

УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОГО УПРУГОГО КОНУСА

ЛЕБЕДЕВ Д. Ф., НУЛЛЕР Б. М.

Построены в квадратурах системы кусочно-однородных решений (P -системы) двух смешанных задач об осесимметричной деформации бесконечного упругого конуса, часть боковой поверхности которого свободна от напряжений, а другая часть находится в скользящей заделке. В рядах по элементам этих систем могут быть решены различные контактные задачи для однородных и составных, усеченных, конечных и бесконечных конических областей, обжатых любым числом абсолютно жестких конических обойм.

Рассматриваются конкретные примеры. Получены формулы податливости обойм, определяются коэффициенты интенсивности напряжений под их краями. Произвольные постоянные в рядах по элементам P -систем находятся из нормальных систем Пуанкаре – Коха. Ранее P -системы были построены для частного вида конической области – полупространства [1–3].

1. Рассмотрим две краевые задачи а) и б) для упругого конуса $\{0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \alpha\}$ с общим основным условием

$$\tau_{r\theta}(r, \alpha) = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad (1.1)$$

и со смешанными условиями

$$\text{а) } \sigma_{\theta}(r, \alpha) = f_1(r) \quad (0 \leq r < 1), \quad v(r, \alpha) = g_1(r) \quad (1 \leq r < \infty) \quad (1.2)$$

$$\text{б) } \sigma_{\theta}(r, \alpha) = f_2(r) \quad (1 < r < \infty), \quad v(r, \alpha) = g_2(r) \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (1.3)$$

В силу (1.1) их решение можно записать в виде интеграла Меллина [4]:

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} B_j(\nu) W(\nu, \theta) r^{-\nu-2} d\nu \quad (1.4)$$

$$w = (u, v), \quad W = (U, V)$$

$$2GU(\nu, \theta) = (\nu+1)t_1 t_3 P_{\nu+2}^{-1}(q) P_{\nu}(x) - (\nu+2)t_2 t_3 P_{\nu}^{-1}(q) P_{\nu+2}(x)$$

$$2GV(\nu, \theta) = -t_1 t_3 P_{\nu+2}^{-1}(q) P_{\nu}^{-1}(x) + (\nu+2)t_3^2 P_{\nu}^{-1}(q) P_{\nu+2}^{-1}(x)$$

$$t_1 \equiv t_1(\nu) = (\nu+2)^2 - 2(1-\mu), \quad t_2 \equiv t_2(\nu) = \nu+5-4\mu$$

$$t_3 \equiv t_3(\nu) = \nu-2+4\mu, \quad t_4 \equiv t_4(\nu) = (\nu+1)^2 - 2(1-\mu)$$

$$t_5 \equiv t_5(\nu) = (\nu+3)(\nu+4) - 2(1+\mu), \quad x = \cos \theta, \quad q = \cos \alpha$$

где w – вектор упругих перемещений, $u = u(r, \theta)$ – радиальное, $v = v(r, \theta)$ – угловое перемещение, W – вектор трансформант U и V перемещений u и v соответственно, G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона, индексы $j=1$ и $j=2$ определяют задачи а) и б), $P_{\nu}^m(x)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода, контуры L_1 и L_2 – прямые $\operatorname{Re} \nu = \lambda_1$ и $\operatorname{Re} \nu = \lambda_2$ (располагаются соответственно правее и левее прямой $\operatorname{Re} \nu = -2$).

Из условий (1.2), (1.3) следует, что функция $B_j(\nu)$ удовлетворяет двум уравнениям

$$\nu^+(\nu) + \nu^-(\nu) = B_j(\nu) D_1(\nu), \quad \sigma^+(\nu) + \sigma^-(\nu) = B_j(\nu) D_2(\nu) \quad (\nu \in L_j) \quad (1.5)$$

$$D_1(\nu) = -G^{-1}(1-\mu)(2\nu+3)t_3 P_{\nu}^{-1}(q) P_{\nu+2}^{-1}(q)$$

$$D_2(v) = t_3 [(v+1)^2 t_1 P_v(q) P_{v+2}^{-1}(q) - (v+2)^2 t_4 P_v^{-1}(q) P_{v+2}(q) + 2(1-\mu)(2v+3) \operatorname{ctg} \alpha P_v^{-1}(q) P_{v+2}^{-1}(q)]$$

$$v^+(v) = \int_0^1 v(r, \alpha) r^{v+1} dr, \quad v^-(v) = \int_1^\infty v(r, \alpha) r^{v+1} dr$$

$$\sigma^+(v) = \int_0^1 \sigma_\theta(r, \alpha) r^{v+2} dr, \quad \sigma^-(v) = \int_1^\infty \sigma_\theta(r, \alpha) r^{v+2} dr$$

Исключив $B_j(v)$ из (1.5), приходим к задаче Римана [5]:

$$v^+(v) + v^-(v) = K(v) [\sigma^+(v) + \sigma^-(v)], \quad K(v) = D_1(v) D_2^{-1}(v) \quad (v \in L_j) \quad (1.6)$$

с неизвестными $\sigma^-(v)$, $v^+(v)$ при условиях а) и $\sigma^+(v)$, $v^-(v)$ при условиях б).

В [6] однородная задача б) решена в форме бесконечных произведений. Построим более эффективное решение однородных задач (1.6). Следуя [4], рассмотрим задачи Римана

$$v_0^\pm(v) = K(v) \sigma_0^\mp(v)$$

$$\text{а) } v_s^+(v) = K_s(v) \sigma_s^-(v) \quad (v \in L_1); \quad \text{б) } v_s^-(v) = K_s(v) \sigma_s^+(v) \quad (v \in L_2) \quad (1.7)$$

$$K_1(v) = (1-\mu) G^{-1}(v+3/2)^{-1} \operatorname{tg} \pi(v+3/2), \quad K_2(v) = K(v) K_1^{-1}(v) \quad (s=1, 2)$$

Можно показать, что на прямой $\operatorname{Re} v = -3/2$ мероморфная функция $K_2(v)$ вещественна, четна, не имеет нулей и полюсов, индекс ее равен нулю, $K_2(-3/2+it) \rightarrow 1$ при $|t| \rightarrow \infty$. Согласно численным расчетам [7], в полосе $-2 \leq \operatorname{Re} v < -3/2$ функция $K_2(v)$ при $\alpha \in (0, \pi)$ нулей и полюсов не имеет.

Таким образом, при $s=2$ каноническое решение задач (1.7) можно найти методом [5], сдвинув контуры L_j на прямую $\operatorname{Re} v = -3/2$ ($\operatorname{Re} v > -3/2$ в задаче (1.2) и $\operatorname{Re} v < \lambda_2$ в задаче (1.3)):

$$v_2^\pm(v) = \exp \left[\pm \frac{v+3/2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln K_2(-3/2+it) dt}{t^2 + (v+3/2)^2} \right] \quad (1.8)$$

При $s=1$ решения задач (1.7) имеют вид

$$v_1^+(v) = \Gamma(v+2) \Gamma^{-1}(v+5/2), \quad v_1^-(v) = -\Gamma(-v-2) \Gamma^{-1}(-v-1/2) \quad (1.9)$$

Неизвестные $v_0^\pm(v)$ выражаются формулами

$$v_0^-(v) = v_1^-(v) v_2^-(v) \quad (\operatorname{Re} v < \lambda_2),$$

$$v_0^+(v) = v_1^+(v) v_2^+(v) \quad (\operatorname{Re} v > -3/2) \quad (1.10)$$

$$v_0^+(v) = v_1^+(v) v_2^+(v) K_2(v) \quad (\lambda_1 \leq \operatorname{Re} v < -3/2)$$

Для произвольных значений функций f_j , g_j решение неоднородных задач (1.6) имеет вид ($Q_n(v)$ — полином степени n):

$$v^\pm(v) = \mp \frac{v_0^\pm(v)}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{[\sigma^\pm(t) K(t) - v^\mp(t)] dt}{(t-v) v_0^\pm(t)} + v_0^\pm(v) Q_n(v) \quad (t \in L_j, v \notin L_j) \quad (1.11)$$

Полученное решение может быть использовано при построении P -систем с особыми точками, находящимися и внутри, и на границе конуса.

Для рассматриваемого далее случая особых точек $r=0$, $r=\infty$ заданные функции и их трансформанты имеют специальную форму:

$$f_j(r) = C_j r^{-\gamma_j-3}, \quad g_j(r) = E_j r^{-\delta_j-2} \quad (j=1, 2) \quad (1.12)$$

$$\operatorname{Re} \gamma_1 < -3, \quad \operatorname{Re} \delta_1 > \lambda_1, \quad \operatorname{Re} \gamma_2 > \lambda_2, \quad \operatorname{Re} \delta_2 < \lambda_2$$

$$\sigma^+(v) = C_1 / (v - \gamma_1), \quad \sigma^-(v) = -C_2 / (v - \gamma_2)$$

$$v^+(v) = E_2 / (v - \delta_2), \quad v^-(v) = -E_1 / (v - \delta_1).$$

Поэтому решение находится непосредственно по обобщенной теореме Лиувилля и выражается однократными квадратурами

$$v^\pm(v) = \pm \frac{E_j}{v - \delta_j} \pm v_0^\pm(v) \left[\frac{C_j K(\gamma_j)}{(v - \gamma_j) v_0^\pm(\gamma_j)} - \frac{E_j}{(v - \delta_j) v_0^\pm(\delta_j)} + \delta_{j2} C \right] \quad (1.13)$$

Здесь функции $v^+(v)$ и $v^-(v)$ вычисляются при $j=1$ и $j=2$ соответственно; C — произвольная постоянная, определяемая из условия конечности энергии деформации вблизи окружности $r=1$, $\theta=\alpha$; δ_{jm} — символ Кронекера.

2. Пусть $w_{jm}^k = (u_{jm}^k, v_{jm}^k)$ — вектор перемещений, входящий в k -й элемент ($k=1, 2, \dots$) системы кусочно-однородных решений (P -системы) j -й задачи (1.1)–(1.3) при $f_j(r) \equiv 0$, $g_j(r) \equiv 0$, без особенностей в точках $r=\infty$ ($m=1$) или $r=0$ ($m=2$); $w_{jm}^{k1} = (u_{jm}^{k1}, v_{jm}^{k1})$ — вектор перемещений k -го элемента ($k=1, 2, \dots$) системы однородных решений (H -системы), не имеющих особенности в тех же точках, удовлетворяющих общему условию (1.1) и основным условиям $\sigma_0(r, \alpha) = 0$, $j=m$; $v(r, \alpha) = 0$, $j \neq m$ ($j, m = 1, 2$; $0 \leq r < \infty$). Аналогично индексами k, j, m будем обозначать компоненты тензоров напряжений, принадлежащих k -м элементам этих четырех P -систем и четырех H -систем. Как обычно, за главную часть элемента P -системы возьмем элемент H -системы, полагая

$$w_{jm}^k = w_{jm}^{k1} + w_{jm}^{k2} \quad (2.1)$$

Рассматриваемые H -системы имеют вид

$$w_{jm}^{k1}(r, \theta) = A_{jm}^k W(v_{sm}^k, \theta) \rho(r, -v_{sm}^k - 2) \quad (2.2)$$

где $r^t = \rho(r, t)$, A_{jm}^k — произвольные постоянные, v_{sm}^k — нули функций $D_s(v)$, $s=1+\delta_{jm}$, $\text{Re } v_{s1}^k > -2$, $\text{Re } v_{s2}^k < -2$.

Подставив (2.1), (2.2) в однородные условия (1.2), (1.3), получим для корректирующих векторов w_{jm}^{k2} четыре смешанные неоднородные задачи (1.1)–(1.3), где

$$f_1(r) = 0, \quad g_1(r) = -A_{11}^k D_1(v_{21}^k) \rho(r, -v_{21}^k - 2) \quad (2.3)$$

$$f_2(r) = -A_{21}^k D_2(v_{11}^k) \rho(r, -v_{11}^k - 3), \quad g_2(r) = 0 \quad (m=1)$$

$$f_1(r) = -A_{12}^k D_2(v_{12}^k) \rho(r, -v_{12}^k - 3), \quad g_1(r) = 0$$

$$f_2(r) = 0, \quad g_2(r) = -A_{22}^k D_1(v_{22}^k) \rho(r, -v_{22}^k - 2) \quad (m=2)$$

По своему типу условия (2.3) совпадают с условиями (1.12). Поэтому вектор $w_{jm}^{k2}(r, \theta)$ можно найти воспользовавшись решением (1.4), (1.5), (1.13):

$$w_{jm}^{k2}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} B_{jm}^k(v) W(v, \theta) r^{-v-2} dv \quad (2.4)$$

$$B_{jm}^k(v) = (-1)^j A_{jm}^k v_j^*(v) D_1^{-1}(v) R_{jm}^k(v)$$

$$R_{jm}^k(v) = \frac{(1 - \delta_{jm}) D_2(v_{1m}^k)}{(v - v_{1m}^k) \sigma_j^*(v_{1m}^k)} - \frac{\delta_{jm} D_1(v_{2m}^k)}{(v - v_{2m}^k) v_j^*(v_{2m}^k)} + \delta_{j2} C_m^k$$

$$v_j^*(v) = \delta_{j1} v_0^+(v) + \delta_{j2} v_0^-(v), \quad \sigma_j^*(v) = \delta_{j1} \sigma_0^-(v) + \delta_{j2} \sigma_0^+(v)$$

Произвольные постоянные C_m^k определяют здесь величину P_m^k главного вектора напряжений в элементах P -систем при $r > 1$, $j=2$. Удобно положить $P_m^k = 0$, тогда, учитывая, что при всех v_{21}^k , за исключением $v_{21}^k = -1$, элементы H -систем самоуравновешены и интегрированы (2.4) разлагаются по теореме о вычетах в ряды по элементам H -систем, из условия $R_{jm}^k(-1) = 0$ получим

$$C_1^k = D_2(v_{11}^k) [(1 + v_{11}^k) \sigma_0^+(v_{11}^k)]^{-1}, \quad C_2^k = -D_1(v_{22}^k) [(1 + v_{22}^k) v_0^-(v_{22}^k)]^{-1} \quad (2.5)$$

Однородным условиям (1.4), (1.3) удовлетворяет также решение $w_{21}^0(r, \theta)$ без особенностей в точках $r=0, r=\infty$. Оно соответствует задаче о сдавливании обоймы силой T и получается из w_{21}^k при $v_{11}^0 = -2$:

$$w_{21}^0(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i_{L_2}} \int B_{21}^0(v) W(v, \theta) r^{-v-2} dv \quad (2.6)$$

$$B_{21}^0(v) = v_0^-(v) D_1^{-1}(v) C_1^0, \quad C_1^0 = -T [\pi \sin^2 \alpha \sigma_0^+(-1)]^{-1}$$

При использовании P -систем удобно, хотя и необязательно [8], предварительно разложить контурные интегралы в ряды по вычетам, представляющим собой элементы H -систем. Учитывая соотношение $v_j^*(v) = D_1(v) D_2^{-1}(v) \sigma_j^*(v)$, получим (здесь и далее штрих означает дифференцирование по v):

$$w_{jm}^k(r_q, \theta) = A_{jm}^k \left\{ (1 - \delta_{qm}) W(v_{sm}^k, \theta) \rho(r_q, -v_{sm}^k - 2) + \right. \quad (2.7)$$

$$\left. + (-1)^q \sum_{n=0}^{\infty} C_{jm}^{kq}(v_{pq}^n) W(v_{pq}^n, \theta) \rho(r_q, -v_{pq}^n - 2) \right\}$$

$$C_{jm}^{kq}(v) = (-1) [\delta_{p2} \sigma_j^*(v) + \delta_{p1} v_j^*(v)] [D_p'(v)]^{-1} R_{jm}^k(v)$$

$$w_{21}^0(r_q, \theta) = (-1)^q \sum_{n=0}^{\infty} C_{21}^{0q}(v_{pq}^n) W(v_{pq}^n, \theta) \rho(r_q, -v_{pq}^n - 2)$$

$$C_{21}^{0q}(v) = [\delta_{p1} v_0^-(v) + \delta_{p2} \sigma_0^+(v)] [D_p'(v)]^{-1} C_1^0$$

$$(q=1, 2; r_1 > 1, r_2 < 1, p=2-\delta_{jq}, s=1+\delta_{jm})$$

Согласно [8], элементы H -систем при любых однородных условиях и при $v_{sm}^k + v_{sn}^l \neq -3$, т. е. при $l=k$ и $m \neq n$, удовлетворяют соотношению обобщенной ортогональности

$$\int_0^{\alpha} \left[\sum_{i=1}^4 d_i U_i(v_{sm}^k, \theta) U_{s-i}(v_{sn}^l, \theta) \right] \sin \theta d\theta = 0 \quad (2.8)$$

$$(d_i=1, i=1, 2; d_i=-1, i=3, 4)$$

$$U_1(v, \theta) = U(v, \theta), \quad U_2(v, \theta) = V(v, \theta)$$

$$U_3(v, \theta) = (v+2) t_1 t_3 [P_{v+2}^1(q) P_v^1(x) - P_v^1(q) P_{v+2}^1(x)]$$

$$U_4(v, \theta) = -(v+2) t_2 [(v+1) t_1 P_{v+2}^1(q) P_v(x) - (v+2) t_3 P_v^1(q) P_{v+2}(x)]$$

где $U_3(v, \theta)$ и $U_4(v, \theta)$ — трансформанты напряжений τ_{θ} и σ .

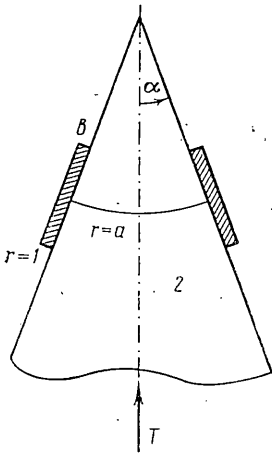
При условиях скользящей заделки для H -систем имеет место обычная ортогональность, вытекающая из свойств задачи Штурма — Лиувилля

$$\int_0^{\alpha} U_i(v_{1m}^k, \theta) U_i(v_{1n}^l, \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (i=\overline{1, 4}) \quad (2.9)$$

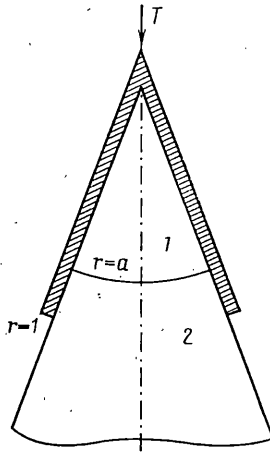
Ортогональность (2.8) и (2.9) позволяет сопрягать решения для конических областей соответственно с одинаковыми и различными упругими постоянными.

Далее на примерах показано, как использовать соотношения (2.8), (2.9) в методе кусочно-однородных решений.

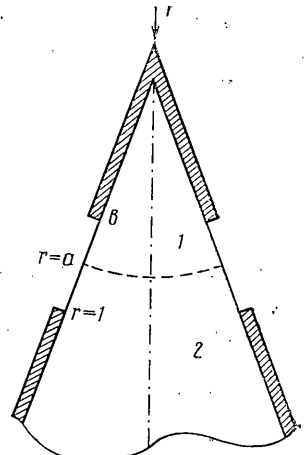
3. Рассмотрим составной конус, обжатый жестким коническим кольцом. Пусть бесконечный конус образован из конечного конуса 1 (с упругими постоянными G_1, μ_1) и усеченного бесконечного конуса 2 (G_2, μ_2), соприкасающихся по сферической поверхности $r=a < 1, 0 \leq \theta \leq \alpha$. К боковой поверхности конуса на участке $b \leq r \leq 1, b < a$ осевой силой T , которая уравно-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

вешивается на бесконечности, прижато без трения абсолютно жесткое коническое кольцо $\theta = \alpha$ (Фиг. 1). Тогда на боковой поверхности конуса имеют место смешанные граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, \alpha) = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad \sigma_{\theta}(r, \alpha) = 0 \quad (0 \leq r < b, 1 < r < \infty) \\ v(r, \alpha) = 0 \quad (b \leq r \leq 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

а на поверхности раздела $r = a$ — основные условия, зависящие от способа соединения конусов.

Условиям (3.1) удовлетворяет решение

$$w^1 = \sum_{k=1}^{\infty} w_{12}^k, \quad w^2 = w_{21}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} w_{21}^k \quad (3.2)$$

Полагая в (2.1), (2.2) и (2.4) $v_{11}^k = \{v_{11}^{k1} \rightarrow v_k \quad (k=1, 2, \dots), v_{11}^{k2} = v_k - 2 \quad (k=2, 3, \dots)\}$, $v_{12}^k = \{v_{12}^{k1} = -v_k - 3 \quad (k=1, 2, \dots), v_{12}^{k2} = -v_k - 1 \quad (k=2, 3, \dots)\}$, где $v_k > 0$ — нули функции $P_{v^1}(\cos \alpha)$ при $k=2, 3, \dots, v_1=0$, представим w_{12}^k и w_{21}^k в виде

$$\begin{aligned} w_{jm}^k(r, \theta) = \sum_{l=1}^2 A_{jm}^{kl} W(v_{1m}^{kl}, \theta) \rho(r, -v_{1m}^{kl} - 2) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_l} B_{jm}^k(v) W(v, \theta) \rho(r, -v - 2) dv \quad (j=1, 2; m=1, 2; j \neq m) \\ B_{jm}^k(v) = B_{jm}^{k1}(v) + B_{jm}^{k2}(v) \quad (k=2, 3, \dots), B_{jm}^k = B_{jm}^{k1} \quad (k=1) \\ B_{jm}^{kl}(v) = (-1)^j A_{jm}^{kl} v_j^*(v) D_1^{-1}(v) R_{jm}^{kl}(v) \quad (l=1, 2) \\ R_{jm}^{kl}(v) = D_2(v_{1m}^{kl}) / [(v - v_{1m}^{kl}) \sigma_j^*(v_{1m}^{kl})] + \delta_{j2} C_1^{kl} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $A_{12}^{k1}, A_{21}^{k1}, C_1^{k1} \quad (k=1, 2, \dots), A_{12}^{k2}, A_{21}^{k2}, C_1^{k2} \quad (k=2, 3, \dots)$ — произвольные постоянные. Решение w_{21}^0 определяется по формуле (2.6).

Элементы P -систем (2.1) построены в локальных координатах. В решении (3.2) удобно принять в качестве глобальных локальные координаты, связанные с элементами w_{21}^k и w_{21}^0 . Для записи w_{12}^k в глобальных координатах следует в (3.3) заменить r отношением r/b , заменить G_1 произведением $G_1 b^2$, в выражениях для перемещений (3.2) и напряжений ввести масштабные множители b и b^{-2} соответственно, например $w^1 = b \Sigma w_{12}^k$.

Пусть на поверхности раздела $r = a, 0 \leq \theta \leq \alpha$ поставлены условия полного сцепления конусов 1 и 2 без предварительного натяга

$$u^1 = u^2, \quad v^1 = v^2, \quad \tau_{r\theta}^1 = \tau_{r\theta}^2, \quad \sigma_r^1 = \sigma_r^2 \quad (3.4)$$

Подставим (3.2) в (3.4) и воспользуемся разложениями (2.7), записанными в глобальных координатах (w_{12}^{kl} при $r_1 = a/b > 1$, w_{12}^{kl} , w_{21}^{kl} при $r_2 = a < 1$). В образовавшихся двойных рядах поменяем порядки суммирования и введем новые неизвестные

$$Z_{12}^{kl} = A_{12}^{kl} \rho(a/b, -v_{12}^{kl} - 1), Z_{21}^{kl} = A_{21}^{kl} \rho(a, -v_{11}^{kl} - 1) \quad (l=1, 2) \quad (3.5)$$

Свертывая эти ряды по θ на основе соотношения ортогональности (2.9), взятого в виде

$$\int_0^\alpha U_i(v_{1m}^{kl}, \theta) Q_{it}(\theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (k \neq t; l=1, 2; m=1, 2) \quad (3.6)$$

$$Q_{it}(\theta) = P_{v_i}(\cos \theta) \quad (i=1, 4), Q_{it}(\theta) = P_{v_i'}(\cos \theta) \quad (i=2, 3)$$

получим нормальную систему Пуанкаре — Коха

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^2 (\alpha_{hl}^i Z_{12}^{kl} + \beta_{hl}^i Z_{21}^{kl}) + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{nkl}^i Z_{12}^{n1} + \delta_{nkl}^i Z_{21}^{n1}) + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (\gamma_{nkl}^i Z_{12}^{n2} + \delta_{nkl}^i Z_{21}^{n2}) = \varepsilon_k^i \quad (k=2, 3, \dots; i=\overline{1, 4}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\alpha_{hl}^i = I_{kl}^{i2}, \beta_{hl}^i = -I_{kl}^{i1} \quad (l=1, 2), \alpha_{12}^i = \beta_{12}^i = 0$$

$$\gamma_{nkl}^i = - \sum_{s=1}^{n_k} \rho(a/b, v_{12}^{nl} - v_{11}^{ks}) S_{12}^{nl}(v_{11}^{ks}) I_{ks}^{i1}$$

$$\delta_{nkl}^i = - \sum_{s=1}^{n_k} \rho(a, v_{11}^{nl} - v_{12}^{ks}) S_{21}^{nl}(v_{12}^{ks}) I_{ks}^{i2}$$

$$\varepsilon_k^i = \sum_{s=1}^{n_k} C_{21}^{i02}(v_{12}^{ks}) \rho(a, -v_{12}^{ks} - 1) I_{ks}^{i2}, \quad n_k = 2 - \delta_{kl}$$

$$I_{kl}^{im} = \int_0^\alpha U_i(v_{1m}^{kl}, \theta) Q_{ih}(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$S_{jm}^{kl}(v) = (-1)^j v_j^* (v) [D_1'(v)]^{-1} R_{jm}^{kl}(v) \quad (j=1, 2; m=1, 2; j \neq m)$$

Внедиагональные элементы матрицы этой системы убывают экспоненциально по номерам строк и столбцов. Скорость убывания коэффициентов в (3.7) определяют соотношения

$$|A_{12}^{kl}, A_{21}^{kl}| < k^2 \exp(-2\pi k \alpha^{-1} L), \quad L = \min[\ln(a/b), \ln(1/a)]$$

Ряды в (3.2) сходятся не медленнее, чем ряды с общими членами $k^{l/2} \exp[-\pi k \alpha^{-1} (2L + \ln b - \ln r)]$ в области 1 и $k^{l/2} \exp[-\pi k \alpha^{-1} (2L + \ln r)]$ в области 2.

Заметим, что осевое смещение кольца относительно бесконечно удаленной точки, равное величине поджатия конуса 2 на бесконечности, выражается формулой

$$\Delta = C_1^0 M(-2) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^2 A_{21}^{kl} M(-2) R_{21}^{kl}(-2) \quad (3.8)$$

$$M(v) = \sigma_0^+(v) [D_2''(v)]^{-1} U'(v, 0)$$

где постоянная C_1^0 связана с величиной силы T равенством (2.6). Харак-

тер особенности нормальных напряжений вблизи линии $r=1$, $\theta=\alpha$ имеет вид

$$\sigma_{\theta 21}^{kl}(r, \alpha) \sim G_2(1-\mu_2)^{-1} A_{21}^{kl} \pi^{-1/2} C_1^{kl} (1-r)^{-1/2} \quad (r \rightarrow 1-0) \quad (3.9)$$

$$C_1^{kl} = D_2(v_{11}^{kl}) [(1+v_{11}^{kl})\sigma_0 + (v_{11}^{kl})]^{-1} \quad (l=1, 2)$$

В частном случае $G_1=G_2$, $\mu_1=\mu_2$ задача (3.1), (3.4) превращается в задачу для сплошного однородного конуса; тогда, чтобы достичь наилучшей сходимости рядов (3.2), целесообразно положить $r_1=(ab)^{-1/2}$.

Если конусы соприкасаются без трения

$$u^1=u^2, \quad \sigma_r^1=\sigma_r^2, \quad \tau_{r\theta}^1=\tau_{r\theta}^2=0 \quad (r=a, 0 \leq \theta \leq \alpha) \quad (3.10)$$

то неизвестные (3.5) удовлетворяют нормальной системе (3.7), в которой, не внося других изменений, следует положить $\beta_{kl}^2, \delta_{nkl}^2, \varepsilon_k^2, \alpha_{kl}^3, \gamma_{nkl}^3$ равными нулю, $\alpha_{kl}^2=I_{kl}^{32}$, вместо I_{ks}^{21} подставить I_{ks}^{31} .

4. Рассмотрим составной конус, обжатый в вершине конической облоймой. Пусть обойма занимает область $0 \leq r \leq 1$, $\theta=\alpha$ (фиг. 2). В этом случае имеют место смешанные граничные условия $\tau_{r\theta}(r, \alpha)=0$ ($0 \leq r < \infty$), $\sigma_\theta(r, \alpha)=0$ ($1 < r < \infty$), $v(r, \alpha)=0$ ($0 \leq r \leq 1$), которым должно удовлетворять решение

$$w^1 = \sum_{k=1}^{\infty} w_{12}^{k1}, \quad w^2 = w_{21}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} w_{21}^k$$

1°. Пусть на поверхности раздела $r=a < 1$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ заданы условия (3.4). Тогда для неизвестных $Z_{12}^{kl}=A_{12}^{kl}\rho(a, -v_{12}^{kl}-1)$, $Z_{21}^{kl}=A_{21}^{kl}\rho(a, -v_{11}^{kl}-1)$ ($l=1, 2$) получим нормальную систему Пуанкаре — Коха

$$\sum_{i=1}^2 (\alpha_{kl}^i Z_{12}^{kl} + \beta_{kl}^i Z_{21}^{kl}) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{nkl}^i Z_{21}^{n1} + \sum_{n=2}^{\infty} \delta_{nkl}^i Z_{21}^{n2} = \varepsilon_k^i \quad (4.1)$$

$$(k=2, 3, \dots; i=\overline{1, 4})$$

2°. Если на поверхности раздела $r=a$ поставлены условия (3.10), то задача сводится к системе (4.1), в которой следует положить $\beta_{kl}^2=\delta_{nkl}^2=\varepsilon_k^2=\alpha_{kl}^3=0$, $\alpha_{kl}^2=I_{kl}^{32}$, сохранив для других коэффициентов формулы (3.7)

Рассмотрим некоторые частные случаи.

3°. Положим $G_1=0$ в условиях задачи 1°. Тогда при $r=a$ имеем $\sigma_r=\tau_{r\theta}=0$. Решение этой задачи определяет деформацию конической облоймой усеченного конуса со свободным сферическим торцом.

4°. Решение задачи 1° при $G_1=\infty$ соответствует обжатию усеченного конуса облоймой (подпятником), полностью сцепленной на торце $r=a$.

5°. Задача 2° при $G_1=\infty$ отличается от задачи 4° только тем, что обойма соприкасается с конусом при $\tau_{r\theta}=0$.

5. Рассмотрим однородный конус, соприкасающийся с двумя коническими облоймами (фиг. 3). Для того чтобы применить к этой задаче метод кусочно-однородных решений, введем вспомогательное сечение $r=a$. Тогда на боковой поверхности конуса решение должно удовлетворять смешанным условиям

$$\tau_{r\theta}(r, \alpha)=0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad \sigma_\theta(r, \alpha)=0 \quad (b < r < 1) \quad (5.1)$$

$$v(r, \alpha)=0, \quad (0 \leq r \leq b, 1 \leq r < \infty)$$

на сферической поверхности $r=a < 1$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ — основным условиям (3.4), на бесконечности — условию поджатия $\sigma_r=c$, где постоянная $c < 0$ задается из технических соображений (при $c \geq 0$ в зоне контакта с полубесконечной облоймой, очевидно, возникнет участок растягивающих напряжений).

Решение этой задачи, сразу удовлетворяющее условиям (5.1) и усло-

вию на бесконечности, будем искать в форме

$$w^1 = w_{21}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} w_{22}^k, \quad w^2 = w_{12}^1 + \sum_{k=-1}^{\infty} w_{11}^k \quad (5.2)$$

Согласно (2.1), (2.2), в локальных координатах имеем

$$w_{jm}^k(r, \theta) = A_{jm}^k W(v_{2m}^k, \theta) \rho(r, -v_{2m}^k - 2) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} B_{jm}^k(v) W(v, \theta) \rho(r, -v - 2) dv \quad (j=m=1, 2) \quad (5.3)$$

$$B_{jm}^k(v) = (-1)^j A_{jm}^k \sigma_j^*(v) D_2^{-1}(v) R_{jm}^k(v)$$

$$R_{jm}^k(v) = -D_1(v_{2m}^k) / [(v - v_{2m}^k) v_j^*(v_{2m}^k)] + \delta_{j2} C_m^k$$

где A_{11}^k ($k=-1, 0, 1, 2, \dots$), A_{22}^k ($k=1, 2, \dots$) — произвольные постоянные.

Элементы (5.3) порождаются нулями функции $D_2(v)$, среди которых имеются двукратные $v_{21}^{-1} = -1$ и $v_{21}^0 = -2$. Указанным нулям соответствуют элементарные решения

$$w_{11}^{k1}(r, \theta) = A_{11}^k W'(v_{21}^k, \theta) \rho(r, -v_{21}^k - 2) \quad (k=-1; 0) \quad (5.4)$$

задачи Митчела при $k=-1$ и задачи о перемещении конуса как жесткого тела при $k=0$. Функция w_{11}^{-1} является элементом P -системы краевой задачи (1.1), (1.3) с ненулевым главным вектором T . Функция w_{11}^0 определяет величину взаимного смещения конических обоей, пропорциональную T . При $\alpha \neq \pi/2$ функцию w_{12}^1 можно выписать по формуле (3.3), положив $k=1$; коэффициент A_{12}^1 находится сразу из условия на бесконечности: $A_{12}^1 = c[2(5-4\mu)(1+\mu)P_2^1(\cos \alpha)]^{-1}$. Если $\alpha = \pi/2$, функция $D_1(v)$ имеет двукратный нуль $v = -3$. В этом случае решение, аналогичное (5.4), легко выписать проинтегрировав по v функции $U_i(v, \theta)$.

Элементы P -систем в (5.2) запишем в глобальных координатах, связав их, как и в п. 3, с областью 2. Подставив (5.2) в условия сопряжения (3.4) и повторив преобразования, описанные в п. 3, при помощи обобщенной ортогональности (2.8) и равенства $v_{22}^k = -v_{21}^k - 3$ получим нормальную систему Пуанкаре — Коха:

$$Z_{1l}^k + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{nkl} Z_{11}^n + \gamma_{nkl} Z_{22}^n) = \varepsilon_{kl} \quad (k=1, 2, \dots; l=1, 2) \quad (5.5)$$

$$Z_{11}^{-1} = \varepsilon_{-1, 1} \quad (k=-1)$$

$$Z_{11}^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n02} Z_{11}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n01} Z_{22}^n = \varepsilon_{01} - \varepsilon_{02} \quad (k=0)$$

$$Z_{11}^k = A_{11}^k \rho(a, +v_{21}^k - 1), \quad Z_{22}^k = A_{22}^k \rho(a/b, -v_{22}^k - 1)$$

$$\beta_{nkl} = 0, \quad \gamma_{nkl} = 0$$

$$\beta_{nk2} = -\rho(a, v_{21}^n - v_{22}^k) C_{11}^{n2}(v_{22}^k)$$

$$\gamma_{nkl} = \rho(a/b, v_{22}^n - v_{21}^k) C_{22}^{n1}(v_{21}^k)$$

$$\varepsilon_{k1} = -\rho(a/b, -v_{21}^k - 1) C_{21}^{01}(v_{21}^k)$$

$$\varepsilon_{k2} = Z_{11}^{-1} \rho(a, v_{21}^{-1} - v_{22}^k) C_{11}^{-1,2}(v_{22}^k) + A_{12}^1 \rho(a, -v_{22}^k - 1) C_{12}^{12}(v_{22}^k)$$

Здесь $v_{21}^0 = v_{22}^0 = -2$. Заметим, что в системе (5.5) и неизвестные, и матричные элементы, вообще говоря, комплексны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боговой В. Г., Нуллер Б. М. Давление плоского кругового штампа на упругое полупространство с выемкой или включением // ПММ. 1974. Т. 35. Вып. 4. С. 669–679.
2. Боговой В. Г., Нуллер Б. М. Давление плоского кругового штампа на упругое полупространство при смешанных условиях на поверхности контакта // Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. 1971. Т. 95. С. 250–260.
3. Боговой В. Г., Нуллер Б. М. Давление кольцевого штампа на полупространство с включением // Сб. науч. тр. Хабар. политехн. ин-та. Общетехн. науки. 1972. Вып. 2. С. 18–29.
4. Лебедев Д. Ф., Нуллер Б. М. Круглая плита переменной толщины на упругом полупространстве // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 39–44.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
6. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого бесконечного конуса // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 339–348.
7. Нуллер Б. М. К решению задачи теории упругости об усеченном полом конусе // Инж. ж. МТТ. 1967. № 5. С. 102–110.
8. Нуллер Б. М. О новых обобщениях метода кусочнооднородных решений // Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. 1978. Т. 124. С. 20–30.

Ленинград

Поступила в редакцию
24.VII.1986