{\circ}={}^1/_2(u_{i,j}{}^{\circ}+u_{j,i}{}^{\circ}) \\ \sigma_{ij}{}^{\circ}n_j=P_i{}^{\circ}\ (x\in S_\sigma),\ u_i{}^{\circ}=u_{is}{}^{\circ}\ (x\in S_u) \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} \sigma'_{ij,j}+X_i'=0,\ \varepsilon_{ij}'={}^1/_2(u_{i,j}'+u_{j,i}') \\ \sigma_{ij}'n_j=P_i'\ (x\in S_\sigma),\ u_i'=u_{is}'\ (x\in S_u) \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered} X_i=X_i{}^{\circ}(x)\mu(t)+X_i'(x)\mu^3(t),\ P_i=P_i{}^{\circ}(x)\mu(t)+ \\ +P_i'(x)\mu^3(t),\ u_{is}=u_{is}{}^{\circ}(x)\mu(t)+u_{is}'(x)\mu^3(t) \end{gathered} \tag{3.7}$$

Для переменного нагружения пусть справедливы соотношения (2.1)—(2.3), (2.5). Для кубической сдвиговой нелинейности соотношения (2.6) примут вид

$$\sigma_u^{\Delta(2)(n)}/\varepsilon_u^{\Delta(n)}=3G+2G_3[\alpha_n{}^{-1}\varepsilon_u^{\Delta(n)}]^2+2G_{34}[\alpha_n{}^{-1}\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}]^2 \tag{3.8}$$

$$\sigma_u^{\Delta(3)(n)}/\varepsilon_u^{\Delta(3)(n)}=3G_1+2G_2[\alpha_n{}^{-1}\varepsilon_{u3}^{\Delta(n)}]^2+2G_{34}[\alpha_n{}^{-1}\varepsilon_u^{\Delta(n)}]^2$$

Пусть граничные перемещения $u_{is}^{(n)}$ на части поверхности S_u, вектор напряжений $P_i^{(n)}$ на части поверхности S_σ, массовые силы $X_i^{(n)}$ изменяются так:

$$
\begin{aligned}
u_{is}^{(n)} &= u_{is}^\circ(x)\mu^{(n)}(t) + u_{is}'(x)[\mu^{(n)}(t)]^3 \\
P_i^{(n)} &= P_i^\circ(x)\mu^{(n)}(t) + P_i'(x)[\mu^{(n)}(t)]^3 \\
X_i^{(n)} &= X_i^\circ(x)\mu^{(n)}(t) + X_i'(x)[\mu^{(n)}(t)]^3
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

В (3.9) $\mu^{(n)}(t)$ — заданные малые параметры, зависящие только от времени t. Для первого нагружения справедливы формулы (3.1) при $\mu(t) = \mu^{(1)}(t)$. Для последующих нагружений из условия справедливости переменного нагружения, близкого к простому, следуют выражения для приращений деформаций и приращений напряжений

$$
\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)} &= \varepsilon_{ij}^\circ(x)\Delta\mu^{(n)}(t) + \varepsilon_{ij}'^{(n)}(x)\Delta[\mu^{(n)}(t)]^3 \\
\Delta\sigma_{ij}^{(n)} &= \sigma_{ij}^\circ(x)\Delta\mu^{(n)}(t) + \sigma_{ij}'^{(n)}(x)\Delta[\mu^{(n)}(t)]^3
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$\Delta\mu^{(n)}(t) = (-1)^n[\mu^{(n-1)}(t_{n-1}) - \mu^{(n)}(t)] \quad (n>1)$$

$$\Delta[\mu^{(n)}(t)]^3 = (-1)^n\{[\mu^{(n-1)}(t_{n-1})]^3 - [\mu^{(n)}(t)]^3\}$$

причем для величин, зависящих только от координат, справедливы соотношения (3.3)—(3.6), в которых G_3, G_{34}; G_4 надо поделить на α_n^2. Поэтому величины со штрихами в (3.4), (3.6) будут зависеть от α_n. Напряжения и деформация для n-го нагружения в момент t находятся по приращениям (3.10) с помощью формул вида (2.1) по предыдущему нагружению в момент t_{n-1}. Заметим, что в определяющих соотношениях (3.2), (3.8) не требуется несжимаемость и равенство начальных модулей бесконечности. Соотношения для величин, помеченных градусом, в (3.3), (3.5) соответствует задаче трансверсальной изотропной теории упругости. Соотношения (3.4), (3.6) со штрихами соответствуют также линейной задаче трансверсальной изотропии, но с начальными напряжениями, найденными в предыдущем приближении.

Если (3.9) записать в приращениях аналогично (3.10) с функциями координат x, зависящими от номера нагружения n, то в (3.5), (3.6) граничные условия станут зависеть от n, и тогда в (3.10) величины $\varepsilon_{ij}^\circ(x)$, $\sigma_{ij}^\circ(x)$ заменятся на зависящие от n.

4. Экспериментальные данные об анизотропных материалах для первого нагружения можно найти в [11]. В [4, 12] обрабатывались некоторые данные опытов [11] при активном нагружении, построены определяющие соотношения и сделано сравнение построенной модели для других экспериментов [11] при различных углах оси образца к направлению волокон материала.

В [13] предложен способ определения свойств анизотропного материала из опытов на одноосное сжатие призматических образцов. Испытания проводятся для образцов, вырезанных под разными углами к осям анизотропии. В качестве примера был рассмотрен текстолит [13].

Модули упругости K, K_1, K_2, G, G_1 определяются в линейной области из опытов на кручение трубчатых образцов и растяжение — сжатие стержней. Можно также использовать методику [13].

Рассмотрим опыты на растяжение — сжатие в направлении 1 и кручение (сдвиг) образца с изменением углов между осями 1 и 2. В этом случае

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}\neq 0, \ \varepsilon_{11}\neq 0, \ \sigma_{12}\neq 0, \ \varepsilon_{12}\neq 0 \\
&\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{23}=\sigma_{13}=0, \ \varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Соответствующие коэффициенты Пуассона и модуль Юнга для первого направления и модуль сдвига для угла между осями 1 и 2 обозначим в области пластичности через $\nu_{21}(\varepsilon)$, $\nu_{31}(\varepsilon)$, $E_1(\varepsilon)$, $G(\varepsilon)$:

$$\nu_{21}(\varepsilon)=-\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11},\quad \nu_{31}(\varepsilon)=-\varepsilon_{33}/\varepsilon_{11} \tag{4.2}$$
$$E_1(\varepsilon)=\sigma_{11}/\varepsilon_{11},\quad G(\varepsilon)=\sigma_{12}/2\varepsilon_{12}$$

Для кубически нелинейной модели (1.5), (1.6) соотношения (1.9)—(1.12) приводят в рассматриваемых опытах (4.1) к следующим выражениям:

$$\nu_{21}(\varepsilon)=-Y(\varepsilon)/X(\varepsilon),\quad \nu_{31}(\varepsilon)=-Z(\varepsilon)/X(\varepsilon) \tag{4.3}$$
$$E_1(\varepsilon)=3K(\varepsilon)/X(\varepsilon),\quad G(\varepsilon)=G+{}^2/_3G_3\varepsilon_u{}^2+{}^2/_3G_{34}\varepsilon_{u3}{}^2$$

$$X(\varepsilon)=[3K(\varepsilon)-K-K_2Z(\varepsilon)+{}^2/_3G_1(\varepsilon)Z(\varepsilon)-{}^2/_9G_1(\varepsilon)+{}^2/_3G(\varepsilon)]/2G(\varepsilon)$$
$$Y(\varepsilon)=[{}^2/_3G(\varepsilon)+{}^2/_3G_1(\varepsilon)(Z(\varepsilon)-{}^1/_3)-K-K_2Z(\varepsilon)]/2G(\varepsilon)$$
$$Z(\varepsilon)=[2G(\varepsilon)+{}^4/_3G_1(\varepsilon)-3K-3K_2][3K_2+3K_1+6G(\varepsilon)+4G_1(\varepsilon)]^{-1}$$
$$K(\varepsilon)=K+{}^1/_3K_2+{}^1/_3(K_1+3K_2)Z(\varepsilon) \tag{4.4}$$
$$G_1(\varepsilon)=G_1+{}^2/_3G_4\varepsilon_u{}^2+{}^2/_3G_{34}\varepsilon_u{}^2$$

Заметим, что функции $X(\varepsilon)$, $Y(\varepsilon)$, $Z(\varepsilon)$, $K(\varepsilon)$ имеют для процессов (4.1) смысл, следующий из соотношений

$$\varepsilon_{11}=X(\varepsilon)\varepsilon_{ii},\quad \varepsilon_{22}=Y(\varepsilon)\varepsilon_{ii}$$
$$\varepsilon_{33}=Z(\varepsilon)\varepsilon_{ii},\quad \sigma_{11}\equiv\sigma_{ii}=3K(\varepsilon)\varepsilon_{ii} \tag{4.5}$$

Инварианты $\varepsilon_u{}^2$ и $\varepsilon_{u3}{}^2$ для процессов (4.1) в силу (1.2), (1.3), (4.2) равны

$$\varepsilon_u{}^2={}^4/_9\varepsilon_{11}{}^2(1+\nu_{21}{}^2+\nu_{31}{}^2+\nu_{21}+\nu_{31}-\nu_{21}\nu_{31})+{}^4/_3\varepsilon_{12}{}^2,\qquad \varepsilon_{u3}{}^2={}^2/_{27}\varepsilon_{11}{}^2(1+2\nu_{31}-\nu_{21})^2 \tag{4.6}$$

В соответствии с (4.2), зная из опытов σ_{11}, ε_{11} ε_{22}, ε_{33}, σ_{12}, ε_{12}, из опытов (4.1) можно определить только четыре постоянных упругости. Для определения пятой постоянной, а также для простого определения $G_1(\varepsilon)$ можно осуществить кручение (сдвиг) $\varepsilon_{13}\neq0$:

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=0,\quad \varepsilon_{13}\neq0 \tag{4.7}$$
$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{23}=0,\quad \sigma_{13}\neq0$$

Для процесса (4.7) в образце из материала с кубически нелинейной моделью (1.5), (1.6) будем иметь

$$\sigma_{13}=2[G(\varepsilon)+G_1(\varepsilon)]\varepsilon_{13} \tag{4.8}$$

где $G(\varepsilon)$, $G_1(\varepsilon)$ зависят от инвариантов $\varepsilon_u{}^2$, $\varepsilon_{u3}{}^2$ по соотношениям в (4.3), (4.4), а сами инварианты для процесса (4.7) равны

$$\varepsilon_u{}^2={}^4/_3\varepsilon_{13}{}^2,\quad \varepsilon_{u3}{}^2={}^2/_3\varepsilon_{13}{}^2 \tag{4.9}$$

В линейной области $G_1(\varepsilon)=G_1$ и, зная σ_{13}, ε_{13}, по (4.8) определяется пятая комбинация постоянных $G+G_1$, а по диаграмме $\sigma_{13}\sim\varepsilon_{13}$ в области пластичности в силу (4.9) и последнего соотношения (4.4) определится комбинация постоянных

$$2G_3+3G_{34}+G_4={}^9/_8[\sigma_{13}-2(G+G_1)\varepsilon_{13}]\varepsilon_{13}{}^{-3} \tag{4.10}$$

Из сдвига (4.1) $\varepsilon_{12}\neq0$ без растяжения $\varepsilon_{11}=0$ по диаграмме $\sigma_{12}\sim\varepsilon_{12}$ в силу четвертых соотношений (4.2), (4.3) и (4.6) определим постоянную пластического упрочнения

$$G_{13}={}^9/_{16}(\sigma_{12}-2G\varepsilon_{12})\varepsilon_{12}{}^{-3} \tag{4.11}$$

Обозначим $N=\varepsilon_{12}/\varepsilon_{11}$ для процесса (4.1). Тогда из диаграммы $\sigma_{12}\sim\varepsilon_{12}$ для процесса (4.1), когда, кроме того, вычисляются по (4.2) коэффициенты Пуассона ν_{21} и ν_{31}, получим по четвертому соотношению (4.4) и (4.6) следующую комбинацию постоянных пластичности:

$$G_3[1+{}^1/_3(1+\nu_{21}{}^2+\nu_{31}{}^2+\nu_{21}-\nu_{21}\nu_{31})N^{-2}]+$$
$$+{}^1/_{27}(1+2\nu_{31}-\nu_{21})^2N^{-2}={}^9/_{16}(\sigma_{12}-2G\varepsilon_{12})\varepsilon_{12}{}^{-3} \qquad (4.12)$$

В первом приближении коэффициенты Пуассона ν_{21}, ν_{31} могут быть взяты в (4.12) постоянными, определенными в линейной области или в пластической области из условия несжимаемости. Три соотношения (4.10)—(4.12) дают три постоянные пластичности G_3, G_{34}, G_4. Третье соотношение (4.2) тогда используется и в линейной области, а в области пластичности служит для целей сверки теории и эксперимента. Возможны и другие варианты определения параметров материала, так же как и усложнение модели (1.5), (1.6), следующее из эксперимента. В этом случае формулы (4.2)—(4.5) сохраняются, но изменится зависимость $G(\varepsilon)$, $G_1(\varepsilon)$, K, K_1, K_2 от инвариантов деформаций. В частности, возможны степенные аппроксимации соответствующих функций.

Для переменного нагружения параметры материала определяются аналогично. Необходимо только вместо напряжений и деформаций рассматривать приращения величин, отсчитываемых от соответствующей разгрузки (формулы (2.1)). Так, для второго нагружения ($n=2$) справедливы формулы (4.1)—(4.12), в которых нужно заменить, например, σ_{11}, $\nu_{21}(\varepsilon)$, $E_1(\varepsilon)$, $X(\varepsilon)$, $\varepsilon_u{}^2,\ldots$ соответственно на $\sigma_{11}^{(1)}-\sigma_{11}^{(2)}$, $\nu_{21}{}^{\Delta 2}(\Delta\varepsilon)$, $E_1^{\Delta(2)}(\Delta\varepsilon)$, $X^{\Delta(2)}(\Delta\varepsilon)$, $(\varepsilon_u^{\Delta(2)})^2,\ldots$. Модули линейной теории K, K_1, K_2, G, G_1, если нет деформационной анизотропии мгновенных модулей, остаются на месте. Аналогично и для n-го нагружения.

В качестве примера, расширяющего область применения предлагаемой деформационной теории, рассмотрим учет пластической анизотропии сплавов для процессов, когда предварительная обработка, например кручение, делает материал в отношении пластических свойств анизотропным — здесь трансверсально изотропным. Рассмотрим сталь 45. Так как эта сталь первоначально изотропна, то для нее [14]: $K=1{,}47\cdot10^5$ МПа, $G=0{,}81\cdot10^5$ МПа, $K_1=0$, $K_2=0$, $G_1=9$, $\nu_{21}=\nu_{31}=0{,}27$. Пусть производится предварительное нагружение — кручение до напряжения $\sigma_{12}=1{,}3\tau_{s0}$ ($\tau_{s0}=185$ МПа) и разгрузка, в результате чего материал приобретает анизотропию [14], причем направление *3* (вдоль радиуса трубки) будет отличаться от равноправных направлений *1* и *2*. Будем относить параметры пластических свойств при первом (предварительном) нагружении к актуальному состоянию в момент разгрузки. Тогда при первом нагружении будем описывать материал в пластической области трансверсально изотропными соотношениями. Из опытных данных [14] по кручению $\varepsilon_{12}\neq0$ без растяжения при помощи формулы (4.11) получаем, что для стали 45 $G_3=-5{,}18\cdot10^9$ МПа, в расчетной точке $\sigma_{12}\sim1{,}96\cdot10^2$ МПа, $\varepsilon_{12}\sim3{,}3\cdot10^{-3}$. До интенсивности $\sigma_u\sim1{,}4\sigma_{s0}$ ($\sigma_{s0}=321$ МПа) диаграммы $\sigma_u\sim\varepsilon_u$ и при растяжении, и при кручении совпадают [14]. Поэтому какая анизотропия была наведена в направлении 3 кручением $\sigma_{12}=1{,}3\tau_{s0}$, такая же будет наведена растяжением $1{,}3\sigma_{s0}$. Это направление растяжения обозначим через 3. После разгрузки от растяжения $\sigma_{33}=1{,}3\sigma_{s0}$ производится кручение образца $\sigma_{13}\neq0$, $\varepsilon_{13}\neq0$. Воспользовавшись данными [14] такого опыта, по формуле (4.10) определяем комбинацию постоянных пластичности $G_4+3G_{34}=3{,}92\cdot10^9$ МПа, $\sigma_{13}\sim2{,}08\cdot10^8$ МПа, $\varepsilon_{13}\sim4{,}5\cdot10^{-3}$.

Для расчетов по (4.12) рассмотрим процесс нагружения по лучу $\sigma_{12}/\sigma_{11}=\sqrt{3}$ после предварительного кручения $\sigma_{12}=1{,}3\tau_{s0}$ [14]. Для расчетной точки $\varepsilon_{12}=3{,}34\cdot10^{-3}$ имеют место оценки: $\sigma_{12}=234$ МПа, $\sigma_{11}=135$ МПа, $\varepsilon_{11}=1{,}07\cdot10^{-3}$, $\nu_{21}=\nu_{31}=0{,}5$; $N=3{,}12$. Тогда (4.12) дает $1{,}06G_3+8{,}6\cdot10^{-3}G_{34}=-4{,}67\cdot10^9$ МПа. Следовательно, для рассматриваемого класса процессов в стали 45 имеет место следующая анизотропия: $G_{34}=9{,}8\cdot10^{10}$ МПа, $G_4=-2{,}89\cdot10^{11}$ МПа. Для второго нагружения кручения σ_{12} в обратном направлении после кручения и разгрузки [14] по формуле, аналогичной (4.11), получим

$$G_3^{\Delta(2)}=-1{,}57\cdot10^9\,\text{МПа},\quad \Delta\sigma_{12}^{(2)}\sim377\,\text{МПа},\quad \Delta\varepsilon_{12}^{(2)}\sim5{,}85\cdot10^{-3} \qquad (4.13)$$

Если справедлив принцип (2.6), то коэффициенты α_n подобия масштабов можно получить, исходя из их определения, по формулам: $\alpha_n(1+\lambda_{0n})\tau_{sn-1}/\tau_{s0}$, $\lambda_{0n}=\tau_{sn}/\tau_{sn-1}$. Здесь λ_{0n} — показатель эффекта Баушингера для n-го сдвигового нагружения, τ_{sn} — предел текучести для n-го нагружени, τ_{sn-1} — модуль напряжения при разгрузке с n-1-го нагружения, τ_{s0} — предел текучести основного нагружения. По данным [14] для стали 45: $\tau_{s0}=185$ МПа, $\tau_{sn}/\tau_{s0}=1{,}3$ получим

$$\alpha_2=1{,}90;\ \lambda_{02}=0{,}46;\ \alpha_n=1{,}99;\ \lambda_{0n}=0{,}53\ (n>2) \qquad (4.14)$$

Для стали 45 $\tau_{s0}=201$ МПа [14] будем иметь $\alpha_2=1{,}57$, $\lambda_{02}=0{,}46$.

Если справедлив принцип (2.6), то параметры n-го нагружения для приращений определяются так:

$$G_{(3)}^{\Delta(n)}=G_3/\alpha_n^2,\quad G_{34}^{\Delta(n)}=G_{34}/\alpha_n^2,\quad G_4^{\Delta(n)}=G_4/\alpha_n^2 \tag{4.15}$$

Сравним $G_3^{\Delta(2)}$, непосредственно найденное по (4.13) и по (4.15), (4.14) при $n=2$ с использованием принципа (2.6). Получим $G_3^{\Delta(2)}=-1{,}44\cdot10^9$ МПа, ошибка составила 8%. Поэтому с такой ошибкой по (4.14), (4.15) находим параметры для стали 45 ($\tau_{s0}=185$ МПа) при переменных нагружениях:

$$G_{34}^{\Delta(2)}=2{,}74\cdot10^{10}\text{ МПа},\quad G_4^{\Delta(2)}=-0{,}804\cdot10^{11}\text{ МПа},\quad G_3^{\Delta(n)}=-1{,}31\cdot10^9\text{ МПа}$$

$$G_{34}^{\Delta(n)}=2{,}47\cdot10^{10}\text{ МПа},\quad G_4^{\Delta(n)}=-0{,}735\cdot10^{11}\text{ МПа}\quad(n=3,4,\ldots)$$

Аналогично может быть использована [14] степенная аппроксимация вида (2.8). Например, для сплава Д 16 [14] имеем $\gamma=1/4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
3. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
4. *Победря Б. Е.* Деформационная теория пластичности анизотропных сред // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 29–37.
5. *Колокольчиков В. В., Комарова Н. С.* Критерий разрушения от накопления повреждений трехкомпонентного слоистого композита // Механика композитн. материалов. 1983. № 1. С. 33–41.
6. *Колокольчиков В. В.* О постулате изотропии для первоначально анизотропных материалов // Механика деформируемых сред. Куйбышев: Изд-во Куйбышев. ун-та, 1981. С. 105–116.
7. *Москвитин В. В.* Пластичность при переменных нагружениях. М.: Изд-во МГУ, 1965. 263 с.
8. *Грин А. Е., Адкинс Дж. Е.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
9. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
10. *Masing G., Dahl O.* Über die Erstarrung von eisenhaltigem Aluminium // Wiss. Veröffentl. aus dem Simens-Konz. 1926, Bd. 5, N 1. S. 152–159.
11. *Amijima S., Adachi T.* Nonlinear stress-strain responce of laminated composites // J. Compos. materials. 1979. V. 13. July, P. 206–218.
12. *Халджигитов А. А.* Задача о равновесии анизотропного параллелепипеда // Докл. АН УзССР. 1984. № 8. С. 15–17.
13. *Колокольчиков В. В., Труфанов В. С.* Определение податливостей анизотропного материала из опытов на одноосное сжатие призматических образцов // Механика композитн. материалов. 1984. № 6. С. 1084–1088.
14. *Талыпов Г. Б.* Пластичность и прочность стали при сложном нагружении. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. 134 с.

Куйбышев

Поступила в редакцию 11.II.1987