

УДК 539.374

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ЖЕСТКОСТИ ПЛОСКОЙ СИЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

ГАЙ М. И., ОШМЯН В. Г.

Перколяционные особенности двухфазной среды определяют степенные закономерности, которым подчиняется эффективная жесткость среды при стремлении модуля упругости одной из компонент к нулю. Для плоских задач при помощи численного моделирования показано, что соответствующие показатели степени зависят от коэффициентов Пуассона составляющих. На примере коэффициента термического расширения композитного материала показано прикладное значение рассмотренных закономерностей.

Эффективная проводимость плоской случайно-неоднородной среды при равной концентрации фаз с проводимостями σ_1 и σ_2 определяется формулой [1]:

$$\sigma^* = (\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} \quad (1)$$

Аналогичная формула справедлива и для модуля сдвига, если компоненты изотропны и несжимаемы, а среду можно считать макроизотропной [2].

Что будет, если отказаться от предположения о несжимаемости фаз? Почти очевидно, что в общем случае формула (1) несправедлива. Чтобы убедиться в этом, достаточно выписать вариационные оценки типа Хашина и Штрикмана [3] для плоской задачи теории упругости:

$$\frac{2x(1+\beta_2)}{(1+2\beta_2)+x(3+2\beta_2)} \leq \frac{f-x}{1-x} \leq \frac{1+x(1+2\beta_1)}{(3+2\beta_1)+x(1+2\beta_1)} \quad (2)$$

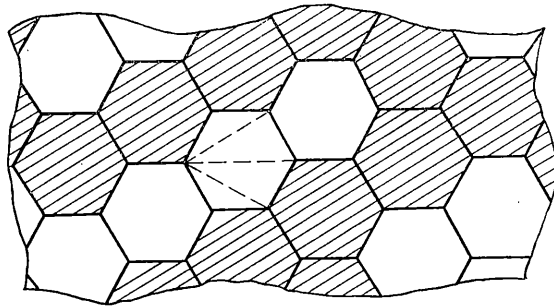
$$(1-x)(\beta_2 - \beta_1 x) \geq 0$$

Здесь и далее $x = \mu_2/\mu_1$, $f = \mu^*/\mu_1$, $\beta = \mu/K^0$ ($\beta = 0$ — материал несжимаем), μ — модуль сдвига, $K^0 = \lambda^0 + \mu$ — «плоский» объемный модуль, $\lambda^0 = \lambda$ для случая плоской деформации, $\lambda^0 = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$ для плоского напряженного состояния, λ — постоянная Ламе, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Если β_1 и β_2 фиксированы и не равны нулю, всегда можно указать значение $x > 0$, при котором $f(x) = \sqrt{x}$ не удовлетворяет условиям (2).

Итак, в общем случае формула (1) не выполняется. Однако возможно, что она справедлива асимптотически, т. е. $f(x) \sim \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$ (такие среды с сильно отличающимися жесткостями называются сильно-неоднородными). Для выяснения этого обстоятельства проведена серия вычислительных экспериментов.

Исследовалась квадратная область, внутри которой размещался фрагмент шестиугольной решетки. При помощи датчика случайных чисел каждая ячейка (полный или усеченный шестиугольник) наделялась свойствами мягкой матрицы или жесткого наполнителя (фиг. 1). Число ячеек при моделировании составляло 2538. Для такого количества заданная концентрация 50% достигалась с точностью до трех знаков.

Считалось, что внутри каждой ячейки удовлетворяются уравнения теории упругости для случая плоской деформации, а на границах раздела фаз выполняются условия непрерывности напряжений и перемещений.



Фиг. 1

Краевые условия для смещений ставились по значениям тензора макродеформаций.

Краевые задачи решались численно при помощи метода конечных элементов. При этом каждый шестиугольник разбивался на четыре треугольных конечных элемента (фиг. 1). Матрица конечноэлементной схемы обращалась при помощи энергетического итерационного алгоритма, в котором за нулевое приближение выбиралось однородное поле. Итерации прекращались, когда относительная погрешность на значениях упругой энергии W не превышала 10^{-3} .

Расчеты проводились при отношениях модулей упругости фаз $10, 10^2, 10^3, 10^4$ и различных значениях коэффициентов Пуассона компонент. При каждом фиксированном наборе материальных параметров выбирались и рассчитывались несколько различных конфигураций. Недостовверные результаты при дальнейшей статистической обработке отвергались — отбрасывались случайно сгенерированные непреставительные конфигурации; в конечном итоге при каждом наборе параметров в осреднении участвовали 6–9 конфигураций.

Для получения численных оценок показателя скейлинга δ в соотношении $f(x) \sim x^\delta$ последнее заменялось соотношением $W/E_1 \sim x^\delta$. Этим, разумеется, допускалось предположение об одинаковом скейлинге сдвиговой и объемной жесткостей или, что то же, об эффективной сжимаемости среды. Обоснованность такой гипотезы вытекает из расчетов эффективного коэффициента Пуассона [4]. В то же время, при этой замене не возникало проблем, связанных с эффективной изотропией среды или с различными способами определения эффективных констант (изучаемая система, конечно, довольно велика, но все же конечна).

Применялось несколько способов статистической обработки результатов. Значение δ определялось методом наименьших квадратов для выражения $\lg(W/E_1) = A + \delta \lg x$. Однако, в одном случае рассматривалась полная выборка, в другом — сначала осреднялась по реализациям величина W и в третьем — сначала осреднялся $\lg(W/E_1)$.

Результаты представлены в таблице. Обозначения δ_1, δ_2 и δ_3 соответствуют трем указанным способам осреднения. При ее анализе прежде всего видно, что при коэффициентах Пуассона фаз $\nu_m = \nu_n = 0,45$, когда компоненты уже «почти» несжимаемы, наиболее разумное, близкое к теоретическому, значение δ получается при втором способе осреднения. Это естественно, поскольку среднее по ансамблю реализаций для достаточно большой системы совпадает со средним по пространству для бесконечной системы. С другой стороны, при всех способах осреднения видна общая тенденция в зависимости показателя δ от коэффициентов Пуассона компонент. Поэтому можно сделать вывод о неуниверсальности закона (1).

Напомним теперь, что эффективный модуль композитных материалов, составленных из компонент с сильно различающимися жесткостями, при средних концентрациях недостаточно адекватно описывается общепринятыми теориями (например [5, 6]). В [7, 4] для таких материалов предлагались зависимости модуля от концентрации, рассчитанные по моделям, аналогичным описанной выше. Основной идеей этих работ была следующая:

Таблица

ν_M	ν_H	δ_1	δ_2	δ_3
0,15	0,15	0,472	0,467	0,472
0,15	0,45	0,335	0,317	0,329
0,37	0,15	0,453	0,440	0,449
0,37	0,37	0,499	0,488	0,492
0,37	0,45	0,407	0,401	0,409
0,45	0,15	0,537	0,535	0,535
0,45	0,45	0,514	0,501	0,505

чая. Если допустить, что одна из фаз — матрица — обладает нулевой жесткостью, то естественно ожидать, что существует критическое значение концентрации, до которого эффективная жесткость среды равна нулю. Эта критическая концентрация совпадает с порогом протекания p_c соответствующей перколяционной задачи [8, 9], т. е. с концентрацией, выше которой в системе всегда есть бесконечный жесткий кластер. Кривая 1 на фиг. 2 качественно отражает концентрационную зависимость таких систем. Если взять конечное, но малое значение модуля матрицы, то при стремлении его к нулю концентрационная зависимость модуля композита должна сходиться к чистой перколяционной (кривая 2). Однако, эта сходимость различна при разных значениях концентрации. Существует еще одна критическая точка — концентрация q_c , выше которой в системе отсутствует матричный кластер. Ясно, что $q_c + p_c = 1$. Для плоских систем $q_c \leq 0,5 \leq p_c$ (равенство достигается на шестиугольной решетке). Таким образом, для плоских систем следует ожидать, что ниже q_c характерным масштабом жесткости композита служит величина модуля матрицы, а выше p_c — модуля наполнителя. Скорость сходимости во всех случаях ниже p_c определяется обсуждаемым в данной статье скейлинговым показателем δ : $f(x) \sim x^\delta$ при $x \rightarrow 0$, причем его сингулярные изменения следует ожидать только либо при q_c , либо при p_c . Когда концентрация наполнителя мала, значение δ можно найти из регулярных моделей (см. напр. [10]), что дает $\delta = 1$ и не зависит от коэффициентов Пуассона составляющих. При концентрации 50% для плоских систем и несжимаемых материалов $\delta = 1/2$. Если отказаться от несжимаемости, то δ зависит от коэффициентов Пуассона, как показано выше. После p_c скорость сходимости на соответствующем масштабе определяется дуальным показателем γ : $f(x) \sim x^\gamma$ при $x \rightarrow \infty$. Так же как и раньше, ясно, что в плоском случае $\gamma = 1$. В пространстве $p_c < q_c$, и поэтому ниже p_c $\delta = 1$, а выше q_c $\gamma = 1$. Значения γ в интервале между p_c и q_c можно найти, если при $s = 0,5$ учесть соотношение подобия $f(1/x, \nu_1, \nu_2) = f(x, \nu_2, \nu_1)/x$, которое дает $\delta(\nu_1, \nu_2) + \gamma(\nu_2, \nu_1) = 1$. Вспоминая, что при $s = 0,5$ в системе уже есть жесткий кластер, т. е. $\delta = 0$, получаем $\gamma = 1$. Таким образом, в пространстве сходимости к перколяционной кривой в каком-то смысле «равномерна» по концентрации.

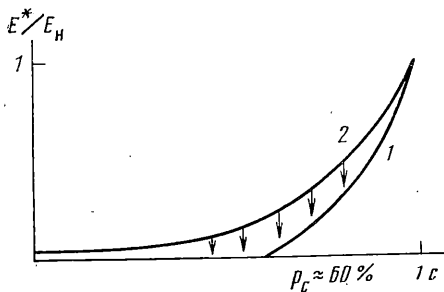
Указанные скейлинговые закономерности имеют прикладное значение. Для примера рассмотрим вопрос о концентрационной зависимости эффективного коэффициента термического расширения α сильно-неоднородной среды. Известно, что эта величина определяется формулой [11]:

$$\alpha^* = \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) (1/K^* - 1/K_2) (1/K_1 - 1/K_2)^{-1} \quad (3)$$

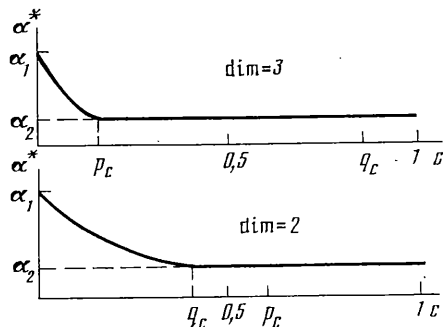
Здесь K — объемный модуль соответствующей задачи теории упругости. Когда $K_1 \ll K_2$ формула (3) принимает вид:

$$\alpha^* = \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) K_1/K^* \quad (4)$$

Выше p_c имеем $K_1/K^* \ll 1$ и второе слагаемое в (4) становится пренебрежимо мало. В пространственном случае это означает, что в области между p_c и q_c , несмотря на наличие бесконечных мягких каналов, термическое расширение определяется жесткой фазой. Более интересная ситуация в случае плоских систем. Здесь между q_c и p_c нет ни жесткого, ни мяг-



Фиг. 2



Фиг. 3

кого кластера. Однако, как указано выше, $K^*/K_1 \sim x^\delta$ и $0 < \delta < 1$. Поэтому снова $\alpha^* = \alpha_2$. Зависимость α^* от концентрации для чистой перколяционной ситуации показана на фиг. 3 (обычно $\alpha_1 > \alpha_2$). Сходимость к чистой перколяционной кривой для плоского и пространственного случаев снова различна. Для пространственных систем отклонение от этой кривой вне зависимости от концентрации пропорционально x , тогда как для плоских между q_c и p_c оно пропорционально $x^{1-\delta}$. Интересно отметить также, что в плоском случае точка q_c вряд ли является критической для величины α^* (в смысле существования в ее окрестности нетривиального скейлинга по концентрации [8]), так как она не критическая для величины K^* .

Авторы благодарны Л. И. Маневичу и Р. А. Турусову за поддержку работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дыхне А. М. Проводимость двумерной двухфазной системы // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. № 1. С. 110–115.
2. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
3. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11. № 2. P. 127–140.
4. Гай М. И., Зеленский Э. С., Маневич Л. И., Ошмян В. Г., Сочнев В. И., Суллева З. П., Турусов Р. А. Упругие характеристики случайно-неоднородных композитных материалов // Механика композит. материалов. 1987. № 2. С. 243–249.
5. Дзенис Ю. А. Влияние агрегирования жесткого дисперсного наполнителя на характеристики упругости полимерного композита // Механика композит. материалов. 1986. № 1. С. 14–22.
6. Ledbetter H. M., Datta S. K., Kriz R. D. Elastic constants of an anisotropic nonhomogeneous particle-reinforced composite. // Acta Metallurg. 1984. V. 32. № 12. P. 2225–2231.
7. Гай М. И., Маневич Л. И., Ошмян В. Г. О перколяционных эффектах в механических системах // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 6. С. 1389–1391.
8. Essam J. W. Percolation theory. // Rep. Prog. Phys. 1980. V. 43. № 7. P. 833–912.
9. Кестен Х. Теория просачивания для математиков. М.: Мир, 1986. 392 с.
10. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
11. Левин В. М. О коэффициентах температурного расширения неоднородных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 1. С. 88–94.

Москва

Поступила в редакцию
9.X.1987