МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1988

УДК 539.3

СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРУГОГО СЛОЯ

ЗАХАРОВ Д. Д.

Получены соотношения обобщенной ортогональности для нормальных волн в слое. Исследовано распространение энергии. Доказано, что теорема Леонтовича — Лайтхилла выполняется лишь асимптотически. Приведены основные свойства, позволяющие строить разложения по нормальным волнам, и указаны классы задач, допускающих точное и приближенное решение.

Результаты обобщают известные утверждения об однородных решениях в статических и динамических задачах для бесконечных цилиндров и полос [1–6].

1. Пусть упругая среда занимает объем $\{0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\theta<2\pi,\ -1\leqslant z\leqslant 1\}$, r, θ, z — цилиндрические координаты. Рассмотрим перемещения вида $\mathbf{u}=\mathbf{u}(r,\ \theta,\ z)\exp(i\omega t)$ (t — время), удовлетворяющие уравнениям линейной теории упругости в отсутствие массовых сил, а также граничным условиям следующих типов:

$$z=\pm1:\ \sigma_{zz}=\sigma_{rz}=\sigma_{\theta z}=0 \tag{1.1}$$

$$z=\pm1:\ \mathbf{u}=0 \tag{1.2}$$

$$z=1:\ \sigma_{zz}=\sigma_{rz}=\sigma_{\theta z}=0;\ z=-1:\ \mathbf{u}=0 \tag{1.3}$$

Действуя методом разделения переменных [7], получим в общем виде компоненты $\mathbf{u}$ (множитель $\exp(i\omega t)$ опущен) в тригонометрическом ряду Фурье по координате θ для перемещений:

$$u_r=\left[-u(z)B'_n(sr)+w(z)\frac{n}{sr}B_n(sr)\right]\left\{\begin{matrix}\cos\theta n\\ -\sin\theta n\end{matrix}\right\} \tag{1.4}$$

$$u_\theta=\left[u(z)\frac{n}{sr}B_n(sr)-w(z)B_n'(sr)\right]\left\{\begin{matrix}\sin\theta n\\ \cos\theta n\end{matrix}\right\}$$

$$u_z=v(z)B_n(sr)\left\{\begin{matrix}\cos\theta n\\ -\sin\theta n\end{matrix}\right\}\qquad(n=0,1,2,\dots)$$

где штрих означает производную по соответствующему аргументу, s — волновое число, B_n — любую цилиндрическую функцию порядка n. Соответствующие (1.4) компоненты тензора напряжений принимают вид:

$$\sigma_{rr}=\left[\chi B_n(sr)-\frac{u}{r}\left((n+1)B_{n+1}(sr)+(n-1)B_{n-1}(sr)\right)-\right. \tag{1.5}$$

$$\left.-\frac{sw}{2}\left(B_{n+2}(sr)-B_{n-2}(sr)\right)\right]\left\{\begin{matrix}\cos\theta n\\ -\sin\theta n\end{matrix}\right\}$$

$$\sigma_{r\theta}=\left[\frac{su}{2}\left(B_{n-2}(sr)-B_{n+2}(sr)\right)-\frac{sw}{2}\left(B_{n+2}(sr)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_{n-2}(sr)\right)\right]\left\{\begin{matrix}\sin\theta n\\ \cos\theta n\end{matrix}\right\}$$

$$\sigma_{rz}=\left[-\tau B_n'(sr)+w'\frac{n}{sr}B_n(sr)\right]\left\{\begin{matrix}\cos\theta n\\ -\sin\theta n\end{matrix}\right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\left[pB_n(sr)+\frac{su}{2}(B_{n+2}(sr)+B_{n-2}(sr))+\right.$$
$$\left.+\frac{sw}{2}(B_{n+2}(sr)-B_{n-2}(sr))\right]\left\{\begin{matrix}\cos\theta n\\ -\sin\theta n\end{matrix}\right\}$$

$$\sigma_{\theta z}=\left[\tau\frac{n}{sr}B_n(sr)-w'B_n'(sr)\right]\left\{\begin{matrix}\sin\theta n\\ \cos\theta n\end{matrix}\right\}$$

$$\sigma_{zz}=\sigma B_n(sr)\left\{\begin{matrix}\cos\theta n\\ -\sin\theta n\end{matrix}\right\}$$

Здесь введены обозначения: $\chi=\beta v'+\alpha su$, $p=\beta v'+\gamma su$, $\tau=u'-sv$, $\sigma=\alpha v'+\beta su$, $\gamma=(1-2\nu)^{-1}$, $\beta=\gamma-1$, $\alpha=\gamma+1$, ν — коэффициент Пуассона и на модуль сдвига произведено нормирование.

Система уравнений для u, w, v, как и следует ожидать, аналогична системе уравнений задачи о динамике полосы (w — для антиплоской постановки). Таким образом, при всяком n можно отделить самосопряженную задачу A об отыскании спектра для w (что при $n=0$ соответствует осесимметричной задаче о кручении слоя) и несамосопряженную задачу B о спектре функций u, v [2, 4, 5] ($k_2=\omega/c_2$, c_2 — скорость волны сдвига):

A: $w''+(k_2^2-s^2)w=0$

B: $u''+(k_2^2-\alpha s^2)u-\gamma sv'=0$

$$\alpha v''+(k_2^2-s^2)v+\gamma su'=0$$

с граничными условиями (в силу (1.1)—(1.5)):

$$\sigma(\pm1=\tau(\pm1)=w'(\pm1)=0,\ u(\pm1)=v(\pm1)=w(\pm1)=0$$
$$\sigma(1)=\tau(1)=w'(1)=u(-1)=v(-1)=w(-1)=0$$

Спектры задач A, B обозначим $\{s_j\}_{A,B}$ соответственно. Спектр $\{s_j\}_A$ при всяком $\omega\in R$ состоит из конечного множества $s_j\in R$ и счетного множества мнимых s_j, расположенных симметрично относительно нуля. Спектр задачи B также состоит из счетного множества $s_l\in C$ с точкой сгущения на бесконечности и конечного набора вещественных и мнимых s_l, причем $s\in\{s_l\}_B$ означает, что $-s$, $\bar{s}$ (сопряженное), $-\bar{s}\in\{s_l\}_B$ [7, 8]. Отметим, что в случае (1.1) получается спектр для волн Рэлея — Лэмба.

При этом нормирующие множители в u, w, v могут быть выбраны так, чтобы функции обладали следующими свойствами:

$$s_l=-s_m:\ u_l=-u_m,\ v_l=v_m,\ w_l=w_m \tag{1.6}$$
$$s_l=-\bar{s}_m:\ u_l=\bar{u}_m,\ v_l=-\bar{v}_m$$

при мнимых s_l функция v_l вещественна, а u_l — мнимая, при вещественных s_l функции u_l, v_l вещественны. Пересечение $\{s_j\}_A$ и $\{s_l\}_B$, вообще говоря, пусто, т. е.

$$u\equiv0,\ v\equiv0\ \ (s\in\{s_j\}_A),\ w\equiv0\ (s\in\{s_l\}_B) \tag{1.7}$$

2. Независимо от индекса гармоники n для любой пары волновых чисел $s_l^2\neq s_m^2$ можно доказать следующие утверждения:

$$W_{lm}\equiv(\chi_l,u_m)-(\tau_m,v_l)=0,\qquad (f,g)=\int_{-1}^{1}fg\,dz \tag{2.1}$$

$$U_{lm}\equiv s_ls_m(v_l,\ v_m)+k_2^2(u_l,\ u_m)-(u_l',\ u_m')=0 \tag{2.2}$$
$$V_{lm}\equiv s_ls_m(u_l,u_m)+k_1^2(v_l,v_m)-(v_l',\ v_m')=0$$

где $k_1=\omega/c_1$, c_1 — скорость волны дилатации (при $n=0$ последнее соотношение приведено в [5]):

$$(w_l, w_m)=0, \ (w_l', w_m')=0 \tag{2.3}$$

Равенства (2.1)—(2.3) могут быть выведены различными способами: непосредственно из уравнений [5] либо с помощью теоремы взаимности [3, 6], либо асимптотическими рассуждениями ($r\to\infty$). Они являются обобщениями аналогичных соотношений для плоской динамической задачи и плоской и осесимметричной статической задач [1—6].

В силу (1.7) естественно назвать (2.3) и (2.1), (2.2) А- и В-соотношениями ортогональности для А- и В-систем собственных функций (1.4) соответственно.

Для задачи В независимыми равенствами, содержащими первые производные компонент перемещений, будут (2.1) либо (2.2). Число соотношений одинаково, так как (2.1) несимметрично по перестановке индексов, прочие возможные соотношения являются их линейными комбинациями. Так, например, дополнительными В-соотношениями являются:

$$(\alpha p_l-\beta v_l', u_m)-\gamma(\tau_m, v_l)=0 \tag{2.4}$$

$$(\varkappa d_l-2v_l', u_m)-(\tau_m, v_l)=0$$

$$d_l=2(1+\nu)(p_l+v_l')/3, \ \varkappa=3(1-\nu)[2(1+\nu)]^{-1}$$

Можно указать также совместное АВ-соотношение:

$$(p_l, w_m)-(v_l, w_m')+(s_l^2-s_m^2)(u_l, u_m)/s_m=0 \tag{2.5}$$

На частотах с кратными собственными значениями s имеет место замечание 2 работы [5], т. е. в некотором смысле соотношения сохраняются с привлечением присоединенных функций.

3. Рассмотрим теперь процесс переноса энергии волной $\mathbf{u}$, который будем характеризовать вектором плотности потока мощности $\mathbf{P}=(P_r, P_\theta, P_z)$, где $P_l(\mathbf{u})=\sum_j \operatorname{Re}\sigma_{lj}\operatorname{Re}u_j$ [7], а также осреднением P_r^* по периоду и цилиндрической поверхности $\Omega=\{r=r_0, 0\leqslant\theta<2\pi, -1\leqslant z\leqslant 1\}$:

$$f^*=(f)^*=\frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega f\,d\Omega\,dt, \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

Можно показать, что средний поток P_r^* сохраняет ряд свойств, присущих потоку плоских волн [5]. В случае базисных радиальных функций Ханкеля ($B_n=H_n^{(1,2)}(sr)$) имеют место утверждения:

$$P_r^*(\mathbf{u}_l+\mathbf{u}_m)=P_r^*(\mathbf{u}_l)+P_r^*(\mathbf{u}_m) \tag{3.1}$$

$$P_r^*(\mathbf{u}_l)=0 \ (\operatorname{Re}s_l=0) \tag{3.2}$$

Равенство (3.1) выражает полную аддитивность потока мощности, причем $\mathbf{u}_l$, $\mathbf{u}_m$ могут принадлежать А и В системам собственных функций (1.4) порознь. Доказательство следует из формул (2.1)—(2.5), которые можно трактовать как равенство нулю перекрестных потоков. Как следует из (3.2), волны с мнимыми s_l не переносят энергии.

Для распространяющихся волн с вещественными s_l в отличие от [5] поток мощности оказывается следующим:

$$A\colon P_r^*(\mathbf{u}_l)=-\varepsilon_n\pi r_0 s_l\omega|w_l|^2\operatorname{Re}[i\bar{B}_n'(s_lr_0)B_n(s_lr_0)/2] \tag{3.3}$$

$$B\colon P_r^*(\mathbf{u}_l)=\varepsilon_n\pi r_0\omega W_{ll}\operatorname{Re}[i\bar{B}_n'(s_lr_0)B_n(s_lr_0)/2]$$

$$\varepsilon_0=2, \ \varepsilon_n=1 \ (n\geqslant 1)$$

Переходя при $r_0\to\infty$ к асимптотическим рядам для функций Ханкеля, получим из (3.3) простые асимптотические формулы

$$A\colon P_r^*(\mathbf{u}_l)=\mp\varepsilon_n\omega|w_l|^2(1+O(r_0^{-4})) \qquad (3.4)$$

$$B\colon P_r^*(\mathbf{u}_l)=\mp\varepsilon_n c_p^l W_{ll}(1+O(r_0^{-4}))$$

где $c_p^l=\omega/s_l$ — фазовая скорость, знаки минус и плюс соответствуют функциям Ханкеля первого и второго рода.

Для бегущих волн в полосе и цилиндре выполняется теорема Леонтовича — Лайтхилла [5, 9, 10], связывающая средний поток мощности с объемной плотностью энергии и групповой скоростью. В нашем случае это утверждение выполняется асимптотически.

Теорема: Пусть $\mathbf{u}_l$ принадлежит A или B системам собственных функций (1.4) и отвечает вещественному волновому числу s_l на регулярной частоте ω_0, т. е. $c_g^l\equiv d\omega(s_l)/ds\neq 0$. Тогда при $r_0\to\infty$ справедливо равенство (ε_{mj} — компоненты тензора деформации):

$$P_r^*(\mathbf{u}_l)=\mp c_g^l E^*(\mathbf{u}_l)+O(r_0^{-2}) \qquad (3.5)$$

где $E(\mathbf{u})=\left(\rho\sum_j|\operatorname{Re}u_j^\cdot|^2+\sum_{m,j}\operatorname{Re}\sigma_{mj}\operatorname{Re}\varepsilon_{mj}\right)\Big/2$, ρ — плотность материала.

Для доказательства воспользуемся законом сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\partial E/\partial t+\operatorname{div}\mathbf{P}=0 \quad \text{или} \quad \partial E/\partial t+D_rP_r+\operatorname{div}\mathbf{P}_0=0$$

$$D_rP_r=\partial(rP_r)/r\partial r,\quad \mathbf{P}_0=(0,\ P_\theta,\ P_z)$$

Интегрирование по поверхности Ω с применением теоремы Стокса приводит к выражению

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial E}{\partial t}+D_rP_r\right)d\Omega=\left\{\oint_{\Gamma_1}+\oint_{\Gamma_2}\right\}\sum_j\operatorname{Re}q_j\operatorname{Re}\frac{\partial u_j}{\partial t}\,d\Gamma \qquad (3.6)$$

где Γ_1 и Γ_2 — следы Ω на лицевых поверхностях слоя, q_j — компоненты вектора давления. В силу граничных условий правая часть равенства (3.6) есть нуль.

Далее придадим частоте ω_0 малую вариацию: $\omega=\omega_0+i\delta\omega$, $s=s_l+i\delta s$, $\delta s=\delta\omega/c_g^l$, $\delta\omega$ — вещественно, i — мнимая единица. Тогда в составляющих энергию E слагаемых вида $|\operatorname{Re}u_j^\cdot|^2=(u_j^{\cdot 2}+\bar{u}_j^{\cdot 2}+2|u_j^\cdot|^2)/4$ будут содержаться множители $\exp(2i\omega t)$, $\exp(-2i\omega t)$, $\exp(-2t\delta\omega)$, и, полагая $\mathbf{u}=\mathbf{u}_l+i\delta\mathbf{u}$ (так как $\mathbf{u}$ есть гладкая функция от s, за исключением, быть может, некоторых точек, то $\delta\mathbf{u}=\delta s d\mathbf{u}/ds|_{s=s_l}$), получим:

$$(u_j^{\cdot 2}+\bar{u}_j^{\cdot 2})/4=(u_{lj}^2\delta^2\omega-\omega_0^2u_{lj}^2+\omega_0^2\delta^2u_j-\delta^2\omega\delta^2u_j+4\omega_0u_{lj}\delta\omega\delta u_j)/2$$

Осреднение по периоду T_0 уничтожит первое слагаемое, поделив на δs и полагая $\delta s\to 0$ ($\delta\omega\to 0$), убеждаемся, что вклад в E^* дает лишь слагаемое $|u_j^\cdot|^2/2$. Аналогично ведут себя и прочие компоненты энергии. Отсюда легко видеть, что

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\int_\Omega\frac{\partial E}{\partial t}\,d\Omega\,dt=-2\delta\omega E^*+O(\delta^2\omega)$$

Осредненный по периоду поток мощности также будет определяться суммой вида

$$-\frac{1}{4}\sum_j(\bar{\sigma}_{rj}u_j^\cdot+\sigma_{rj}\bar{u}_j^\cdot)=\begin{cases}-{}^1/_2|w|^2\operatorname{Re}[is\omega\bar{B}_n'(sr_0)B_n(sr_0)] & \text{(A)}\\ -{}^1/_2\operatorname{Re}[i\omega W\bar{B}_n'(sr_0)B_n(sr_0)] & \text{(B)}\end{cases}$$

После применения оператора D_r, осреднения и сокращения на $2\delta s$ из (3.6) следует:

$$(\partial E/\partial t+D_rP_r)^*/(2\delta s)=-c_g^lE^*+O(\delta s)\mp\pi\varepsilon_nr_0Q$$

$$Q=\begin{cases} {}^1\!/_4|w|^2[b(s_l\omega_0-c_g{}^l\,\delta s)+s_l a\,\mathrm{d}(s\omega)/ds|_{(s_l,\omega_0)}] & \text{(A)}\\ {}^1\!/_4[b(\omega_0 W_{ll}-\delta s\,\delta W)+s_l a\,\mathrm{d}(\omega W)/ds|_{(s_l,\omega_0)}] & \text{(B)},\end{cases}$$

$$a=|B_n'(sr_0)|^2+[(n/sr_0)^2-1]|B_n(sr_0)|^2$$

$$b=|B_n'(sr_0)|^2+[(n/sr_0)^2+1]|B_n(sr_0)|^2$$

Отсюда, переходя к пределу при $\delta s\to 0$ ($\delta\omega\to 0$) и асимптотическим рядам для $B_n(s_l r_0)$ при $r_0\to\infty$, получаем утверждение (3.5). При этом первый член в асимптотических разложениях $P_r{}^*$ и $[(2\delta s)^{-1}D_r P_r]^*$ одинаков (для $\delta s=0$), а в последующих есть различие.

Асимптотический характер теоремы можно объяснить тем, что процесс переноса энергии устанавливается с ростом r, тогда появляется аналогия с плоской волной. Убывающую при этом невязку можно сопоставить с исчезающим в бесконечности потоком отдельно взятой неоднородной волны.

Свойства (3.1)—(3.5) позволяют однозначно отбирать волны с вещественными s_l (в соответствии с принципом излучения) и чисто мнимыми s_l (исключая рост на бесконечности) при построении разложений. Для $s_l\in C$ в задаче В средний поток мощности вообще говоря, ненулевой, но при некоторой нормировке $P_r{}^*(\mathbf{u}(s_l)+\mathbf{u}(-\bar{s}_l))=0$, т. е. такие волны следует объединять в стоячие с исключением зависимости потока от r.

4. Из (2.1)—(2.2) следуют В-соотношения ортогональности в полных перемещениях и напряжениях в двух основных вариантах (верхний индекс соответствует волновым числам):

$$(\beta\partial u_z{}^l/\partial z-\alpha(\sigma_{rr}{}^l+\sigma_{\theta\theta}{}^l)/2,\ u_r{}^m)+\gamma(\sigma_{zr}{}^m,\ u_z{}^l)=0\quad (s_l{}^2\neq s_m{}^2)\qquad (4.1)$$

$$(2\partial u_z{}^l/\partial z-\varkappa(\sigma_{rr}{}^l+\sigma_{\theta\theta}{}^l+\sigma_{zz}{}^l)/3,\ u_r{}^m)+(\sigma_{rz}{}^m,\ u_z{}^l)=0$$

$$(\beta\partial u_z{}^l/\partial z-\alpha(\sigma_{rr}{}^l+\sigma_{\theta\theta}{}^l)/2,\ \mp u_r{}^m+\partial u_\theta{}^m/n\partial\theta)+$$
$$+\gamma(\mp\sigma_{rz}{}^m+\partial\sigma_{\theta z}{}^m/n\partial\theta,\ u_z{}^l)=0\qquad (4.2)$$

$$(2\partial u_z{}^l/\partial z-\varkappa(\sigma_{rr}{}^l+\sigma_{\theta\theta}{}^l+\sigma_{zz}{}^l)/3,\ \mp u_r{}^m+\partial u_\theta{}^m/n\partial\theta)+$$
$$+(\mp\sigma_{rz}{}^m+\partial\sigma_{\theta z}{}^m/n\partial\theta,\ u_z{}^l)=0$$

Для А-системы собственных функций (4.1) выполняется тождественно, так как кручение не влияет на дилатацию и u_z.

В сочетании с (2.1)—(2.3) они позволяют находить коэффициенты в разложении по волнам $\mathbf{u}=\Sigma M_l\mathbf{u}_l$ при решении несмешанных краевых задач для слоя с вырезом Ω_0 ($r=r_0$) и диска либо диска с вырезом $r_1\leqslant r\leqslant r_2$ ($\Omega_{1,2}:r=r_{1,2}$).

Коэффициенты можно найти и в смешанных трехмерных задачах типа нагруженной круговой щели в слое, применяя метод сшивания решений [11].

Ниже приводится анализ и классификация подобных краевых задач по степени сложности и точности определения неизвестных (замкнутое выражение или сведение к бесконечномерной линейной системе уравнений).

5. В осесимметричной постановке ($n=0$) коэффициенты определяются точно в следующих двух ситуациях:

Осесимметричная задач А (кручение). Любое из граничных условий $\eta=\sigma_{r\theta}$, $w=u_\theta$, $\xi=\sigma_{\theta z}$ на $\Omega_0(\Omega_{1,2})$ всегда позволяет найти решение вследствие самосопряженности задачи А. Последний тип условия, видимо, физически не реален, но может использоваться при сшивании решений.

Осесимметричная задача В. Решение выписывается точно при задании любой пары условий $\tau=\sigma_{rz}$, $u=u_r$; $p=(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})/2$, $v=u_z$; $d=(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz})/3$, v. Так, для первой пары в слое с вырезом получаем из (2.1):

$$M_l=\frac{f(\tau,u,\chi_l,v_l)}{B_n'(s_l r_0)},\qquad f(\tau,u,\chi_l,v_l)\equiv\frac{(\tau,v_l)-(\chi_l,u)}{W_{ll}}\qquad (5.1)$$

с базисными функциями Ханкеля второго рода и половиной спектра $\{s_l\in C:\mathrm{Im}\,s_l<0,\ s_l\in R:c_g{}^l>0\}$.

Для конечного диска следует выбрать функции Бесселя J_n (исключается особенность при $r=0$). Волны оказываются стоячими, и объединение $M_l^+\mathbf{u}(s_l)$ и $M_l^-\mathbf{u}(-s_l)$ в силу свойств J_n сводится к группировке констант. Они определяются также из (5.1) на половине спектра.

Для диска с вырезом базисную систему следует составлять из стоячих волн с функциями Бесселя и Неймана N_n. Спектр при этом также сокращается наполовину и константы M_l^J, M_l^N определяются из системы второго порядка:

$$M_l^J=\Delta_l^J/\Delta_l,\quad M_l^N=\Delta_l^N/\Delta_l \tag{5.2}$$

$$\Delta_l=J_n'(s_lr_1)N_n'(s_lr_2)-J_n'(s_lr_2)N_n'(s_lr_1)$$

$$\Delta_l^J=y_{1l}N_n'(s_lr_2)-y_{2l}N_n'(s_lr_1),\quad \Delta_l^N=y_{2l}J_n'(s_lr_1)-y_{1l}J_n'(s_lr_2)$$

$$y_{1l}=f(\tau_1,u_1,\chi_l,v_l),\quad y_{2l}=f(\tau_2,u_2,\chi_l,v_l)$$

Для p, v- и d, v-функций следует положить согласно (2.4):

$$f(p,v,\tau_l,u_l)\equiv[(\alpha p-\beta\partial v/\partial z,u_l)-\gamma(\tau_l,v)][(\alpha p_l-\beta v_l',u_l)-\gamma(\tau_l,v_l)]^{-1} \tag{5.3}$$

$$f(d,v,\tau_l,u_l)\equiv[(\varkappa d-2\partial v/\partial z,u_l)-(\tau_l,v)][(\varkappa d_l-2v_l',u_l)-(\tau_l,v_l)]^{-1}$$

Задание других краевых условий приводит к бесконечномерным системам. Перекрестное условие $\chi\equiv\sigma_{rr}$, v также не улучшает положения в отличие от плоской задачи [5]. В этом случае получим в слое с вырезом такую систему:

$$M_l=\left[f(\tau_l,u_l,\chi,v)+\sum_j M_j(u_j,u_l)X_n(s_jr_0)/W_{ll}\right]\Big/B_n(s_lr_0)$$

$$X_n(s_jr_0)\equiv[(n+1)B_{n+1}(s_jr_0)+(n-1)B_{n-1}(s_jr_0)]/r_0$$

где функция f взята из (5.1). Аналогичные системы уравнений появляются при рассмотрении условий χ, τ; u, v и принцип их построения сохраняется для конечного диска и диска с вырезом. При $n\geqslant1$ А и В системы собственных функций оказываются связанными краевыми условиями. Однако для некоторых краевых задач можно точно определить коэффициенты M_j^A, M_l^B при соответствующих собственных функциях, полагая заданными n-е члены разложения граничных функций в тригонометрические ряды (далее индекс n опущен).

Так, задавая на Ω_0 функции p, v либо d, v определим $\{M_l^B\}$ из (5.1) и (5.3). Используя третье условие w, получим:

$$M_j^A=\left[\sum_l M_l^B(u_l,w_j)\frac{n}{s_jr_0}B_n(s_lr_0)-(w,w_j)\right][(w_j,w_j)B_n'(s_jr_0)]^{-1}$$

Аналогичные формулы будут выполнятся при задании любого другого третьего условия, кроме σ_{zz}.

Отметим, что гипотетическими p, v- и d, v-граничными условиями (с дополнительной третьей функцией при $n\geqslant1$) удобно пользоваться в методе сшивания решений. Рассматривая слой с плоской круговой нагруженной щелью или задачу о дифракции на щели, можно строить разложения по собственным функциям в разных зонах: слое с вырезом и цилиндрических зонах над и под щелью. На общих границах зон решения должны сопрягаться непрерывно, т. е. применение названных граничных условий оправдано. Системы уравнений при этом значительно упрощаются.

Следующий тип краевых задач позволяет сделать диагональными А или В блоки (составленные из коэффициентов при $\{M_l^{A,B}\}$) матрицы системы уравнений. Прикладывая τ, u на Ω_0 и применяя (2.1), получим систему:

$$(\tau,v_l)-(\chi_l,u)=M_l^BW_{ll}B_n'(s_lr_0)+\sum_j M_j^A[(w_j',v_l)-(\omega_j,\chi_l)]\frac{n}{s_jr_0}B_n(s_jr_0)$$

Используя (2.3) и произвольное третье условие, диагонализуем другой блок; например, для w имеем:

$$(u+w, w_j)=\sum_l M_l^B(u_l, w_j)B_{n+1}(s_l r_0)+M_j^A(w_j, w_j)B_{n+1}(s_j r_0)$$

Остальные варианты физически реальных граничных условий приводят к линейным системам с заполненным блоком В.

Получаемые во всех случаях бесконечные системы относятся к условно сходящимся (элементы матриц убывают по степенному закону с ростом номеров). Поэтому решение может быть неединственным без **задания асимптотического** поведения M_j^A, M_l^B. Определить его можно, исходя из установленной асимптотики решения в особых (угловых) точках областей. В этом проявляется аналогия с известными, более простыми системами для собственных электромагнитных волн [11].

Видимо, можно предположить, что А система собственных функций (1.4) двухкратно полна, а В система (с базовыми функциями Ханкеля) обладает четырехкратной полнотой в соответствующем пространстве L_2, подобно системам собственных функций в плоских и цилиндрических волноводах [8, 12–15].

Автор выражает благодарность И. В. Симонову за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нуллер Б. М.* О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 376–382.
2. *Бобровницкий Ю. И.* Соотношения ортогональности для волн Лэмба // Акуст. журн. 1972. Т. 18. Вып. 4. С. 513–515.
3. *Федорюк М. В.* Соотношения типа ортогональности в твердых волноводах // Акуст. журн. 1974. Т. 20. Вып. 2. С. 310–314.
4. *Prakash B. G.* Generalized orthogonality relations for rectangular strips in elastodynamics // Mec. Res. Com. 1978. V. 5. No. 4. P. 251–255.
5. *Зильберглейт А. С., Нуллер Б. М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. Вып. 2. С. 333–335.
6. *Слепян Л. И.* Теорема Бетти и соотношения ортогональности для собственных функций // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 83–87.
7. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка. 1981. 284 с.
8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. *Lighthill M. J.* Group velocity // J. Inst. Math. Appl. 1965. V. 1. No. 1. P. 1–28.
10. *Biot M. A.* General theorems of the equivalence of group velocity and energy transport // Phys. Rev. 1957. V. 105. No. 4. P. 1129–1137.
11. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 328 с.
12. *Ворович И. И.* Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–829.
13. *Костюченко А. Г., Образов М. Б.* О некоторых свойствах корней самосопряженного квадратичного операторного пучка // Функц. анализ. 1975. Т. 9. Вып. 4. С. 28–40.
14. *Образов М. Б.* О полноте собственных и присоединенных векторов самосопряженного квадратичного пучка // Функ. анализ. 1976. Т. 10. Вып. 2. С. 82–83.
15. *Костюченко А. Г., Образов М. Б.* О полноте корневых векторов некоторых самосопряженных квадратичных пучков // Функц. анализ. 1977. Т. 11. Вып. 4. С. 85–87.

Москва

Поступила в редакцию
31.V.1988