

УДК 539.3

**О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

КУЗНЕЦОВ С. В.

Многие задачи механики сплошной среды, включая задачи о напряженно-деформированном состоянии пористых сред, приводят к необходимости построения периодических решений. В настоящей статье для построения периодических решений применяется аппарат интегральных уравнений первого рода, позволяющий строить решения в перфорированных областях в R^n при любом $n \geq 2$, в отличие от получивших широкое распространение методов разложения комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили по эллиптическим и родственным мероморфным функциям [1, 2] и ограниченных, тем самым, двумерным случаем.

1. Основные соотношения. Рассматривается однородная изотропная перфорированная среда Ω в R^n . В Ω выполняются уравнения равновесия

$$A(\mathbf{u}) \equiv \Delta \mathbf{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

где ν – коэффициент Пуассона, предполагается, что $\nu \neq 0,5$.

На границах $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_m$ густот, расположенных в пределах выделенной из среды трансляционно-инвариантной ячейки, задаются операторы граничных условий

$$B_\alpha(\mathbf{u}) \equiv (a_\alpha \cdot \mathbf{u} + b_\alpha \cdot T(\mathbf{u}))_{\partial\Omega_\alpha} = \mathbf{g}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (1.2)$$

Каждая из границ $\partial\Omega_\alpha$ представляет собой вложение C^1 -подмногообразия размерности $n-1$; $a_\alpha, b_\alpha \in C(\partial\Omega_\alpha; R^n \otimes R^n)$ – матричные коэффициенты; T – оператор напряжений на соответствующей границе $\partial\Omega_\alpha$. Операторы B_α определяют собой наиболее употребительные типы граничных условий в теории упругости, например, при $a_\alpha = I, b_\alpha = 0$, где I – единичная матрица, – это условия в перемещениях на $\partial\Omega_\alpha$; при $a_\alpha = 0, b_\alpha = I$ – это условия в напряжениях; аналогичным образом формулируются и другие типы граничных условий.

На внешней поверхности $\partial\Omega_0$ выделенной ячейки Ω_0 формулируются условия периодичности

$$\mathbf{u}|_{\Gamma'_p} = \mathbf{u}|_{\Gamma_p}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l_p} \right|_{\Gamma'_p} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l_p} \right|_{\Gamma_p}, \quad p = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

где $\mathbf{l}_p, p = 1, \dots, n$ – базис в R^n группы трансляций рассматриваемой периодической структуры; $\Gamma'_p, \Gamma_p \subset \partial\Omega_0$ – противоположные грани выделенной ячейки. Заметим, что при таком выборе ячейки, гомеоморфной n -кубу, не учитываются элементы симметрии, определяемой подгруппами Браве (подгруппы ортогональных преобразований).

В дальнейшем рассматриваются регулярные решения краевых задач (1.1)–(1.3), т. е. решения класса $C^2(\Omega_0, R^n) \cap C^1(\bar{\Omega}_0, R^n)$. В случае решения внешних задач дополнительно требуется $\mathbf{u} = o(1/|x|), \nabla \mathbf{u} = o(1/|x|), |x| \rightarrow \infty$.

Замечания. 1. В то время как для граничных задач (1.1), (1.2) при определенных ограничениях на коэффициенты и правые части, известны теоремы существования и в некоторых случаях единственности, то для условий (1.3), представляющих собой условия с разрывными коэффициентами на негладком многообразии $\partial\Omega_0$ теорема

существования неизвестна, тем более неизвестно, существует ли регулярное решение краевой задачи (1.1)–(1.3). Однако, справедлива теорема единственности.

Теорема 1. Если для регулярных решений какой-либо из внешних краевых задач (1.1), (1.2) на $\partial\Omega_\alpha$, $\alpha=1, \dots, m$ известна теорема единственности, то краевая задача (1.1)–(1.3) допускает не более одного регулярного в Ω_0 решения.

Доказательство. Выделенная из среды ячейка Ω_0 представляет регулярную область (область с кусочно-гладкой границей, удовлетворяющей условию конуса). Для такой области применима теорема Гаусса – Остроградского. Применение этой теоремы к оператору (1.1) дает

$$\int_{\Omega_0} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) + E(\mathbf{v}, \mathbf{u})] d\omega = \sum_{\alpha=0}^m \int_{\partial\Omega_\alpha} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) d\omega' \quad (1.4)$$

где \mathbf{u} – регулярное в Ω_0 векторное поле, $\mathbf{u} \in C^1(\Omega_0, R^n) \cap C(\bar{\Omega}_0, R^n)$, $d\omega$ – мера Лебега в R^n ; $d\omega'$ – поверхностная мера Лебега. Билинейная форма E в (1.4) имеет вид [3, гл. 3, § 1]:

$$E(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.5)$$

Если $\mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}''$, где \mathbf{u}' , \mathbf{u}'' – два каких-либо регулярных решения краевой задачи (1.1)–(1.3), то подстановка \mathbf{u} в (1.4) дает

$$\int_{\Omega_0} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) d\omega' \quad (1.6)$$

Интеграл по $\partial\Omega_0$ в (1.6) разбивается на сумму интегралов

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) d\omega' = \sum_{p=1}^n \left[\int_{\Gamma_p} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) d\omega' + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) d\omega' \right]$$

причем, индуцированные на Γ_p , Γ_p' ориентации оказываются противоположными и, в силу (1.3),

$$\int_{\Omega_0} E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) d\omega = 0 \quad (1.7)$$

Известно, что единственными нетривиальными регулярными решениями (1.7) являются решения $\mathbf{u} \in G$, где G группа евклидовых движений в R^n . Таким образом, условие (1.7) в предположениях теоремы обеспечивает единственность регулярных решений краевой задачи (1.1)–(1.3).

2. Метод квазирешений. Для построения регулярного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) (квазирешения, если регулярное решение не существует) вводится интегральное представление

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^m \int_{\partial U_\alpha} K_x(\mathbf{y}) \cdot d\mu_\alpha + \int_{\partial U_0} T(K_x(\mathbf{y})) \cdot d\mu_0 \quad (2.1)$$

где ∂U_α , $\alpha=0, \dots, m$ – некоторые достаточно гладкие поверхности, несущие потенциалы (2.1), причем при $\alpha=1, \dots, m$ поверхности ∂U_α располагаются целиком внутри областей, ограниченных соответствующими $\partial\Omega_\alpha$, а ∂U_0 охватывает ячейку Ω_0 . Плотности потенциалов $d\mu^\alpha$ выбираются из пространств $M(\partial U_\alpha, R^n)$ векторных мер на ∂U_α со значениями в R^n . В представлении (2.1) $K_x(\mathbf{y})$ – фундаментальное решение Кельвина.

2. Представления, аналогичные (2.1), использовались ранее в несколько иной форме в связи с решениями краевых задач теории упругости и классической теории потенциала [3]. Известно, что сужение области определения потенциалов (2.1) до подпространств $M^d(\partial U_\alpha, R^n)$, порожденных векторными мерами с дискретными носителями, имеет нулевое ядро в произведении $M^d(\partial U_0, R^n) \times \dots \times M^d(\partial U_m, R^n)$ и всюду плотную область значений в $L^2(\partial \Omega_0, R^n) \times \dots \times L^2(\partial \Omega_m, R^n)$ [3, гл. 13].

Подстановка представления (2.1) в краевые условия (1.2), (1.3) даёт систему интегральных уравнений первого рода относительно плотностей $d\mu^\alpha$:

$$\sum_{\alpha=0}^m G_{\gamma\alpha} \cdot d\mu^\alpha = g_\gamma^* \quad (\gamma=0, \dots, m) \quad (2.2)$$

Интегральные операторы $G_{\gamma\alpha}$ вполне непрерывны, как операторы из $M(\partial U_\alpha, R^n)$, наделенных топологией Аренса (или более сильной), в $L^2(\partial \Omega_\gamma, R^n)$. В уравнениях (2.2) правая часть g_γ^* имеет вид $g_\gamma^* = g_\gamma$ ($\gamma=1, \dots, m$), $g_0^* = 0$, где g_0^* соответствуют однородным условиям (1.3). Аналогично, операторы $G_{0\alpha}$ соответствуют условиям (1.3) при подстановке в них представления (2.1).

Поставим вариационную задачу для отыскания квазирешения

$$\inf_B \sum_\gamma \rho_\gamma^2 \left(\sum_{\alpha=0}^m G_{\gamma\alpha} \cdot d\mu^\alpha; g_\gamma^* \right), \quad B = \prod_{\alpha=0}^m M^d(\partial U_\alpha, R^n)$$

где ρ_γ отвечает метрике $L^2(\partial \Omega_\gamma, R^n)$. Однако, эта вариационная задача не является корректно поставленной, поскольку вполне непрерывные операторы $G_{\gamma\alpha}$ не имеют непрерывных обратных в исследуемых функциональных пространствах. Но сужение области определения этой вариационной задачи до произведения компактов F_α в $M^d(\partial U_\alpha, R^n)$, $\alpha=0, \dots, m$ позволяет построить непрерывный обратный оператор для каждого из диагональных операторов $G_{\alpha\alpha}$, более того, справедлива

Теорема 2. Если компакты F_α в подпространствах $M^d(\partial U_\alpha, R^n)$ выпуклы и выполняются условия теоремы 1, то вариационная задача

$$\inf_F \sum_\gamma \rho_\gamma^2 \left(\sum_\alpha G_{\gamma\alpha} \cdot d\mu^\alpha; g_\gamma^* \right), \quad F = \prod_{\alpha=0}^m F_\alpha \quad (2.3)$$

является корректно поставленной на F .

Доказательство. Множество F будучи компактным и выпуклым в B отображается матричным интегральным оператором в левой части (2.2)

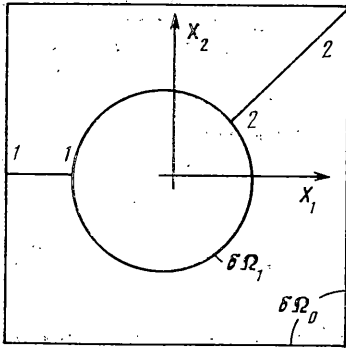
в аналогичное множество в $C = \prod_{\alpha=0}^m L^2(\partial \Omega_\alpha, R^n)$. В произведении C этот

образ является чебышевским множеством с непрерывным оператором метрической проекции на него [4]. Остается показать, что матричный оператор в левой части (2.2) однозначен на F .

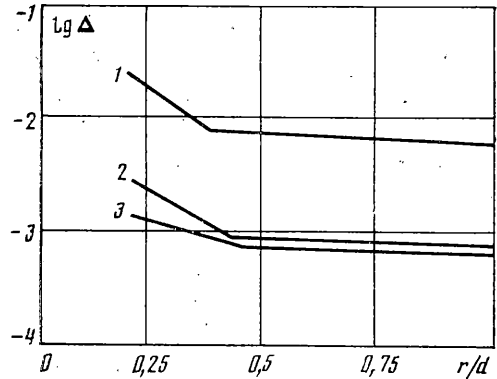
Предположим противное, тогда однородная система интегральных уравнений (2.2) будет иметь нетривиальное решение. В силу теоремы 1 это решение, будучи нулевым в Ω_0 , может быть аналитически продолжено в область U_0 , ограниченную поверхностями $\partial U_0, \dots, \partial U_m$. Таким образом, в окрестности каждой точки-носителя дискретной меры это продолжение равно нулю; в то же время, каждая из таких точек является полярным множеством с потенциалом, не ограниченным в любой ее окрестности. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

3. Метод построения квазирешений предложен в [5]. Изложенная вариационная процедура построения квазирешения интегральных уравнений (2.2) следует [4].

3. *Пример.* Определение поля перемещений в плоской двоякопериодической перфорированной среде тетрагонального типа (на фиг. 1 представлена ячейка периодичности). На границах $\partial \Omega_1$ задаются условия в



Фиг. 1



Фиг. 2

перемещениях: $u|_{\partial\Omega_1} = u_0$, $u = \text{const}$. Аналитическое решение этой задачи хорошо известно — это постоянное в Ω_0 поле перемещений.

Для построения поля перемещений в выделенной ячейке Ω_0 использовалось представление (2.1) с векторными дискретными мерами из соответствующих пространств $M^d(\partial U_\alpha, R^2)$, $\alpha = 0, 1$. В качестве несущих поверхностей потенциалов в (2.1) выбирались концентрические окружности, радиусы которых варьировались в диапазонах $(1/2r; r)$ и $(\sqrt{2}d; 2d)$ для ∂U_1 и ∂U_0 соответственно, здесь d — полупериод решетки, а r — радиус внутренней поверхности ∂U_1 . Симметрия структурной ячейки в расчетах не учитывалась.

4. При решении плоских задач для потенциалов простого слоя (для компонент содержащих логарифмическое ядро) с плотностью на ∂U_1 поверхность $\partial\Omega_1$ может оказаться критической [6, § 65]. В этом случае соответствующее интегральное уравнение имеет неединственное решение.

Для исключения неединственности решения, связанной с отмеченным выше обстоятельством, в расчетах проводилось масштабирование так, чтобы $\text{dist}(\partial U_1, \partial\Omega_1) > 1$; в этом случае логарифмическое ядро строго положительно на $\partial\Omega_1$ и неединственность решения невозможна.

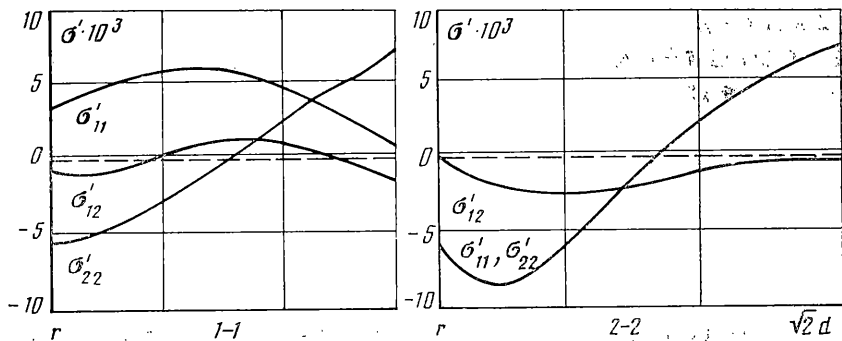
Дискретные меры из $M^d(\partial U_\alpha, R^2)$ выбирались равномерно распределенными на соответствующих поверхностях ∂U_α . Принадлежность заданным компактам F_α обеспечивалась введением множителей Лагранжа, что позволило свести вариационную задачу (2.3) к задаче отыскания седловой точки функции Лагранжа. Диаметры компактов F_α варьировались для достижения наилучшей точности результатов. Меры Лебега на $\partial\Omega_\gamma$, $\gamma = 0, 1$ в функционалах r_γ заменялись дискретными мерами, равномерно распределенными на соответствующих поверхностях $\partial\Omega_\gamma$. Решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из (2.3), как необходимое условие стационарности функции Лагранжа, проводилось итерационным методом Зейделя, применявшимся в аналогичном контексте в [7], там же установлена сходимость этого метода применительно к потенциальным системам функций.

На фиг. 2 приведены графики изменения точности Δ в зависимости от отношения r/d . Точность Δ оценивалась как

$$\sup_{x \in \Omega_0} \sup_{i=1,2} |u_i^0 - u_i| \quad (3.4)$$

где u^0 — точное решение, а u — приближенное. Построенные графики отвечают различным значениям параметра M — числа точек-носителей дискретных мер на каждой из поверхностей ∂U_α , при этом: 1 — $M = 15$; 2 — $M = 20$; 3 — $M = 30$.

Найденное в этом примере поле перемещений позволило определить безразмерное тензорное поле σ' , связанное с тензором напряжений σ соотношением $\sigma' = (\sigma/E) (|u_0|/d)$. На фиг. 3 приведены графики, характеризующие изменение компонент тензора σ' по характерным сечениям 1—1, 2—2,



Фиг. 3

показанным на фиг. 1. На этих графиках пунктиром обозначено известное точное решение для плоского напряженного состояния: $\sigma_0=0$. Сплошными линиями показаны компоненты σ' , определенные в ходе решения задачи при следующих значениях параметров: $\nu=1/4$; $r/d=1/2$; $M=30$. Построенные на фиг. 3 графики интересны тем, что по существу дают распределение ошибок в определении компонент тензора σ' .

Полученные результаты показали, что точность построенного решения незначительно повышается при увеличении r/d , причем предельный случай $r/d=1$ для рассматриваемого метода не является исключительным. Верхняя грань в (3.1) почти всегда достигалась в угловых точках ячейки, только при $r/d=1$ точки, где достигалась верхняя грань (3.1) располагались на линии главного периода. Увеличение числа M дискретных точек в представлении (2.1), как и следовало ожидать, улучшало оценку (3.1). Однако обнаружилось, что увеличение M сверх 30 практически не оказывало влияния на повышение точности результатов, поскольку ввиду плохой обусловленности системы (2.2), приходилось существенно сужать диаметры компактов. Хотя достигнутая в рассматриваемом примере точность результатов значительно превосходит потребности большинства практических задач, дальнейшее повышение точности следует ожидать при переходе к мерам dm^2 , отличным от дискретных, а также при использовании адаптивных алгоритмов, позволяющих определять форму несущих поверхностей потенциалов в процессе решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
2. Григолюк Э. И., Фильшинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
3. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелайшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
4. Иванов В. К., Васин В. В., Тамана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
5. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1962. Т. 145, № 2. С. 270-272.
6. Мустелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. Алексидзе М. А. О приближенном решении некоторых бесконечных систем уравнений // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1968. Т. 179. № 5. С. 1019-1022.

Москва

Поступила в редакцию
30.III.1987