

УДК 539.214

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ШЕЙКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ В ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

РАДАЕВ Ю. Н.

Методы интегрирования уравнений плоской задачи теории идеальной пластичности изложены в [1-3]. В [1] подробно рассмотрена связь уравнений плоской задачи с телеграфным уравнением (показано, что кривизна поля линий скольжения, отнесенная к координатам плоскости годографа, удовлетворяет телеграфному уравнению). Указанная связь позволяет в некоторых случаях точно интегрировать уравнения равновесия плоского деформированного состояния.

В данной работе уравнения плоской задачи записаны в криволинейных координатах, причем координатные линии совпадают с траекториями главных напряжений, и проинтегрированы. С помощью интегралов вдоль линий главных напряжений установлена связь между решениями плоской задачи и плоскими отображениями Пуанкаре. Введена производящая функция плоского канонического преобразования. Показано, что определение производящей функции сводится к интегрированию телеграфного уравнения, и получено общее решение уравнений равновесия в параметрической форме. Полученное общее аналитическое решение применено к задаче о растяжении симметричной шейки в жесткопластическом теле. Приведено точное значение предельной нагрузки. Решение обобщается на случай излома контура шейки.

1. Основные соотношения. Уравнения равновесия в случае плоского деформированного состояния имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \sigma/\partial x_1 - 2k[(\sin 2\theta)\partial\theta/\partial x_1 - (\cos 2\theta)\partial\theta/\partial x_2] &= 0 \\ \sigma/\partial x_2 + 2k[(\cos 2\theta)\partial\theta/\partial x_1 + (\sin 2\theta)\partial\theta/\partial x_2] &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где σ_1, σ_2 — главные значения тензора напряжений $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, θ — угол наклона главного направления, соответствующего наибольшему собственному значению σ_1 , к оси x_1 .

В области пластического течения G введем ортогональные криволинейные координаты

$$x_1 = f(q^1, q^2), \quad x_2 = h(q^1, q^2) \quad (1.2)$$

так, чтобы линии $q^2 = \text{const}$ были фазовыми кривыми поля главных направлений σ_1 . Через h_1, h_2 обозначим параметры Ламе. Уравнения равновесия (1.1) примут следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial q^1} (\sigma + 2k \ln h_2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q^2} (\sigma - 2k \ln h_1) = 0 \quad (1.3)$$

Уравнения интегрируются и общий интеграл можно записать в виде $h_1 h_2 = P(q^1)Q(q^2)$. Отображающие функции (1.2) необходимо удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q^1} \frac{\partial f}{\partial q^2} + \frac{\partial h}{\partial q^1} \frac{\partial h}{\partial q^2} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial q^1} \frac{\partial h}{\partial q^2} - \frac{\partial h}{\partial q^1} \frac{\partial f}{\partial q^2} &= \pm P(q^1)Q(q^2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Определим координаты ξ, η следующим образом:

$$\xi = \mp \int^{\eta^1} P(\omega) d\omega, \quad \eta = \int^{\eta^2} Q(\omega) d\omega$$

Для отображения

$$x_1 = f(\xi, \eta), \quad x_2 = h(\xi, \eta) \quad (1.5)$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial h}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} &= -1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.6) антисимметрична при перестановке ξ, η . Отображение (1.5) области G^* плоскости ξ, η на область G имеет якобиан, равный (-1) , т. е. площади образа и прообраза при отображении (1.5) равны. Введем производящую функцию S канонического отображения (1.5) [4]:

$$x_2 = \partial S(x_1, \eta) / \partial x_1, \quad \xi = -\partial S(x_1, \eta) / \partial \eta \quad (1.7)$$

Преобразуя уравнения (1.6) к функции S и переменным x_1, η , получим уравнение относительно производящей функции:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2}$$

Это уравнение инвариантно при преобразовании Лежандра. Обозначим через W частную производную $\partial S / \partial x_1$ и введем тангенциальные координаты

$$X = \partial W / \partial x_1, \quad Y = \partial W / \partial \eta, \quad Z = x_1 (\partial W / \partial x_1) + \eta (\partial W / \partial \eta) - W$$

Тогда для функции $Z(X, Y)$ получим линейное уравнение

$$(1+X^2) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2XY \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} - Y^2 \frac{1-X^2}{1+X^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0$$

которое после преобразования к характеристическим переменным и мультипликативного преобразования неизвестной функции Z по формулам $u = \arctg X, v = \frac{1}{2} \ln(1+X^2) - \ln Y, F = Z \cos u$ приводится к телеграфному уравнению

$$\partial^2 F / \partial u^2 - \partial^2 F / \partial v^2 + F = 0$$

Отметим, что переменная u имеет смысл угла наклона главного направления σ_1 к оси x_1 . Так как преобразование Лежандра инволютивно, то можно выразить переменные x_1, x_2, η через переменные X, Y, Z :

$$x_1 = \partial Z / \partial X, \quad x_2 = X(\partial Z / \partial X) + Y(\partial Z / \partial Y) - Z, \quad \eta = \partial Z / \partial Y$$

Преобразуя последние выражения к переменным u, v и функции $F(u, v)$, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= (\partial F / \partial u) \cos u + (\partial F / \partial v) \sin u + F \sin u \\ x_2 &= (\partial F / \partial u) \sin u - (\partial F / \partial v) \cos u - F \cos u \\ \eta &= -\exp(v) \partial F / \partial v \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) определяют отображение области на плоскости u, v на некоторую область физической плоскости x_1, x_2 , если задано некоторое решение телеграфного уравнения. Линии $\eta = \text{const}$ отображаются на траектории главного напряжения σ_1 . Распределение давления σ определяется

с помощью интегралов (1.3) формулами (Δ — якобиан отображения (1.8)):

$$\sigma = 2k \ln \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{1/2} + c \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} \right) \Delta^{-1} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \Delta^{-1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Таким образом формулы (1.8)–(1.10) представляют общее решение уравнений пластического равновесия при условии, что якобиан Δ отличен от нуля. Следовательно, если удастся по начальным условиям для σ и θ на начальной кривой сформулировать задачу Коши для определения функции $F(u, v)$, то по методу Римана может быть получено аналитически решение задачи Коши, а затем по формулам (1.8)–(1.10) — решение начальной задачи для уравнений пластического равновесия.

2. Задача о растяжении шейки в жесткопластическом теле. Симметричная шейка, граница которой есть выпуклая вниз кривая γ , растягивается вдоль оси x_1 . Уравнение γ возьмем в следующем виде: $x_2 = \omega(x_1)$, $|x_1| \leq \alpha$, $\omega(0) = a$, $d^2\omega/dx_1^2 > 0$, где α выбрано таким, чтобы пластическая область при достижении растягивающей силой предельного значения не вышла за границу квадрата $|x_1| \leq \alpha$, $|x_2| \leq \omega(\alpha)$. В силу симметрии задачи пластическая область будет иметь вид, изображенный на фиг. 1, поэтому можно ограничиться рассмотрением только верхней половины шейки.

Дуга QQ' — свободная граница. Поэтому физическая краевая задача приводится к двум математическим задачам Коши для системы уравнений пластического равновесия (1.1) с начальными данными на контуре шейки γ : $\sigma = k$, $\theta = \psi$ на γ — в случае первой задачи и $\sigma = k$, $\theta = \psi + \pi/2$ на γ — в случае второй математической задачи Коши, ψ — угол наклона касательной к кривой γ к оси x_1 .

Имеем соотношения Леви [3]:

$$\sigma_{11} = \sigma + k \cos 2\theta, \quad \sigma_{22} = \sigma - k \cos 2\theta, \quad \sigma_{12} = k \sin 2\theta \quad (2.1)$$

Рассмотрим первую математическую задачу Коши. Определим соответствующую функцию $F(u, v)$. Параметризуем дугу QQ' , выбрав в качестве параметра угол наклона касательной к оси x_1 :

$$x_1 = \mu_1(\psi), \quad x_2 = \mu_2(\psi), \quad |\psi| \leq \beta_* \quad (2.2)$$

Тогда для того, чтобы отрезок $-\beta_* \leq u \leq \beta_*$ отображался на контур γ , функция F необходимо должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} (\partial F / \partial u)|_{v=0} \cos u + (\partial F / \partial v)|_{v=0} \sin u + F(u, 0) \sin u &= \mu_1(u) \\ (\partial F / \partial u)|_{v=0} \sin u - (\partial F / \partial v)|_{v=0} \cos u - F(u, 0) \cos u &= \mu_2(u) \end{aligned} \quad (2.3)$$

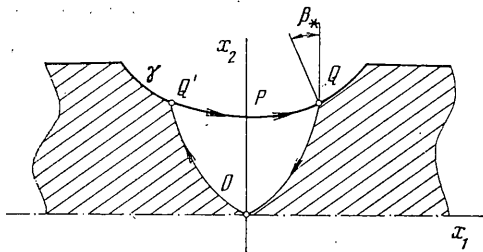
Параметризация (2.2) может быть получена из любой другой параметризации $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$. Для этого требуется обратить интеграл

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{f_2''(\tau) f_1'(\tau) - f_1''(\tau) f_2'(\tau)}{f_1'^2(\tau) + f_2'^2(\tau)} d\tau$$

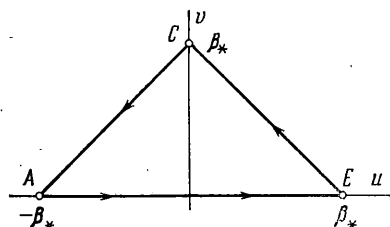
а затем принять $\mu_1(\psi) = f_1(t(\psi))$, $\mu_2(\psi) = f_2(t(\psi))$. Введем обозначения $\lambda(u) = F(u, 0)$, $\mu(u) = \partial F / \partial v|_{v=0}$ и перепишем (2.3) в виде

$$\begin{aligned} \lambda'(u) \cos u + \mu(u) \sin u + \lambda(u) \sin u &= \mu_1(u) \\ \lambda'(u) \sin u - \mu(u) \cos u - \lambda(u) \cos u &= \mu_2(u), \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно $\lambda(u)$, $\lambda'(u)$, получим



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\lambda = \mu_1 \sin u - \mu_2 \cos u - \mu,$$

$$\lambda' = \mu_1 \cos u + \mu_2 \sin u.$$

Условие совместности последней системы имеет следующий вид

$$\mu' = \mu_1' \sin u - \mu_2' \cos u$$

Так как $\mu_2'/\mu_1' = \operatorname{tg} u$, то, полагая $\mu(u) \equiv 0$, удовлетворим условию совместности. При этом получим

$$\lambda(u) = \mu_1(u) \sin u - \mu_2(u) \cos u \quad (2.4)$$

Кроме того, при указанном выборе $\lambda(u)$, $\mu(u)$ удовлетворим краевому условию на θ на контуре шейки. Краевому условию на σ можно удовлетворить за счет выбора константы c в выражении (1.9). В самом деле, так как

$$\Delta|_{v=0} = -(\mu_1'^2 + \mu_2'^2)^{-1/2} \partial^2 F / \partial v^2|_{v=0}$$

$$\partial \eta / \partial x_1|_{v=0} = -\mu_2' (\Delta^{-1} \partial^2 F / \partial v^2)|_{v=0}$$

$$\partial \eta / \partial x_2|_{v=0} = \mu_1' (\Delta^{-1} \partial^2 F / \partial v^2)|_{v=0}$$

то на контуре γ $\sigma = c$. Полагая $c = k$, удовлетворим краевому условию для σ на γ .

Итак, если $F(u, v)$ — решение задачи Коши

$$\partial^2 F / \partial u^2 - \partial^2 F / \partial v^2 + F = 0, \quad |u| < \beta_*, \quad v > 0$$

$$F(u, 0) = \mu_1(u) \sin u - \mu_2(u) \cos u, \quad |u| \leq \beta_* \quad (2.5)$$

$$\partial F / \partial v|_{v=0} = 0, \quad |u| \leq \beta_*$$

то формулы (1.8)–(1.10) дают решение задачи о растяжении шейки. Здесь β_* — угол между нормалью к контуру шейки в точке Q и осью x_2 . Решение задачи Коши (2.5) определено в треугольнике AEC (фиг. 2) и дается формулой Римана [5]:

$$F(u, v) = \frac{1}{2} [\lambda(u-v) + \lambda(u+v)] - \frac{v}{2} \int_{-v}^v \lambda(u-\tau) \frac{I_1((\tau^2 - v^2)^{1/2})}{(\tau^2 - v^2)^{1/2}} d\tau \quad (2.6)$$

Через $I_1(t)$ обозначена функция Бесселя первого порядка мнимого аргумента. Отметим также, что справедливо разложение

$$\frac{I_1((\tau^2 - v^2)^{1/2})}{(\tau^2 - v^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v^2 - \tau^2)^n}{n! (n+1)! 2^{2n+1}}$$

Отображение

$$x_1 = (\partial F / \partial u) \cos u + (\partial F / \partial v) \sin u + F \sin u \quad (2.7)$$

$$x_2 = (\partial F / \partial u) \sin u - (\partial F / \partial v) \cos u - F \cos u$$

переводит отрезок $v=0$, $-\beta_* \leq u \leq \beta_*$ в дугу $Q'Q$. Стороны треугольника AC и EC отображаются соответственно на дуги $Q'O$ и QO . Якобиан ото-

бражения (2.7) отрицателен, т. е. отображение меняет ориентацию. Угол β_* — наименьший положительный корень уравнения $x_2(0, v) = 0$. Используя представление (2.7) x_2 через u и v , получим следующее уравнение для нахождения β_* : $(\partial F / \partial v)|_{u=0} + F(0, v) = 0$. Можно показать, что функция $\kappa(v) = (\partial F / \partial v)|_{u=0} + F(0, v)$ монотонно возрастает и имеет единственный положительный корень.

Для подсчета предельной нагрузки $P(\beta_*)$ необходимо вычислить значения σ_{11} на отрезке OP . Имеем $\partial \eta / \partial x_1|_{u=0} = 0$, $\partial \eta / \partial x_2|_{u=0} = \exp(v)$, поэтому $\sigma|_{u=0} = 2kv + k$. Подставляя полученное значение σ в (2.4) и учитывая, что $\theta|_{u=0} = 0$, имеем на отрезке OP $\sigma_{11} = 2k(1+v)$, $0 \leq v \leq \beta_*$. Следовательно,

$$P(\beta_*) = 4k \int_0^{\beta_*} (1+v) \frac{ds}{dv} dv$$

Так как вдоль отрезка PO имеем

$$ds/dv = -(\partial x_2 / \partial v)|_{u=0} = (\partial^2 F / \partial v^2)|_{u=0} + (\partial F / \partial v)|_{u=0}$$

где функция $F(u, v)$ определена формулой (2.6), выражение для предельной нагрузки запишем в виде

$$P(\beta_*) = 4k \int_0^{\beta_*} (1+v) \kappa'(v) dv$$

Интегрируя по частям, получим окончательно следующую формулу для величины предельного растягивающего усилия

$$P(\beta_*) = 4k \left(a - \int_0^{\beta_*} \kappa(v) dv \right) \quad (2.8)$$

в которой β_* — положительный корень уравнения $\kappa(v) = 0$. Явное выражение функции $\kappa(v)$ через параметрические уравнения контура шейки γ имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa(v) = & \lambda(v) + \lambda'(v) - (1+v) \int_0^v \lambda(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v^2 - \tau^2)^n}{n!(n+1)! 2^{2n+1}} d\tau - \\ & - v^2 \int_0^v \lambda(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v^2 - \tau^2)^{n-1}}{(n-1)!(n+1)! 2^{2n}} d\tau \end{aligned}$$

где функция $\lambda(u)$ определена по (2.4).

Вторая математическая задача Коши приводит к отрицательному значению напряжения σ_{11} на отрезке OP , что противоречит физической постановке задачи.

Приведенное решение не является полным, так как не определен тензор напряжений в жестких зонах и не указано согласованное кинематическое поле. Соответствие между задачей Коши для системы уравнений пластического равновесия (1.1) и задачей Коши для телеграфного уравнения (2.5) позволяет также формировать и другие пластические поля. Только полное решение является единственным и дает точное значение предельной нагрузки.

Однако выражение (2.8) для растягивающего усилия является точным значением предельной нагрузки. Действительно, можно доказать, что существует кинематическое поле, согласованное с полем скольжения, построенным выше. Можно доказать также, что в задаче о растяжении шейки любое статически допустимое поле напряжений, определенное в пластической зоне, покрывающей сечение OP , для которого существует согласованное кинематическое поле, приводит к одному и тому же значению растягивающего усилия.

Пример. Растяжка шейки с контуром кругового очертания. Контур шейки — окружность радиуса R , ширина шейки равна $2a$. Параметризация (2.2) имеет следующий вид: $\mu_1(\psi) = R \sin \psi$, $\mu_2(\psi) = R + a - R \cos \psi$. Непосредственной подстановкой можно показать, что функция $F(u, v) = -(R+a) \cos u + R \operatorname{ch} v$ является решением задачи Коши (2.5). Функция $\kappa(v)$ в данном случае представляется в следующем виде: $\kappa(v) = -(R+a) + R \exp v$. Угол β_* определяется как корень уравнения $\kappa(v) = 0$ и равен $\beta_* = \ln(1+a/R)$. Величина предельной нагрузки, согласно (2.8), равна $P(\beta_*) = = 4k(R+a) \ln(1+a/R)$. Полученное значение предельной нагрузки совпадает с тем значением, которое приводится в [3].

Пример. Растяжение гиперболической шейки. В случае, когда контур шейки является гиперболой $x_1 = \operatorname{sh} t$, $x_2 = \operatorname{ch} t$, параметризация (2.2) имеет вид: $\mu_1 = \operatorname{tg} \psi [1 - \operatorname{tg}^2 \psi]^{-1/2}$, $\mu_2 = [1 - \operatorname{tg}^2 \psi]^{-1/2}$. Функцию $\lambda(u)$ после преобразования можно привести к следующему виду $\lambda(u) = -(\cos 2u)^{1/2}$. Предельная нагрузка определяется формулой (2.8), в которой

$$\begin{aligned} \kappa(v) = & (\sin 2v - \cos 2v) (\cos 2v)^{-1/2} + (1+v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)! 2^{2n+1}} \times \\ & \times \int_0^v (\cos 2\tau)^{1/2} (v^2 - \tau^2)^n d\tau + v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+1)! 2^{2n}} \int_0^v (\cos 2\tau)^{1/2} (v^2 - \tau^2)^n d\tau \end{aligned}$$

3. Обобщения на случай излома контура шейки и на случай пластически ортоотропного материала. Рассмотрим случай, когда симметричная выпуклая кривая γ имеет в точке P излом (фиг. 3, а) $\omega'(0-0) = -\operatorname{tg} \beta_1$, $\omega'(0+0) = \operatorname{tg} \beta_1$, а в остальных точках $\omega(x_1)$ дважды непрерывно дифференцируема. Начальные данные физической задачи Коши на дугах $Q'P$ и PQ позволяют построить функцию $F(u, v)$ в треугольнике AEC и $A'E'C'$ (фиг. 3, б). Функции (2.7) будут отображать указанные треугольники соответственно на криволинейные треугольники PQR и $Q'PR'$. Для построения F во всем треугольнике $A'CB$ необходимо задать начальные данные на отрезке $v=0$, $|u| < \beta_1$. Эти начальные данные надо выбрать таким образом, чтобы при изменении u от $-\beta_1$ до β_1 точка физической плоскости с координатами

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda'(u) \cos u + \mu(u) \sin u + \lambda(u) \sin u \\ x_2 &= \lambda'(u) \sin u - \mu(u) \cos u - \lambda(u) \cos u \end{aligned}$$

оставалась на месте в положении $x_1=0$, $x_2=a$. Это условие будет выполнено, если положить $\mu(u) = 0$, $\lambda(u) = -a \cos u$. Непосредственным подсчетом по формулам (1.9), (1.10) можно доказать что $\lim_{v \rightarrow 0+} \sigma(u, v) = c$ при $v \rightarrow 0+$.

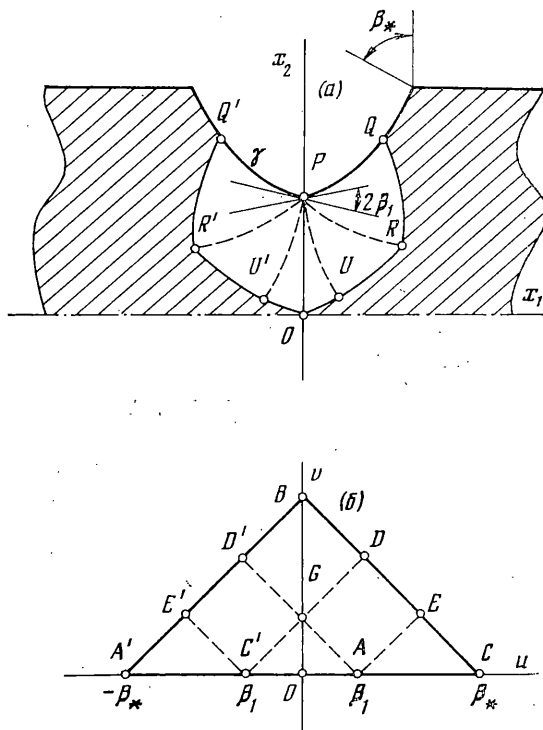
Таким образом, в случае излома контура шейки следует вместо задачи Коши (2.5) решать задачу Коши следующего вида

$$\begin{aligned} \partial^2 F / \partial u^2 - \partial^2 F / \partial v^2 + F &= 0, \quad |u| < \beta_*, \quad v > 0 \\ \partial F / \partial v|_{v=0} &= 0, \quad |u| \leq \beta_* \\ F(u, 0) &= \begin{cases} \mu_1(u) \sin u - \mu_2(u) \cos u, & \beta_1 < |u| \leq \beta_* \\ -a \cos u, & |u| \leq \beta_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Начальная функция $F(u, 0)$ является четной непрерывной функцией на отрезке $-\beta_* \leq u \leq \beta_*$. Производная $\partial F / \partial u|_{v=0}$ также непрерывна на указанном отрезке, включая точки $u = \pm \beta_1$. В силу этого на отрезках характеристик AE , AD' и $C'D$, $C'E'$ функции $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$ (см. (2.7)) непрерывны. Однако вторые частные производные $\partial^2 F / \partial u^2$, $\partial^2 F / \partial v^2$ претерпевают скачок при переходе через характеристики, которые выходят из точек $u = -\beta_1$, $u = \beta_1$, так как функция $\partial^2 F / \partial u^2|_{v=0}$, вообще говоря, имеет разрыв первого рода в точках $u = \pm \beta_1$. Функции (2.7) отображают треугольник $C'AG$ в точку $x_1=0$, $x_2=a$ физической плоскости.

Формула (2.8) для предельного растягивающего усилия будет справедлива и в случае излома контура шейки, если заменить в ней нижний предел интегрирования на β_1 .

Аналогично может быть решена задача о пластическом равновесии



Фиг. 3

шейки при одноосном растяжении и в том случае, когда имеется m точек излома контура шейки, симметрично расположенных относительно оси x_2 .

Построенное в п. 1 общее решение уравнений пластического равновесия обобщается на случай пластически ортотропного материала. Уравнения пластического равновесия ортотропного материала в условиях плоской деформации принадлежат к гиперболическому типу [6]. Используя интегралы уравнений пластического равновесия, полученные в [6], можно, как и выше, свести начальную задачу для системы уравнений пластического равновесия к интегрированию задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка.

Автор выражает благодарность Г. И. Быковцеву за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Прагер В., Ходжс Ф. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 398 с.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
5. Курант Р. Уравнение с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
6. Геоджаев В. О. Пластическое плоское деформированное состояние ортотропных сред // Исследования по механике и прикладной математике. М.: Оборонгиз, 1958. С. 55-68.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1987