МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1988

УДК 531.2

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

Рассматривается задача равновесия твердого тела на шероховатой плоскости при наличии сил сухого трения. Вводится понятие условий гарантированного равновесия, обеспечивающих равновесие при любом распределении нормальных реакций в статически неопределимом случае. Доказан ряд утверждений, относящихся к условиям гарантированного равновесия. Формулируется задача на экстремум, решение которой позволяет найти эти условия. Рассмотрены примеры, в которых определены условия равновесия при опоре тела на две точки, на точку и отрезок, на окружность, на четыре точки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим абсолютно твердое тело, которое контактирует с неподвижной шероховатой плоскостью. Введем декартову систему координат $0xyz$ так, чтобы плоскость xy совпадала с шероховатой плоскостью, а тело находилось в области $z\geqslant 0$. Плоское множество точек контакта тела с плоскостью обозначим через D, а радиус-вектор и координаты точек контакта $A_i\in D$ — через $\mathbf{r}_i(x_i, y_i, 0)$. Для определенности считаем, что число точек контакта конечно и равно n, и суммирование всюду в дальнейшем проводим по $i=1,\ldots, n$. В случае целой области контакта суммы следует заменить интегралами по D.

На тело действуют внешние активные силы и силы реакции плоскости. Главный вектор активных сил и их главный момент относительно точки 0 считаем заданными и обозначаем через $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$ соответственно. Нормальные и касательные реакции в точках контакта A_i обозначим соответственно через $N_i\mathbf{k}$ и $\mathbf{F}_i$, где $N_i\geqslant 0$, $\mathbf{k}$ — орт оси z. Предполагаем, что сила сухого трения $\mathbf{F}_i$ подчиняется закону Кулона, т. е.

$$|\mathbf{F}_i|\leqslant fN_i, \quad N_i\geqslant 0 \quad (i=1,\ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь постоянная $f>0$ — коэффициент трения.

Условия равновесия тела под действием приложенных сил имеют вид

$$\mathbf{R}+\mathbf{k}\sum N_i+\Sigma\mathbf{F}_i=0, \qquad \mathbf{M}_0+\sum \mathbf{r}_i\times(N_i\mathbf{k}+\mathbf{F}_i)=0$$

Спроектируем эти уравнения на оси координат, обозначая через X_i, Y_i проекции силы трения $\mathbf{F}_i$ на оси x, y соответственно, а через R_x, R_y, R_z и M_x, M_y, M_z — проекции на оси x, y, z векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_0$. Полученные скалярные уравнения вместе с неравенствами (1.1) разобьем на две группы

$$\sum N_i=-R_z, \qquad \sum x_iN_i=M_y$$
$$\sum y_iN_i=-M_x, \qquad N_i\geqslant 0 \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

$$\sum X_i=-R_x, \qquad \sum Y_i=-R_y, \qquad \sum(x_iY_i-y_iX_i)=-M_z \tag{1.3}$$
$$X_i^2+Y_i^2\leqslant f^2N_i^2 \qquad (i=1,\ldots, n)$$

В соотношения (1.2) входят только нормальные реакции, а в (1.3) — касательные, а также (в неравенства) нормальные реакции.

Поставим задачу: указать условия на $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$, при которых тело будет находиться в равновесии на плоскости. Другими словами, требуется указать, при каких $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$ существуют реакции N_i, X_i, Y_i, удовлетворяющие всем соотношениям (1.2), (1.3).

2. Нормальные реакции. Рассмотрим сначала группу условий (1.2). Из (1.2) следует $R_z \leqslant 0$. Предположим сначала, что $R_z=0$. Тогда, согласно (1.2), имеем $N_i=0$ при всех $i=1,\ldots,n$. При этом из (1.3) получим $X_i=Y_i=0$ при $i=1,\ldots,n$. В этом случае соотношения (1.2), (1.3) дают $M_x=M_y=M_z=0$, $R_x=R_y=0$. Итак, при $R_z=0$ равновесие возможно лишь при $\mathbf{R}=0$, $\mathbf{M}_0=0$. В этом случае тело не взаимодействует с плоскостью xy. В дальнейшем предполагаем $R_z<0$.

Обозначим через K точку с радиусом-вектором $\mathbf{r}^*(x^*, y^*, 0)$, относительно которой x, y — компоненты момента активных сил $\mathbf{M}K=\mathbf{M}_0-\mathbf{r}^*\times\mathbf{R}$ равны нулю. Отсюда находим

$$x^*=-M_yR_z^{-1}, \quad y^*=M_xR_z^{-1}, \quad R_z<0 \tag{2.1}$$

С учетом равенств (2.1) соотношениям (1.2) можно придать вид

$$\sum N_i\mathbf{r}_i=-R_z\mathbf{r}^*, \qquad \sum N_i=-R_z>0, \qquad N_i\geqslant 0 \ (i=1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

При любых N_i, удовлетворяющих (2.2), точка K лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{co} D$ области D. Обратно, для любой точки $K\in\operatorname{co} D$ найдутся N_i, удовлетворяющие условиям (2.2). Следовательно, условия равновесия (1.2) при $R_z<0$ эквивалентны условиям

$$K(x^*, y^*)\in\operatorname{co} D, \quad R_z<0 \tag{2.3}$$

где x^*, y^* определены формулами (2.1). Нарушение условий (2.3) приводит к опрокидыванию тела (отрыву от плоскости). Далее считаем условия (2.3) выполненными.

Нормальные реакции N_i однозначно определяются из условий (1.2) в случаях $n=1$, $n=2$, а также при $n=3$, если точки A_1, A_2, A_3 не лежат на одной прямой. В последнем случае определитель системы (1.2) для N_i не равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Перечисленные случаи являются статически определимыми. В остальных, статически неопределимых случаях, реакции N_i из соотношений (1.2) однозначно не определяются.

Нередко для анализа сил трения задаются той или иной дополнительной гипотезой, позволяющей все же определить нормальные реакции, например, учитывают деформацию тела или плоскости. При этом получаемый результат (распределение нормальных реакций) сильно зависит от жесткости различных элементов тела и опоры, а также от геометрических неидеальностей (погрешностей изготовления). В данной работе мы не будем пользоваться подобными предположениями для разрешения статической неопределимости.

3. Условия гарантированного равновесия. Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 1. Для равновесия тела при условиях (2.3) и при известных нормальных реакциях N_i необходимо и достаточно, чтобы нашлись силы X_i, Y_i, удовлетворяющие всем соотношениям (1.3).

В сформулированные условия входят реакции N_i, неизвестные в статически неопределимом случае. Поэтому представляется естественным следующее определение.

Определение. Будем говорить, что при заданных $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$ и множестве контакта D выполнены условия гарантированного равновесия, если выполнены условия (2.3) и для любых N_i, удовлетворяющих (1.2), имеет место равновесие.

Из приведенного определения и утверждения 1 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. Для выполнения условий гарантированного равновесия необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (2.3) и для любых N_i, удовлетворяющих (1.2), существовали X_i, Y_i, удовлетворяющие (1.3).

Поясним смысл рассматриваемых условий гарантированного равновесия. Эти условия ограничивают некоторую область Ω возможных внешних сил, в которой равновесие имеет место при любом раскрытии статической неопределимости, т. е. при любых зонах контакта, малых неидеальностях, упругой податливости тела и плоскости. Эти характеристики далеко не всегда известны, и для построения Ω они не нужны. Если же в конкретной задаче найдены нормальные реакции, т. е. статическая неопределимость снята благодаря известным конкретным зонам контакта и упругим характеристикам, то равновесие будет иметь место в более широкой области возможных внешних сил $\Omega' \supset \Omega$. В этом случае можно найти конкретные условия равновесия, менее жесткие, чем условия гарантированного равновесия. Отметим, что в данной работе не рассматриваются вопросы устойчивости равновесия тела.

Приведем несколько простых утверждений, позволяющих в ряде случаев делать вывод об удовлетворении условий гарантированного равновесия.

Утверждение 3. Пусть при некотором множестве D и векторах $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$ выполнены условия гарантированного равновесия. Тогда они выполнены также при том же D и при $\mathbf{R}'$, $\mathbf{M}_0'$, равных

$$\mathbf{R}' = (\mu R_x,\ \mu R_y,\ \lambda R_z) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{M}_0' = (\lambda M_x,\ \lambda M_y,\ \mu M_z),\quad \lambda \geqslant |\mu| > 0$$

Доказательство. Для сил (3.1) координаты (2.1) точки K будут теми же, что при заданных $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$. Поэтому для сил $\mathbf{R}'$, $\mathbf{M}_0'$ условия (2.3) выполнены, поскольку они выполнены для $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$. Поэтому существуют реакции N_i', удовлетворяющие условиям (1.2) для $\mathbf{R}'$, $\mathbf{M}_0'$. Тогда реакции $N_i = \lambda^{-1} N_i'$ удовлетворяют (1.2) при исходных $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$. Но для таких N_i, в силу условий гарантированного равновесия для $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$, существуют X_i, Y_i, удовлетворяющие (1.3) при $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$. Положим $X_i' = \mu X_i$, $Y_i' = \mu Y_i$. Эти силы будут удовлетворять равенствам (1.3) при $\mathbf{R}'$, $\mathbf{M}_0'$. Кроме того, будут выполнены неравенства $X_i'^2 + Y_i'^2 = \mu^2(X_i^2 + Y_i^2) \leqslant \mu^2 f^2 N_i^2 \leqslant \lambda^2 f^2 N_i^2 = f^2 N_i'^2$.

Таким образом, для любых N_i', удовлетворяющих (1.2) при $\mathbf{R}'$, $\mathbf{M}_0'$, указаны X_i', Y_i', удовлетворяющие (1.3) при $\mathbf{R}'$, $\mathbf{M}_0'$. Тем самым утверждение доказано.

Утверждение 4. Если при некоторых D, $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$ выполнены условия гарантированного равновесия, то они выполнены также и при произвольном $D' \subset D$, удовлетворяющем (2.3), и тех же $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$.

Доказательство. Пусть N_i' удовлетворяют условиям (1.2) для D'. Для множества D реакции N_i', при нулевых реакциях $N_j = 0$ в точках $A_j \in D \setminus D'$ (символ $\setminus$ означает вычитание множеств), также удовлетворяют условиям (1.2). Для этих N_i', $N_j = 0$ существуют X_i, Y_i, удовлетворяющие (1.3) для D, причем $X_j = Y_j = 0$ для $A_j \overline{\in} D'$. Эти силы трения удовлетворяют условиям (1.3) также и для D'. Утверждение доказано.

Утверждение 5. Если при множестве $D_0 = \{K\}$, состоящем из одной точки K с координатами (2.1), и некоторых $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$ выполнены условия гарантированного равновесия, то они выполнены также при произвольном D, $K \in \operatorname{co} D$, и при тех же $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$.

Доказательство. Для множества D_0, состоящего из единственной точки K с координатами (2.1), получим из (1.2), (1.3):

$$N = -R_z,\quad X = -R_x,\quad Y = -R_y$$

$$M_z = (XM_x + YM_y) R_z^{-1} = -(R_x M_x + R_y M_y) R_z^{-1}, \tag{3.2}$$

$$X^2 + Y^2 = R_x^2 + R_y^2 \leqslant f^2 R_z^2$$

Возьмем для области D любые N_i, удовлетворяющие (1.2), и положим

$$X_i = N_i R_x R_z^{-1},\quad Y_i = N_i R_y R_z^{-1}\quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Подставим равенства (3.3) в условия (1.3) и воспользуемся соотношениями (1.2) для N_i и (3.2). Получим

$$\sum X_i = R_x \sum N_i R_z^{-1} = -R_x$$

$$\sum Y_i = R_y \sum N_i R_z^{-1} = -R_y$$

$$\sum (x_i Y_i - y_i X_i) = \left[R_y \left(\sum x_i N_i \right) - R_x \sum (y_i N_i) \right] R_z^{-1} = \\ = (R_y M_y + R_x M_x) R_z^{-1} = -M_z$$

$$X_i^2 + Y_i^2 = (R_x^2 + R_y^2) N_i^2 R_z^{-2} \leqslant f^2 N_i^2 \quad (i=1, \ldots, n)$$

Итак, силы (3.3) удовлетворяют условиям (1.3), что и доказывает утверждение.

Пусть D — некоторое множество в плоскости xy, $D' \subset D$ — его подмножество, $A \in \mathrm{co}\, D'$. Обозначим

$$D(A) = (D \setminus D') \cup A \tag{3.4}$$

Таким образом, $D(A)$ получено из D путем замены подмножества D' одной точкой из $\mathrm{co}\, D'$ — «представителем» D'.

Утверждение 6. Если при любых $A \in \mathrm{co}\, D'$ для множества $D(A)$ из (3.4) и некоторых $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$ выполнены условия гарантированного равновесия, то они выполнены также и для D, $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_0$.

Доказательство. Имеем в силу (3.4) включение $\mathrm{co}\, D(A) \subset \mathrm{co}\, D$. Следовательно, из условий (2.3) для $D(A)$ следуют эти же условия для D. Пусть N_i — произвольные реакции, удовлетворяющие (1.2) для D. Обозначим через A_j точки, принадлежащие D', а через A_k — точки из $D \setminus D'$. Определим точку A как центр параллельных сил N_j, т. е. условиями

$$\sum x_j N_j = x_A N_A, \qquad \sum y_j N_j = y_A N_A, \qquad N_A = \sum N_j \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Если $N_A > 0$, то соотношения (3.5) однозначно определяют точку $A \in \mathrm{co}\, D'$. При $N_A = 0$ имеем $N_j = 0$, и в качестве A берем любую точку из $\mathrm{co}\, D'$. Условия (1.2) для D с учетом (3.5) запишем в виде

$$\begin{gathered} N_A + \sum N_k = -R_z, \qquad x_A N_A + \sum x_k N_k = M_y \\ y_A N_A + \sum y_k N_k = -M_x, \qquad N_k \geqslant 0, \qquad N_A \geqslant 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Соотношения (3.6) представляют собой условия (1.2) для множества $D(A)$. Из условий гарантированного равновесия для $D(A)$ вытекает существование X_k, Y_k, X_A, Y_A таких, что выполнены условия (1.3) для $D(A)$

$$\begin{gathered} \sum X_k + X_A = -R_x, \qquad \sum Y_k + Y_A = -R_y \\ \sum (x_k Y_k - y_k X_k) + x_A Y_A - y_A X_A = -M_z \\ X_k^2 + Y_k^2 \leqslant f^2 N_k^2, \qquad X_A^2 + Y_A^2 \leqslant f^2 N_A^2 \end{gathered} \tag{3.7}$$

Построим теперь силы трения для множества D. В точках A_k возьмем те же X_k, Y_k, что фигурируют в (3.7), а в точках A_j положим при $N_A > 0$

$$X_j = \lambda_j X_A, \qquad Y_j = \lambda_j Y_A, \qquad \lambda_j = N_j N_A^{-1} \geqslant 0 \tag{3.8}$$

Проверим, что указанные силы трения удовлетворяют условиям (1.3) для D. Подставим их в (1.3) и воспользуемся соотношениями (3.7), (3.5). При $N_A > 0$ получим

$$\sum X_j + \sum X_k = \left(\sum N_j \right) X_A N_A^{-1} - R_x - X_A = -R_x$$

$$\sum Y_j+\sum Y_k=-R_y,\qquad \sum (x_jY_j-y_jX_j)+\sum (x_kY_k-y_kX_k)=$$
$$=\left(\sum x_jN_j\right)Y_AN_A^{-1}-\left(\sum y_jN_j\right)X_AN_A^{-1}-M_z-x_AY_A+y_AX_A=-M_z$$
$$X_j^2+Y_j^2=N_j^2(X_A^2+Y_A^2)N_A^{-2}\leqslant f^2N_j^2$$
$$X_k^2+Y_k^2\leqslant f^2N_k^2$$

Таким образом, при $N_A>0$ соотношения (1.3) удовлетворены. Если же $N_A=0$, то все $N_j=0$, и вместо (3.8) имеем $X_j=Y_j=0$. Соотношения (1.3) при этом сводятся к (3.7), причем $X_A=Y_A=0$. Утверждение доказано.

Утверждение 7. Пусть $R_z<0$, $K\in D$. Условия гарантированного равновесия выполнены в том и только в том случае, если $\mathbf{RM}_0=0$, $R_x^2+R_y^2\leqslant f^2R_z^2$.

Доказательство. Условие $K\in D$ означает, что K — одна из точек контакта, например $K=A_1$. Согласно (2.1) имеем

$$x_1=x^*=-M_yR_z^{-1},\qquad y_1=y^*=M_xR_z^{-1}\tag{3.9}$$

Отсюда следует, что соотношения (1.2) выполняются, если положить $N_1=-R_z$, $N_i=0$, $i\neq1$. При этом условия (1.3) примут вид

$$X_1=-R_x,\qquad Y_1=-R_y$$
$$x_1Y_1-y_1X_1=-M_z,\qquad X_1^2+Y_1^2\leqslant f^2R_z^2$$

Используя соотношения (3.9), приведем полученные условия к виду

$$R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z=0,\qquad R_x^2+R_y^2\leqslant f^2R_z^2\tag{3.10}$$

Если условия (3.10) не выполнены, то условия гарантированного равновесия, очевидно, нарушаются. Если же (3.10) выполняется, то условия гарантированного равновесия удовлетворены в случае опоры в одной точке K. Но тогда, согласно утверждению 5, они выполнены и для исходного множества D. Утверждение доказано.

4. Эквивалентная задача на экстремум. Проверку условий гарантированного равновесия можно свести к решению эквивалентной экстремальной задачи. Предположим, что условия (2.3) выполнены, т. е. тело не опрокидывается. Если оно также и не проскальзывает, то при вращении вокруг любого возможного мгновенного центра $C(x, y, 0)$ в плоскости xy момент активных сил не превышает момента, который может быть создан силами трения. Это условие имеет вид

$$M_z-xR_y+yR_x\leqslant\sum\rho_i|\mathbf{F}_i|\leqslant f\sum\rho_iN_i\tag{4.1}$$
$$\rho_i=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|=[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{1/2},\qquad \mathbf{r}=(x, y, 0)$$

В левой части неравенства (4.1) записан момент активных сил вокруг оси, проходящей через точку C параллельно оси z. Необходимое и достаточное условие отсутствия проскальзывания при известных N_i запишется в виде

$$\max_{x,y}|Q|\leqslant f\tag{4.2}$$
$$Q=(M_z-xR_y+yR_x)s^{-1},\qquad s=\sum\rho_iN_i$$

Здесь максимум ищется по всем x, y, включая бесконечно удаленную точку, отвечающую поступательному движению.

Если нормальные реакции известны, например, в случае $n\leqslant3$ или в результате дополнительных допущений, позволяющих снять статическую неопределимость, то проверка условий равновесия сводится к вычислению максимума и проверке неравенства (4.2).

Условия гарантированного равновесия будут выполнены, если помимо (2.3) выполнено условие (4.2) при всевозможных N_i, удовлетворяющих (1.2). Приходим к следующему утверждению.

Утверждение 8. Условия гарантированного равновесия при выполнении условий (2.3) эквивалентны неравенству

$$\max_{x,y,N_i}|Q|\leqslant f \tag{4.3}$$

где Q определено в (4.2), а максимум берется по всем x, y и по всем N_i, удовлетворяющим условиям (1.2).

С учетом обозначений (4.2) экстремальную задачу (4.3) можно записать в виде

$$\max_{x,y}[|M_z-xR_y+yR_x|(\min_{N_i}s)^{-1}]\leqslant f \tag{4.4}$$

Приведем некоторые утверждения, касающиеся задачи (4.3), (4.4).

Утверждение 9. Экстремум по N_i в (4.3), (4.4) при $n\geqslant 3$ достигается, если все реакции N_i равны нулю, кроме трех.

Доказательство. Задача о минимуме s, фигурирующая в (4.4), при N_i, удовлетворяющих (1.2), представляет собой задачу линейного программирования. Следовательно, искомый минимум s достигается в одной из вершин многогранника, определяемого ограничениями (1.2). Так как среди ограничений (1.2) содержатся три равенства, то в вершинах многогранника во всех неравенствах $N_i\geqslant 0$, кроме трех, достигается знак равенства. Утверждение доказано.

Отметим, что минимум может достигаться и при других N_i (на гранях различной размерности), но он заведомо достигается при опоре только на три точки контакта. Это соответствует статически определимому случаю.

Утверждение 10. При $R_x=R_y=0$, $M_z\neq 0$ функция $|Q|$ из (4.2) имеет единственную стационарную точку по x, y и притом строгий максимум, если только все точки контакта A_i с $N_i>0$ не лежат на одной прямой.

Доказательство. Вычислим при помощи равенств (4.2), (4.1) вторые производные

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\sum N_i[\rho_i^{-1}-\rho_i^{-3}(x-x_i)^2]=\sum N_i\rho_i^{-3}(y-y_i)^2>0\\ \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=\sum N_i\rho_i^{-3}(x-x_i)^2>0,\qquad \frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}=-\sum N_i\rho_i^{-3}(x-x_i)(y-y_i)\end{gathered} \tag{4.5}$$

Подсчитаем при помощи (4.5) выражение

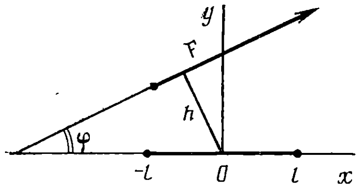
$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}\right)^2=\sum_{i,j}N_iN_j\rho_i^{-3}\rho_j^{-3}\times\\ \times[(x-x_i)^2(y-y_j)^2-(x-x_i)(y-y_i)(x-x_j)(y-y_j)]=\\ =\frac{1}{2}\sum_{i,j}N_iN_j\rho_i^{-3}\rho_j^{-3}[(x-x_i)(y-y_j)-(x-x_j)(y-y_i)]^2>0\end{gathered} \tag{4.6}$$

Из неравенств (4.5), (4.6) вытекает, что второй дифференциал d^2s по x, y строго положителен, если только не выполнены соотношения $(x-x_i)(y-y_i)^{-1}=(x-x_j)(y-y_j)^{-1}$ сразу для всех i, j, для которых $N_i>0$, $N_j>0$. Так как по условию все точки A_i, для которых $N_i>0$, не лежат на одной прямой, то эти соотношения не выполнены, и единственной стационарной точкой функции s по x, y является строгий минимум. При условиях $R_x=R_y=0$, $M_z\neq 0$ минимум s соответствует согласно (4.2) максимуму $|Q|$. Утверждение доказано.

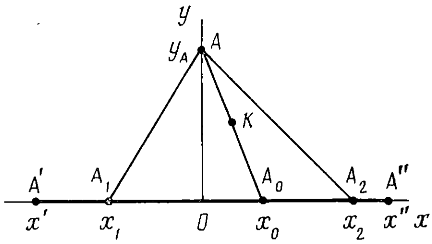
Перейдем к составлению и исследованию условий гарантированного равновесия в частных случаях.

5. Две точки опоры. Пусть тело опирается на две точки ($n=2$), расстояние между которыми равно $2l$. Поместим начало координат 0 в центре отрезка, соединяющего точки опоры, и направим ось x вдоль этого отрезка. Тогда имеем (фиг. 1):

$$x_1=-l,\quad x_2=l,\quad y_1=y_2=0 \tag{5.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Согласно условиям (2.3), точка K должна лежать в отрезке $[-l, l]$ оси x. Из (2.3), (2.1) получим

$$R_z<0, \quad M_x=0, \quad |\xi|\leqslant 1, \quad \xi=x^*l^{-1}=-M_yR_z^{-1}l^{-1} \tag{5.2}$$

Задача (1.2) при $n=2$ является статически определимой. С учетом (5.1), (5.2) получим

$$N_1=-{}^1/_2R_z(1-\xi), \quad N_2=-{}^1/_2R_z(1+\xi) \tag{5.3}$$

Запишем выражение (4.2) для Q, учитывая равенства (5.1), (5.3):

$$Q=\mu s^{-1}, \quad \mu=M_z-xR_y+yR_x \tag{5.4}$$

$$s=-{}^1/_2R_z[(1-\xi)\rho_1+(1+\xi)\rho_2], \quad \rho_{1,\,2}=[(x\pm l)^2+y^2]^{1/2}$$

Для нахождения экстремума Q по x, y приравняем нулю частные производные

$$Q_x={}^1/_2R_zs^{-2}[(1-\xi)\rho_1^{-1}B_1+(1+\xi)\rho_2^{-1}B_2]=0 \tag{5.5}$$

$$Q_y={}^1/_2R_zs^{-2}[(1-\xi)\rho_1^{-1}C_1+(1+\xi)\rho_2^{-1}C_2]=0$$

$$B_{1,\,2}=\mu(x\pm l)+R_x[(x\pm l)^2+y^2] \tag{5.6}$$

$$C_{1,\,2}=\mu y-R_x[(x\pm l)^2+y^2]$$

Так как ρ_1^{-1}, ρ_2^{-1} не равны нулю, то из (5.5) следует равенство нулю определителя $B_1C_2-B_2C_1=0$. Подставляя в это равенство выражения (5.6), (5.4), получим после упрощений линейное уравнение относительно y Разрешая его, найдем

$$y=R_x(l^2-x^2)(M_z+xR_y)^{-1} \tag{5.7}$$

Из второго уравнения (5.5) с использованием соотношений (5.4), (5.6), (5.7) имеем

$$\frac{(1+\xi)\rho_1}{(1-\xi)\rho_2}=\frac{(l+x)(M_z+R_yl)}{(l-x)(M_z-R_yl)} \quad (R_x\neq 0,\ |x|\neq l) \tag{5.8}$$

Это равенство верно и при $R_x=0$, в чем можно убедиться, используя вместо второго первое уравнение (5.5). Правая часть равенства (5.8), как и левая, неотрицательна, следовательно

$$(l^2-x^2)(M_z^2-R_y^2l^2)\geqslant 0 \tag{5.9}$$

Возводя в квадрат обе части равенства (5.8) при $|x|\neq l$ и подставляя выражения (5.4) для ρ_i и (5.7) для y, придем к квадратному уравнению для x

$$(R_x^2+R_y^2)x^2+2(M_zR_y+R_x^2l\theta)x+M_z^2+R_x^2l^2=0, \tag{5.10}$$

$$\theta=(\alpha^2+\beta^2)(2\alpha\beta)^{-1}, \quad \alpha=M_z-R_yl\xi, \quad \beta=R_yl-M_z\xi$$

Разрешая (5.10), получим

$$x^{(1),\,(2)}=(-M_zR_y-R_x^2l\theta\pm\Delta^{1/2})(R_x^2+R_y^2)^{-1} \tag{5.11}$$

$$\Delta={}^1/_4R_x^2(\alpha^2-\beta^2)^2\alpha^{-2}\beta^{-2}[R_x^2l^2+4\alpha\beta\xi(1-\xi^2)^{-2}]$$

В случае $|x|=l$ имеем $y=0$ согласно (5.7); при этом центр вращения совпадает с одной из точек опоры. По формулам (5.4) найдем

$$|Q|=|M_z\mp R_y l|[(1\mp\xi)(-R_z)l]^{-1}\quad (x=\pm l,\quad y=0) \tag{5.12}$$

Экстремум $|Q|$ по x, y может достигаться и на бесконечности, т. е. при $y=kx$, $|x|\to\infty$, где k — постоянная. При этом из (5.4) получим $|Q|=|kR_x-R_y|(1+k^2)^{-1/2}(-R_z)^{-1}$. Максимум по k последнего выражения равен

$$|Q|=-(R_x^2+R_y^2)^{1/2}R_z^{-1} \tag{5.13}$$

и соответствует поступательному движению.

Таким образом, максимум $|Q|$ по x, y достигается либо при $x=x^{(1),(2)}$, $y=y^{(1),(2)}$, определяемых формулами (5.11), (5.7), либо при $x=\pm l$, $y=0$, либо на бесконечности.

С учетом равенств (5.12), (5.13) имеем

$$\begin{gathered}\max_{x,y}|Q|=(-R_z)^{-1}\max\{|M_z-R_y l|(1-\xi)^{-1}l^{-1},\\ |M_z+R_y l|(1+\xi)^{-1}l^{-1},\quad (R_x^2+R_y^2)^{1/2},\ q(x^{(1)}),\ q(x^{(2)})\}\end{gathered} \tag{5.14}$$

Здесь $q(x)=-R_z|Q|$, причем переменная y в (5.4) исключена при помощи равенства (5.7). В результате вычислений, используя также соотношения (5.8), (5.10), получим

$$\begin{gathered}q(x)=4|R_x^{-1}[M_x^2+R_x^2l^2+(M_zR_y+R_x^2l\theta)x][(1+\xi)^2(x-l)(M_z-R_yl)-\\ -(1-\xi)^2(x+l)(M_z+R_yl)]^{-1}|(-\alpha\beta x^{-1}l^{-1})^{1/2}\end{gathered} \tag{5.15}$$

Величины α, β, θ в (5.15) определены формулами (5.10). Последние два члена в (5.14) зависят от $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, определяемых формулами (5.11). Эти члены присутствуют лишь при $\Delta\geqslant 0$ и для таких $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, которые удовлетворяют неравенству (5.9).

Условия равновесия, которые в данном случае совпадают с условиями гарантированного равновесия, имеют вид (4.2), где $\max|Q|$ задается формулой (5.14).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. В работе Жуковского [1] получены условия равновесия тела, опирающегося на две точки, под действием нормальной силы, приложенной в середине отрезка, соединяющего эти точки, а также силы **F**, лежащей в плоскости xy. Обозначим через φ угол между вектором **F** и осью x, через $h>0$ — расстояния от начала координат до линии действия силы **F** (фиг. 1). Тогда в обозначениях (5.2), (5.4) имеем

$$\xi=0,\quad R_x=F\cos\varphi,\quad R_y=F\sin\varphi,\quad M_z=Fh \tag{5.16}$$

Вычисления по формулам (5.10), (5.11) с учетом (5.16) дают

$$\begin{gathered}\alpha=Fh,\quad \beta=Fl\sin\varphi,\quad \theta=(h^2+l^2\sin^2\varphi)(2hl\sin\varphi)^{-1}\\ x^{(1)}=-\sin\varphi(h^2+l^2\cos^2\varphi)h^{-1},\quad x^{(2)}=-h(\sin\varphi)^{-1}\end{gathered} \tag{5.17}$$

Подставляя равенства (5.16), (5.17) в (5.9), убедимся, что неравенство (5.9) для $x=x^{(2)}$ нарушается (за исключением случая $|x^{(2)}|=l$), а для $x=x^{(1)}$ выполняется при условии

$$h\leqslant l\cos^2\varphi|\sin\varphi|^{-1} \tag{5.18}$$

Подставим теперь соотношения (5.16), (5.17) в формулу (5.15) и вычислим

$$q(x^{(1)})=F[1+h^2(l\cos\varphi)^{-2}]^{1/2} \tag{5.19}$$

Максимум (5.14) с учетом равенств (5.16), (5.19) перепишется в виде

$$\max|Q|=-FR_z^{-1}\max[hl^{-1}+|\sin\varphi|,\ 1,\ (1+h^2l^{-2}\cos^{-2}\varphi)^{1/2}] \tag{5.20}$$

причем последний член следует учитывать лишь при условии (5.18). В этом случае, как нетрудно проверить, максимальным из трех членов в (5.20) является третий, а в противном случае — первый. В итоге, условие

(4.2) примет вид

$$\frac{F}{f|R_z|}\leqslant\begin{cases}[1+h^2(l\cos\varphi)^{-2}]^{-1/2}, & hl^{-1}<\cos^2\varphi|\sin\varphi|^{-1}\\ (hl^{-1}+|\sin\varphi|)^{-1}, & hl^{-1}\geqslant\cos^2\varphi|\sin\varphi|^{-1}\end{cases}\tag{5.21}$$

Для первого варианта формул (5.21) предельное состояние (при достижении равенства) отвечает вращению вокруг мгновенного центра, не совпадающего с точками опоры, а для второго — вокруг одной из точек опоры (5.1). Условия (5.21) были получены в [1].

2. Пусть проекция активных сил на ось x равна нулю: $R_x=0$. Так как при этом в соотношении (5.15) возникает особенность, то рассмотрим этот случай отдельно. При $R_x=0$ функция Q из (5.4) зависит от y только посредством s, а s достигает минимума по y при $y=0$. Следовательно, максимум $|Q|$ по y достигается при $y=0$. Нетрудно проверить, что при $R_x=0$, $y=0$ и $|x|\neq l$ производная Q_x из (5.5) обращается в нуль лишь при условии $(1-\xi)(M_z+R_yl)\pm(1+\xi)(M_z-R_yl)=0$, которое эквивалентно одному из двух равенств

$$M_z+\xi R_yl=0,\quad M_z-\xi R_yl=0\tag{5.22}$$

Если условия (5.22) не имеют места, то искомый максимум $|Q|$ по x достигается при $|x|=l$ и, согласно (5.12), равен

$$\max|Q|=\max\left[\frac{|M_z-R_yl|}{(1-\xi)(-R_z)l},\frac{|M_z+R_yl|}{(1+\xi)(-R_z)l}\right]\tag{5.23}$$

При выполнении одного из условий (5.22) максимум $|Q|$ по x при $y=0$, как нетрудно проверить, определяется также формулой (5.23), хотя достигается не только при $|x|=l$. Можно непосредственно убедиться в справедливости тождества

$$\max[|M_z-R_yl|(1-\xi)^{-1},\ |M_z+R_yl|(1+\xi)^{-1}]=$$
$$=(|M_z-\xi R_yl|+|M_z\xi-R_yl|)(1-\xi^2)^{-1}$$

с помощью которого преобразуем формулу (5.23). Окончаательно условия равновесия (4.2) в случае $R_x=0$ примут вид

$$|M_z-\xi R_yl|+|M_z\xi-R_yl|\leqslant f(1-\xi^2)(-R_z)l\quad(R_x=0)\tag{5.24}$$

Если $R_x=R_y=0$, т. е. все силы в плоскости xy приводятся к паре, то условия равновесия (5.24) упрощаются

$$|M_z|\leqslant f(-R_z)(1-|\xi|)l\tag{5.25}$$

Последнее условие имеет простой смысл: оно означает, что при вращении вокруг точки опоры, ближайшей к K (т. е. вокруг A_1 при $\xi<0$ и вокруг A_2 при $\xi>0$), момент активных сил не превосходит момента сил трения.

6. Опирание на точку и отрезок. Пусть множество точек контакта состоит из отрезка $A'A''$ и точки A. Выберем в плоскости контакта оси x, y так, чтобы ось x была направлена вдоль отрезка $A'A''$, а ось y проходила через точку A, причем $y_A>0$ (фиг. 2). Будем считать выполненными условия (2.3): $R_z<0$, $K\in\Delta AA'A''$; следовательно $y^*\leqslant y_A$.

Согласно утверждению 9, экстремум (4.3) достигается при опоре на три точки, одна из которых есть A, а две другие A_1, A_2 лежат на отрезке $A'A''$. Их абсциссы x_1, x_2 представим в виде

$$x_1=x_0-\lambda,\quad x_2=x_0+\varkappa\lambda$$
$$x_0=x^*y_A(y_A-y^*)^{-1},\quad \lambda\geqslant0,\ \varkappa\geqslant0\tag{6.1}$$

Здесь x^*, y^* — координаты точки K (см. (2.1)), а x_0 — абсцисса точки A_0, лежащей на пересечении оси x с прямой, проходящей через точки A, K (см. фиг. 2). Через λ, $\varkappa$ в (6.1) обозначены параметры, определяющие положение точек A_1, A_2, причем эти параметры неотрицательны, так как должно выполняться условие $K\in\Delta AA_1A_2$ (см. (2.3)).

Нормальные реакции в точках A, A_1, A_2 определим из условий (1.2), (2.1):

$$N+N_1+N_2=-R_z,\quad x_1N_1+x_2N_2=-R_zx^*,\quad y_AN=-R_zy^*$$

Отсюда, учитывая соотношения (6.1), получим

$$\begin{gathered}N=-R_zy^*y_A^{-1},\quad N_1=-R_z(y_A-y^*)y_A^{-1}\varkappa(\varkappa+1)^{-1}\\ N_2=-R_z(y_A-y^*)y_A^{-1}(\varkappa+1)^{-1}\end{gathered}\tag{6.2}$$

Заметим, что реакции (6.2) не зависят от λ. Подставим равенства (6.1), (6.2) в выражение (4.2) для s

$$\begin{gathered}s=-R_zy_A^{-1}[y^*\rho+(y_A-y^*)(\varkappa+1)^{-1}(\varkappa\rho_1+\rho_2)]\\ \rho=[x^2+(y-y_A)^2]^{1/2},\quad \rho_1=[(x-x_0+\lambda)^2+y^2]^{1/2}\\ \rho_2=[(x-x_0-\varkappa\lambda)^2+y^2]^{1/2}\end{gathered}\tag{6.3}$$

Вычислим частные производные функции (6.3):

$$\begin{gathered}\frac{\partial s}{\partial\lambda}=\nu[(x-x_0+\lambda)\rho_1^{-1}-(x-x_0-\varkappa\lambda)\rho_2^{-1}]\\ \frac{\partial^2 s}{\partial\lambda^2}=\nu[\rho_1^{-1}+\varkappa\rho_2^{-1}-(x-x_0+\lambda)^2\rho_1^{-3}-\varkappa(x-x_0-\varkappa\lambda)^2\rho_2^{-3}]=\\ =\nu y^2(\rho_1^{-3}+\varkappa\rho_2^{-3}),\qquad \nu=-R_z(y_A-y^*)y_A^{-1}\varkappa(\varkappa+1)^{-1}\end{gathered}\tag{6.4}$$

Из приведенных выше неравенств $R_z<0$, $y_A\geqslant y^*$, $\varkappa\geqslant0$ вытекает, что $\nu\geqslant0$ и, следовательно, $\partial^2s/\partial\lambda^2\geqslant0$. Кроме того, из (6.4) имеем $\partial s/\partial\lambda=0$ при $\lambda=0$. Значит, $\partial s/\partial\lambda\geqslant0$ при $\lambda\geqslant0$, так что s — монотонно возрастающая функция λ, и минимум s по λ достигается при $\lambda=0$. Следовательно, максимум $|Q|$ из (4.3) по N_i реализуется при опоре на такие три точки A, A_1, A_2, которые отвечают $\lambda=0$ в (6.1), т. е. фактически при опоре на две точки A и $A_0=(x_0, 0)$. Итак, случай опоры на точку и отрезок сводится к случаю опоры на две точки. А именно, условия гарантированного равновесия при опоре на точку A и отрезок $A'A''$ эквивалентны условиям равновесия при опоре на две точки (A и A_0), которые рассмотрены в п. 5.

7. Опирание на окружность. Пусть множество контакта D — окружность радиуса a. Поместим начало координат в ее центр, а ось x проведем через точку K. Предполагая выполненными условия (2.3), имеем $\mathbf{r}^*=(x^*, 0, 0)$, $|x^*|\leqslant a$. В силу утверждения 9, достаточно рассмотреть случай контакта в трех точках A_i, лежащих на окружности: $|\mathbf{r}_i|=a$, $i=1, 2, 3$.

Ограничимся случаем, когда главный вектор активных сил направлен по оси z, т. е. $R_x=R_y=0$ (все силы в плоскости xy приводятся к паре). Тогда, согласно утверждению 10, достаточно найти единственный экстремум по x, y функции $|Q|$, или, что то же, функции s из (4.2). Запишем выражение (4.2) для s и соотношения (1.2), (2.1):

$$\begin{gathered}s=\sum\rho_iN_i,\qquad \sum N_i=-R_z,\qquad \sum N_i\mathbf{r}_i=-R_z\mathbf{r}^*\\ \rho_i=|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}|,\quad |\mathbf{r}_i|=a\quad(i=1, 2, 3)\end{gathered}\tag{7.1}$$

Найдем условный экстремум s при ограничениях (7.1), для чего составим функцию ($\mathbf{b}$, μ_0, μ_i — множители Лагранжа): $L=\sum[N_i(\rho_i+\mathbf{b}\mathbf{r}_i+\mu_0)+(1/2)\mu_i\mathbf{r}_i^2]$ и запишем условия ее экстремума по $\mathbf{r}_i$, N_i, $\mathbf{r}$

$$\begin{gathered}N_i[(\mathbf{r}_i-\mathbf{r})\rho_i^{-1}+\mathbf{b}]+\mu_i\mathbf{r}_i=0\\ \rho_i+\mathbf{b}\mathbf{r}_i+\mu_0=0\quad(i=1, 2, 3)\\ \sum N_i\rho_i^{-1}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r})=0\end{gathered}\tag{7.2}$$

Из первой группы уравнений (7.2) найдем

$$\mathbf{r}_i=N_i(\mathbf{r}-\mathbf{b}\rho_i)q_i, \quad q_i=(N_i+\mu_i\rho_i)^{-1} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{7.3}$$

Подставим равенства (7.3) в последнее уравнение (7.2):

$$\mathbf{r}\sum N_i\mu_iq_i+\mathbf{b}\sum N_i^2q_i=0 \tag{7.4}$$

и в соотношение (7.1), определяющее $(-R_z\mathbf{r}^*)$:

$$\mathbf{r}\sum N_i^2q_i-\mathbf{b}\sum N_i^2\rho_iq_i=-R_z\mathbf{r}^* \tag{7.5}$$

Из равенства (7.4) вытекает, что векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, а из (7.5) — что они оба коллинеарны вектору $\mathbf{r}^*$, т. е. оси x. Тогда из соотношений (7.3) следует, что все векторы $\mathbf{r}_i$, $i=1$, 2, 3 также коллинеарны оси x. Но так как концы $\mathbf{r}_i$ лежат на окружности с центром в начале координат, то это возможно лишь в том случае, когда два из векторов $\mathbf{r}_i$ совпадают, а два отличных друг от друга $\mathbf{r}_i$ равны

$$\mathbf{r}_i=(-a,\ 0,\ 0), \quad \mathbf{r}_2=(a,\ 0,\ 0) \tag{7.6}$$

Таким образом, для получения условий гарантированного равновесия достаточно рассмотреть случай опирания на две точки A_1, A_2 — концы диаметра (7.6), проходящего через точку K. Такое опирание рассмотрено в п. 5, и соответствующие условия равновесия при $R_x=R_y=0$ имеют вид (5.25). В обозначениях п. 7, заменяя l на a и ξl на x^* (см. (5.2)), получим

$$|M_z|\leqslant f|R_z|(a-|x^*|), \quad R_z<0, \quad |x^*|\leqslant a \tag{7.7}$$

Если условия (7.7) выполнены, то тело будет в равновесии при опоре на любые части окружности и при любом распределении нормальных реакций. Когда в (7.7) достигается знак равенства, то при опоре на точки A_1, A_2 тело начинает вращение вокруг той из точек опоры, которая ближе к K.

8. **Опирание на четыре точки.** Рассмотрим случай, когда множество контакта D состоит из четырех точек, лежащих в вершинах ромба, а точка K из (2.1) находится в центре ромба («ромбовидный стол»). Координаты x, y точек A_i, $i=1$, 2, 3, 4, и точки K примем равными

$$x_{1,2}=\pm a, \quad y_{3,4}=\pm b, \quad y_{1,2}=x_{3,4}=x^*=y^*=0 \tag{8.1}$$

Без нарушения общности считаем $a\geqslant b$. Из условий (1.2) для случая (8.1) получим $N_2=N_1$, $N_4=N_3$ и, кроме того

$$2(N_1+N_3)=-R_z>0, \quad N_1\geqslant 0, \quad N_3\geqslant 0 \tag{8.2}$$

Предположим, как и в п. 7, что $R_x=R_y=0$, т. е. к телу приложена в плоскости xy пара сил с моментом M_z. Условие гарантированного равновесия (4.3) с учетом (8.1), (8.2) примет вид

$$\max_{x,y,N_1,N_3}(|M_z|s^{-1})\leqslant f \tag{8.3}$$

$$s=N_1\{[(x+a)^2+y^2]^{1/2}+[(x-a)^2+y^2]^{1/2}\}+$$
$$+N_3\{[x^2+(y+b)^2]^{1/2}+[x^2+(y-b)^2]^{1/2}\}$$

Нетрудно проверить, что $\partial s/\partial x=\partial s/\partial y=0$ при $x=y=0$. Тогда из утверждения 10 следует, что $x=y=0$ — точка максимума в (8.3). В результате условие (8.3) преобразуется к виду

$$2|M_z|[\min_{N_1,N_3}(N_1a+N_3b)]^{-1}\leqslant f \tag{8.4}$$

Минимум в (8.4) при ограничениях (8.2) и при условии $a\geqslant b$ достигается, если $N_1=0$, $N_3=-R_z/2$. Таким образом, условие гарантированного равновесия (8.4) приводится к виду

$$|M_z|(-R_zb)^{-1}\leqslant f \tag{8.5}$$

Условие (8.5) имеет простой смысл: равновесие гарантировано при любом распределении реакций, если оно имеет место при опоре на пару противоположных вершин ромба A_3, A_4, расстояние между которыми $2b$ меньше, чем расстояние $2a$ между вершинами A_1, A_2 другой пары.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением. // Собрание сочинений, Т. 1. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. С. 339–354.

Москва

Поступила в редакцию
11.XII.1987