

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С ВЫТОЧКАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

БЛОШКО Н. М., НЕМИШ Ю. Н.

В [1, 2] предложен приближенный метод решения линейных граничных задач математической физики, основанный на разложении искомого решения в конечный ряд по фундаментальным решениям соответствующих уравнений. В [3] приведено математическое обоснование этого метода и проанализированы некоторые алгоритмы решения плоских и пространственных граничных задач статической теории упругости изотропного тела.

Развитие метода дано в [4–6], в [7] проанализированы некоторые затруднения, возникающие при исследовании многосвязных тел.

При увеличении числа членов в рядах [3], представляющих приближенное решение, встречаются серьезные вычислительные трудности, поскольку матрица соответствующей системы линейных уравнений становится плохо обусловленной и решение неустойчивым, что вынуждает обращаться к методам регуляризации. Во многом избежать этого можно с помощью метода функций Грина [8] для областей, часть границы которых является координатной в используемой системе координат в предположении, что удовлетворить граничным условиям на этой части удастся точно или с высокой степенью точности с помощью какого-либо аналитического метода. Примеры реализации указанного подхода для случая изотропных цилиндрических тел имеются в [9] (бесконечный цилиндр с полукруговой окружной выточкой)¹.

В данной работе развит подход к исследованию осесимметричного упругого равновесия трансверсально изотропных цилиндрических тел конечных размеров с произвольными окружными выточками, основанный на совместном применении метода функций Грина и принципа суперпозиции Ламе [10]. Этот подход по объекту исследования дополняет развитый в работе [11] для исследования осесимметричного напряженного состояния цилиндров с мелкими выточками.

1. Постановка задачи. Построение общего решения. Рассмотрим в пространстве R^3 область $G = G^{(1)}/G^{(2)}$, где $G^{(1)}$ — область, определяемая неравенствами $r < 1$, $|z| < h$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (φ , r , z — цилиндрические координаты; r , z отнесены к некоторой характерной величине r_0), $G^{(2)}$ — произвольная область из R^3 , удовлетворяющая условию $G^{(2)} \subset G^{(1)}$, причем границы $G^{(2)}$ и $G^{(1)}$ могут частично совпадать.

Решение краевой задачи теории упругости заключается в нахождении решения уравнений равновесия [12], удовлетворяющего заданным условиям на границе области G .

Представим решение в виде

$$u_i = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \quad (i, j = r, \varphi, z) \quad (1.1)$$

где u_i , σ_{ij} — компоненты вектора перемещений и тензора напряжений. Потребуем, чтобы первые слагаемые в (1.1) удовлетворяли уравнениям равновесия в области $G^{(1)}$ и заданным краевым условиям на границе $G^{(1)}$. Если имеются участки общей границы $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, т. е. на части поверхности $G^{(1)}$ краевые условия не сформулированы, их необходимо непрерывно продолжить на всю границу $G^{(1)}$.

Вторые слагаемые в (1.1) должны удовлетворять уравнениям равнове-

¹ См. также: *Блошко Н. М.* О применении функций Грина в осесимметричных задачах для конечных цилиндров с выточками // Тр. XI науч. конф. молодых ученых ин-та механики АН УССР. Киев. 1986. Ч. 3. С. 434–438. Деп. в ВИНТИ 28.07.86, № 5507–В86. (Рассмотрен конечный цилиндр с такой же выточкой).

сия в G , заданным краевым условиям (с учетом первых слагаемых) на общей части границы $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ и нулевым краевым условиям на оставшейся части границы. Решение u_i, σ_{ij} будет удовлетворять условиям исходной задачи.

Построим сначала решение пространственной осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного цилиндра со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= f_1(z), \quad \sigma_{rz} = \varphi_1(z), \quad r=1 \\ \sigma_{zz} &= f_2(r), \quad \sigma_{rz} = \varphi_2(r), \quad z=\pm h \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $f_1(z), \varphi_1(z), f_2(r), \varphi_2(r)$ — произвольные непрерывные функции своих аргументов.

Вспользуемся представлением [12]:

$$u_r = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad u_z = k_1^* \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + k_2^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad (1.3)$$

Постоянные k_i^* ($i=1, 2$) должны удовлетворять квадратному характеристическому уравнению

$$c_{44}(c_{13}+c_{44})(k^*)^2 + [(c_{13}+c_{44})^2 + c_{44}^2 - c_{13}c_{33}]k^* + (c_{13}+c_{44})c_{44} = 0 \quad (1.4)$$

c_{ij} — упругие постоянные трансверсально-изотропного материала цилиндра).

Функции Φ_i — гармонические по переменным $r, z/\sqrt{\kappa_i}$:

$$\nabla_i \Phi_i(r, z) = 0, \quad \left(\nabla_i = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \kappa_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1.5)$$

где κ_i — корни характеристического уравнения

$$c_{11}c_{44}\kappa^2 + [c_{13}(2c_{44}+c_{13}) - c_{11}c_{33}]\kappa + c_{33}c_{44} = 0 \quad (1.6)$$

Для компонентов тензора напряжений на основе обобщенного закона Гука и (1.3) получим следующее представление:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{44} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{2}{\kappa_i} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(2 \frac{\kappa_i}{\kappa_3} - 1 - k_i^* \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi_i, \quad \kappa_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{44} \sum_{i=1}^2 \left[-\frac{2}{\kappa_i} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - (1 + k_i^*) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Phi_i \\ \sigma_{zz} &= c_{44} \sum_{i=1}^2 (1 + k_i^*) \kappa_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}, \quad \sigma_{rz} = c_{44} \sum_{i=1}^2 (1 + k_i^*) \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r \partial z} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для действительных и различных корней уравнения (1.6) κ_i ($\kappa_1 \neq \kappa_2$) функции $\Phi_i(r, z)$ в случае симметричного относительно плоскости $z=0$ распределения напряжений можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_i(r, z) &= B_i \left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\kappa_i} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,i} I_0(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \cos k_n z + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,i} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_0(\lambda_m r) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $A_{n,i}, B_i, C_{m,i}$ — произвольные постоянные, $k_n = n\pi/h$, λ_m — корни уравнения $J_1(\lambda) = 0$, J_0, I_0 — функции Бесселя.

В этом случае компоненты вектора перемещений и тензора напряжений определяются на основе (1.3), (1.7), (1.8) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sum_{i=1}^2 B_i r - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{m,i} \lambda_m \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_1(\lambda_m r) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_{n,i} \sqrt{\kappa_i} k_n I_1(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \cos k_n z \\
 u_z &= -2 \sum_{i=1}^2 B_i \frac{k_i^*}{\kappa_i} z + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{m,i} \frac{k_i^* \lambda_m}{\sqrt{\kappa_i}} \operatorname{sh} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_0(\lambda_m r) - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_{n,i} k_i^* k_n I_0(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \sin k_n z \\
 \sigma_{rr} &= -\frac{c_{11} - c_{12}}{r} \left[\sum_{i=1}^2 B_i r - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{m,i} \lambda_m \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_1(\lambda_m r) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_{n,i} \sqrt{\kappa_i} k_n I_1(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \cos k_n z \right] - \\
 - c_{44} &\left[-2 \sum_{i=1}^2 B_i \frac{1+k_i^*}{\kappa_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{m,i} \frac{1+k_i^*}{\kappa_i} \lambda_m^2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_0(\lambda_m r) - \right. \\
 &- \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_{n,i} (1+k_i^*) k_n^2 I_0(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \cos k_n z \right] \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{r} \left[\sum_{i=1}^2 B_i r - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{m,i} \lambda_m \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_1(\lambda_m r) + \right. \\
 &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_{n,i} \sqrt{\kappa_i} k_n I_1(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \cos k_n z \right] - 2 \sum_{i=1}^2 B_i \frac{c_{13} k_i^* - c_{12} \kappa_i}{\kappa_i} + \\
 &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{m,i} \frac{c_{13} k_i^* - c_{12} \kappa_i}{\kappa_i} \lambda_m^2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_0(\lambda_m r) - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_{n,i} (c_{13} k_i^* - c_{12} \kappa_i) k_n^2 I_0(\sqrt{\kappa_i} k_n r), \\
 \sigma_{zz} &= -2 \sum_{i=1}^2 B_i \frac{c_{13} k_i^* - c_{11} \kappa_i}{\kappa_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{m,i} \frac{c_{33} k_i^* - c_{13} \kappa_i}{\kappa_i} \lambda_m^2 \times \\
 &\times \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_0(\lambda_m r) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_{n,i} (c_{33} k_i^* - c_{13} \kappa_i) k_n^2 I_0(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \cos k_n z \\
 \sigma_{rz} &= -c_{44} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{m,i} \frac{1+k_i^*}{\sqrt{\kappa_i}} \lambda_m^2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_1(\lambda_m r) -
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$-c_{44} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_{n,i} \sqrt{\kappa_i} (1+k_i^*) k_n^2 I_1(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \sin k_n z$$

Представляя $f_1(z)$, $\varphi_1(z)$ рядами Фурье, а $f_2(r)$, $\varphi_2(r)$ — рядами Фурье — Дини

$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} \cos k_n z, & \varphi_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n} \sin k_n z \\ f_2(r) &= f_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m} J_0(\lambda_m r), & \varphi_2(r) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{2m} J_1(\lambda_m r) \end{aligned} \quad (1.10)$$

и удовлетворяя граничным условиям (1.2), получим следующие системы алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных, содержащихся в (1.8), (1.9):

$$-(c_{11}-c_{12}) \sum_{i=1}^2 B_i + \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2m}}{\lambda_m} J_0(\lambda_m) = f_{10} \quad (1.11)$$

$$-2 \sum_{i=1}^2 \frac{c_{13} k_i^* - c_{11} \kappa_i}{\kappa_i} B_i + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi_{1n}}{k_n} = f_{20}$$

$$x_n = \frac{c_{44}(1+k_1^*)}{T_n} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \left(\frac{1}{k_n^2 \kappa_1 + \lambda_m^2} - \frac{1}{k_n^2 \kappa_2 + \lambda_m^2} \right) + \frac{\Psi_n}{T_n} \quad (1.12)$$

$$y_m = \frac{c_{44}(1+k_1^*)}{S_m} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\frac{\kappa_1}{k_n^2 \kappa_1 + \lambda_m^2} - \frac{\kappa_2}{k_n^2 \kappa_2 + \lambda_m^2} \right) + \frac{\Omega_m}{S_m}$$

$$x_n = [2(-1)^n / \sqrt{\kappa_1}] A_{n,1} k_n^3 I_1(\sqrt{\kappa_1} k_n), \quad y_m = [2/h \sqrt{\kappa_1}] C_{m,1} \lambda_m^3 \times \\ \times \operatorname{sh}(\lambda_m h / \sqrt{\kappa_1}) J_0(\lambda_m)$$

$$T_n = \frac{1}{2} \left[\frac{(k_1^* - k_2^*)(c_{11} - c_{12})}{(1+k_2^*) k_n^2} + \frac{c_{44}(1+k_1^*) I_0(\sqrt{\kappa_1} k_n)}{k_n \sqrt{\kappa_1} I_1(\sqrt{\kappa_1} k_n)} - \frac{c_{44}(1+k_2^*) I_0(\sqrt{\kappa_2} k_n)}{k_n \sqrt{\kappa_2} I_1(\sqrt{\kappa_2} k_n)} \right]$$

$$S_m = \frac{h}{2\lambda_m} c_{44}(1+k_1^*) \left(\sqrt{\kappa_1} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{\sqrt{\kappa_1}} - \sqrt{\kappa_2} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{\sqrt{\kappa_2}} \right)$$

$$\begin{aligned} (-1)^n \Psi_n &= f_{1n} - \varphi_{1n} \left[\frac{(c_{11} - c_{12}) k_n}{c_{44}(1+k_2^*)} + \frac{I_0(\sqrt{\kappa_2} k_n)}{\sqrt{\kappa_2} I_1(\sqrt{\kappa_2} k_n)} \right] - \\ &- \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda_m \varphi_{2m}}{k_n^2 \kappa_2 + \lambda_m^2} J_0(\lambda_m), \quad \Omega_m = f_{2m} J_0(\lambda_m) + \varphi_{2m} \sqrt{\kappa_2} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{\sqrt{\kappa_2}} J_0(\lambda_m) - \\ &- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n} \frac{(-1)^n k_n \kappa_2}{k_n^2 \kappa_2 + \lambda_m^2} \end{aligned}$$

Значения постоянных $A_{n,2}$, $C_{m,2}$ определяются по известным из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (1.12) значениям $A_{n,1}$, $C_{m,1}$ на основе формул [11].

Используя результаты, изложенные в [40] для неизвестных x_n , y_m системы (1.12) можно доказать справедливость асимптотического равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = a_0 = \text{const} \quad (1.13)$$

Зная асимптотические свойства указанных неизвестных, можно построить эффективные численные алгоритмы усечения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и вычисления напряжений внутри и на границе области, занимаемой цилиндром, в том числе и в окрестности угловых линий $r=1$, $z=\pm h$ [11].

Таким образом, задачу построения первых частей решения $u_i^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$ в (1.1) можно считать решенной.

2. Построение частных решений. Вторые слагаемые в (1.1) по аналогии с [9] представим в виде

$$u_i^{(2)} = \sum_{h=1}^M [a_h (u_{i,rh}^{(1)} + u_{i,rh}^{(2)}) + b_h (u_{i,zh}^{(1)} + u_{i,zh}^{(2)})] \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \sum_{h=1}^M [a_h (\sigma_{ij,rh}^{(1)} + \sigma_{ij,rh}^{(2)}) + b_h (\sigma_{ij,zh}^{(1)} + \sigma_{ij,zh}^{(2)})]$$

где $u_{i,rh}^{(1)}$, $u_{i,zh}^{(1)}$ — общие решения однородных уравнений равновесия трансверсально-изотропного упругого тела, $u_{i,rh}^{(2)}$, $u_{i,zh}^{(2)}$ ($i=r, z$) — частные решения неоднородных уравнений равновесия, отвечающие случаю действия независимых условных объемных сил $F_{rk}(F_{rk}; 0; 0)$ и $F_{zh}(0; 0; F_{zh})$ соответственно. Компоненты F_{rk} , F_{zh} с учетом симметрии цилиндра и условия загрузки относительно плоскости $z=0$ зададим в виде:

$$F_{rk} = (1/2\pi r) \delta(r-r_k) [\delta(z-h_k) + \delta(z+h_k)] \quad (2.2)$$

$$F_{zh} = (1/2\pi r) [\delta(z-h_k) - \delta(z+h_k)]$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $h_k = \text{const}$, $r_k = \text{const}$. Причем окружности $r=r_k$, $z=\pm h_k$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ расположены внутри области $G^{(2)}$.

В (2.1) $\sigma_{ij,rh}^{(1)}$, $\sigma_{ij,rh}^{(2)}$, $\sigma_{ij,zh}^{(1)}$, $\sigma_{ij,zh}^{(2)}$ — вычисленные на основе соответствующих выражений для перемещений компоненты тензора напряжений, удовлетворяющие следующим граничным условиям на поверхности $G^{(1)}$:

$$(\sigma_{rr,mh}^{(1)} + \sigma_{rr,mh}^{(2)})_{r=1} = (\sigma_{rz,mh}^{(1)} + \sigma_{rz,mh}^{(2)})_{r=1} = 0 \quad (2.3)$$

$$(\sigma_{zz,mh}^{(1)} + \sigma_{zz,mh}^{(2)})_{z=\pm h} = (\sigma_{rz,mh}^{(1)} + \sigma_{rz,mh}^{(2)})_{z=\pm h} = 0 \quad (m=r, z)$$

Постоянные a_h , b_h определяются исходя из возможности удовлетворения граничным условиям на поверхности $G^{(2)}$, не являющейся частью поверхности $G^{(1)}$. При этом можно воспользоваться методом простой коллокации или методом наименьших квадратов. Правда, в последнем случае количество необходимых операций несколько увеличивается.

Таким образом, построенное решение будет удовлетворять уравнениям равновесия в области G (силы F_{rk} и F_{zh} распределены по окружностям, которые находятся вне G), точно удовлетворять граничным условиям на части поверхности G , описываемой уравнениями $r=1$, $z=\pm h$, и приближенно на остальной части границы.

Для слагаемых $u_{i,mk}^{(1)}$, $\sigma_{ij,mk}^{(1)}$ можно воспользоваться представлениями

(1.9). Построение аналогичных выражений для $u_{i,mk}^{(2)}$, $\sigma_{ij,mk}^{(2)}$ (решение неоднородных уравнений равновесия с условными объемными силами, распределенными по окружностям внутри трансверсально-изотропного упругого пространства) является нетривиальной задачей, несмотря на большое число исследований, выполненных в данной области. Отметим, что при удовлетворении граничным условиям (2.3) в соответствии с (1.10) необходимо располагать разложениями $u_{i,mk}^{(2)}$, $\sigma_{ij,mk}^{(2)}$ в ряды Фурье и Фурье — Дини, поэтому воспользоваться известным решением (типа решения Кельвина) для трансверсально-изотропной среды [13], предварительно проинтегрировав его по угловой координате от 0 до 2π не представляется возможным, так как получить аналитические выражения разложений их в ряд по функциям Бесселя или тригонометрическим практически невозможно. Поэтому для компонент вектора перемещений $u_{i,rk}^{(2)}$, $u_{i,zk}^{(2)}$ и тензора напряжений $\sigma_{ij,rk}^{(2)}$, $\sigma_{ij,zk}^{(2)}$ воспользуемся их представлением через две функции Φ_1^* , Φ_2^* , которые будем искать в виде

$$\Phi_1^* = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} J_0(\lambda_j r) \cos k_n z, \quad \Phi_2^* = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{jn} J_0(\lambda_j r) \cos k_n z \quad (2.4)$$

Из уравнений равновесия трансверсально-изотропного упругого тела получим независимые системы дифференциальных уравнений, служащих для определения Φ_1^* , Φ_2^* :

при заданной объемной силе $F_{1k}(F_{rk}; 0; 0)$:

$$\partial/\partial r (\nabla_1 \Phi_1^* + \nabla_2 \Phi_2^*) = -F_{rk}, \quad \partial/\partial z (\kappa_1^{-1} \nabla_1 \Phi_1^* + \kappa_2^{-1} \nabla_2 \Phi_2^*) = 0 \quad (2.5)$$

при заданной объемной силе $F_{2k}(0; 0; F_{zk})$:

$$\partial/\partial r (\nabla_1 \Phi_1^* + \nabla_2 \Phi_2^*) = 0 \quad (2.6)$$

$$\partial/\partial z (\kappa_1^{-1} \nabla_1 \Phi_1^* + \kappa_2^{-1} \nabla_2 \Phi_2^*) = -\alpha F_{zk}, \quad \alpha = -c_{11}/c_{33}$$

Правые части систем (2.5), (2.6) представим рядами

$$-F_{rk} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{jn,rk} J_1(\lambda_j r) \cos k_n z, \quad -\alpha F_{zk} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{jn,zk} J_0(\lambda_j r) \sin k_n z \quad (2.7)$$

$$f_{jn,rk} = -\frac{2}{h J_0^2(\lambda_j)} \int_{-h}^h \int_0^1 F_{rk}(r, z) J_1(\lambda_j r) \cos k_n z r dr dz \quad (2.8)$$

$$f_{jn,zk} = -\frac{2\alpha}{h J_0^2(\lambda_j)} \int_{-h}^h \int_0^1 F_{zk}(r, z) J_0(\lambda_j r) \sin k_n z r dr dz \quad (j, n \geq 1)$$

$$f_{j0,rk} = -\frac{1}{h J_0^2(\lambda_j)} \int_{-h}^h \int_0^1 F_{rk}(r, z) J_1(\lambda_j r) r dr dz \quad (j \geq 1)$$

$$f_{0n,zk} = -\frac{2\alpha}{h} \int_{-h}^h \int_0^1 F_{zk}(r, z) \sin k_n z r dr dz \quad (n \geq 1) \quad (2.9)$$

$$f_{0n,rk} = f_{j0,zk} = 0 \quad (j, n \geq 0)$$

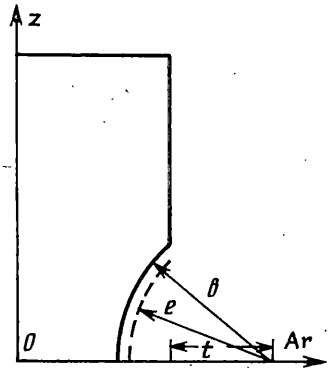
Учитывая (2.4), (2.7), для Φ_1^* и Φ_2^* из (2.5) получим:

$$\Phi_1^* = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{jn, rk}}{\lambda_j (\lambda_j^2 + k_n^2 \kappa_1)} J_0(\lambda_j r) \cos k_n z \quad (2.10)$$

$$\Phi_2^* = \frac{\kappa_2}{\kappa_2 - \kappa_1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{jn, rk}}{\lambda_j (\lambda_j^2 + k_n^2 \kappa_2)} J_0(\lambda_j r) \cos k_n z$$

С помощью (1.3), (1.7) на основании представлений (2.9), (2.10) получим аналитические выражения для $u_{i, rk}^{(2)}$, $u_{i, zk}^{(2)}$ и соответствующих им компонент тензора напряжений. Коэффициенты их разложений в ряды Фурье и Фурье — Дини (1.10) получаются отсюда элементарным образом. С помощью описанного выше метода задача с условиями на границе $r=1$, $z=\pm h$ (2.3) может быть решена.

3. Равновесие трансверсально-изотропного цилиндра с окружной выточкой. Способ определения постоянных a_k , b_k в (2.1) проиллюстрируем на примере решения конкретной граничной задачи. Рассмотрим трансверсально-изотропный упругий цилиндр конечной длины $2h$ с симметричной относительно плоскости $z=0$ окружной выточкой, поверхность которой в произвольном сечении $\varphi = \text{const}$ описывается дугой окружности радиуса b с центром в точке A (ввиду симметрии относительно плоскости $z=0$ и оси z , показана четверть сечения на фиг. 1), находящийся под действием постоянного осевого растяжения-сжатия интенсивности p . Точки с координатами $(r_k, \pm h_k)$ располагались равномерно по длине дуги окружности радиуса e с центром в той же точке A .



Фиг. 1

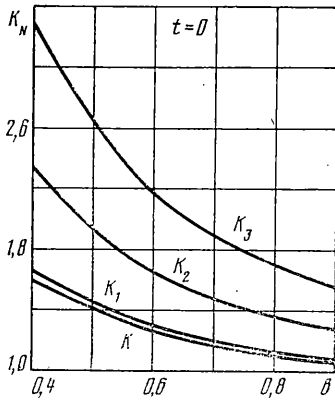
Для определения a_k , b_k получим систему уравнений

$$\left\{ \sum_{k=1}^M [a_k (\sigma_{rr, rk}^{(1)} + \sigma_{rr, rk}^{(2)}) + b_k (\sigma_{rr, zk}^{(1)} + \sigma_{rr, zk}^{(2)})] n_r + \sum_{k=1}^M [a_k (\sigma_{rz, rk}^{(1)} + \sigma_{rz, rk}^{(2)}) + b_k (\sigma_{rz, zk}^{(1)} + \sigma_{rz, zk}^{(2)})] n_z \right\}_{r=r_t, z=z_t} = 0$$

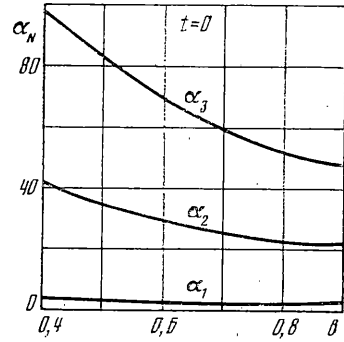
$$\left\{ \sum_{k=1}^M [a_k (\sigma_{rz, rk}^{(1)} + \sigma_{rz, rk}^{(2)}) + b_k (\sigma_{rz, zk}^{(1)} + \sigma_{rz, zk}^{(2)})] n_r + \sum_{k=1}^M [a_k (\sigma_{rz, rk}^{(1)} + \sigma_{zz, rk}^{(2)}) + b_k (\sigma_{zz, zk}^{(1)} + \sigma_{zz, zk}^{(2)}) + p] n_z \right\}_{r=r_t, z=z_t} = 0$$

Точки с координатами (r_i, z_i) выбирались равномерно вдоль поверхности выточки в сечении $\varphi = \text{const}$. Здесь n_r , n_z — направляющие косинусы единичной нормали к поверхности выточки. В (3.1) учтено, что $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rz}^{(1)} = 0$.

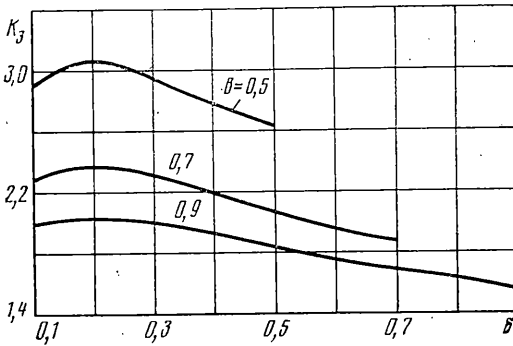
При проведении числовых расчетов геометрические параметры изменялись в диапазонах $0,4 \leq b \leq 0,9$; $0 \leq t \leq 0,9$; $1 \leq h \leq 6$. Значения упругих постоянных трансверсально-изотропных материалов цилиндров (в 10^{10} Па)



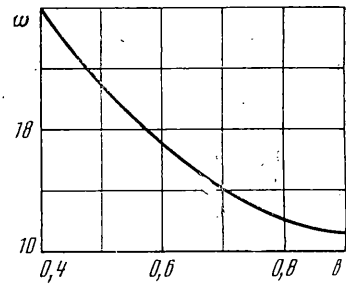
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

представлены в таблице, заимствованной из [14]. При этом в качестве наполнителя для стеклопластика использовалось E -стекло.

Зависимость коэффициентов концентраций K_N ($N=1, 2, 3$) осевых напряжений σ_{zz}/p в сечении $z=0$ для различных упругих материалов K_1 (магний), K_2 (стеклопластик) и K_3 (углепластик) в случае полукруговой выточки ($t=0$) от ее радиуса b представлены на фиг. 2. Высота цилиндра $2h=12$, т. е. влиянием торцов на величину K_N можно пренебречь. Хорошо заметно, что скорость убывания K_N зависит не только от радиуса кривизны выточки b , но и от отношения E'/E модулей Юнга в продольном и поперечном направлениях. Влияние анизотропии упругих свойств материала цилиндра на концентрацию напряжений у дна выточек при различных значениях их радиусов b показано на фиг. 3. Здесь $\alpha_N = [(K_N - K)/K] \cdot 100\%$, где K — коэффициент концентрации осевых напряжений в соответствующем изотропном цилиндре (параметр Пуассона $\nu=0,3$). Отметим, что зависимости величины K_1 от упругих постоянных c_{ij} в некоторых частных случаях исследовались в [11].

На фиг. 4 представлены зависимости K_3 от глубины выточек δ ($\delta = b - t$) при трех различных значениях их радиусов кривизны $b=0,5; 0,7; 0,9$.

Влияние торцов цилиндра на величину коэффициента концентрации напряжений в случае стеклопластика при $t=0$ характеризуется графиком фиг. 5. Здесь $\omega = [(K_h - K_2)/K_2] \cdot 100\%$, K_2 — значение указанного коэффициента при $h=6$; K_h — вычисленные значения коэффициентов при пере-

№№	Материал	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	σ_{zz}/p
1	Магний	5,97	2,62	2,17	6,17	1,64	1,11
2	Стеклопластик	1,51	0,61	0,52	4,63	0,47	3,44
3	Углепластик	0,82	0,26	0,32	8,63	0,41	11,52

менной высоте цилиндра h , которая связана с радиусом выточки b равенством $h-b=1$.

О сходимости используемого метода и степени точности полученных результатов можно судить по приводимым ниже значениям σ_{rr}/p и σ_{zz}/p на окружности $r=1-b+t$ при $z=0$ на боковой поверхности цилиндра в минимальном сечении. При $M=30, 40, 50$ радиальные напряжения соответственно будут $\sigma_{rr}/p=0,052; 0,018; 0,014$, а осевые $\sigma_{zz}/p=1,699; 1,672; 1,667$ (касательные напряжения отсутствуют).

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А. Об одном приближенном методе решения граничных задач // Сообщ. АН ГССР. 1963. Т. 30. № 5. С. 529–536.
2. Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А. Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач // Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1964. Т. 4, № 4. С. 683–715.
3. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978. 351 с.
4. Patterson C., Sheikh M. A. On the use of fundamental solutions in Trefftz method for potential and elasticity problems // Boundary Element Meth. Eng: Proc. 4th Intern. Semin., Southampton, 1982. В.: Springer, 1982. P. 43–57.
5. Redecopf D., Thompson J. C. Use of fundamental solutions in the collocation method in axisymmetric elastostatics // Computers and Structure 1983. V. 17, No. 4. P. 485–490.
6. Patterson C., Sheikh M. A. A modified Trefftz method for three dimensional elasticity // Boundary Elem.: Proc. 5th Intern. Conf., Hiroshima, 1983, В.: Springer, 1983. P. 427–437.
7. Burgess G. Restrictions of the singularity method applied to elasticity // Computers and Structure 1984. P. 19, No. 5–6. P. 839–844.
8. Hasegawa H. An extension of Love's solutions for the axisymmetric problems of elasticity // Bull. JSME. 1975. V. 18, No. 119. P. 484–492.
9. Hasegawa H. On the stress concentration problem of a circular shaft with a semi-circular groove under tension (an application of Green's functions for body force problems of a solid cylinder) // Bull. JSME. 1981. V. 24, No. 189. P. 520–527.
10. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
11. Блошко Н. М., Немеш Ю. Н. Упругое равновесие трансверсально-изотропных цилиндров с возмущенными боковыми поверхностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 93–99.
12. Elliott H. A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1948. V. 44, Pt. 4, P. 522–533.
13. Pan Y.-C., Chou T.-W. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1976. V. 43, No. 4. P. 608–612.
14. Kasano H., Matsumoto H., Nakahara I. A transversely isotropic circular cylinder under concentrated loads // Bull. JSME. 1980. V. 23, No. 176. P. 170–176.

Киев

Поступила в редакцию
21.I.1987