МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1988

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ЛОКАЛЬНЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

МОРОЗ Н. Г., ПРОТАСОВ В. Д., РОМАНОВ С. В.

Построение решения задачи о действии локальных воздействий на упругое анизотропное пространство имеет значение как в самостоятельном смысле, так и при исследовании прикладных задач. В последнем случае эти решения могут играть роль фундаментальных и использоваться в качестве ядер при построении соответствующих интегральных уравнений. В известных подходах построения интегральных уравнений теории упругости, как правило, используются интегральные представления, где в качестве фундаментальных решений берется решение типа Кельвина [1]. Очевидно, что возможна постановка задачи, когда вычисление компонент тензора напряжений проводится при непосредственном решении интегральных уравнений без промежуточного перехода от вектора перемещений. В таком подходе необходимо использование фундаментальных решений, которые описывают реакцию на локальную деформацию (дислокацию) бесконечного пространства, занятого рассматриваемой средой. В публикуемой работе рассмотрен подход, позволяющий путем сравнительного анализа построить по тензору Грина фундаментальные решения, соответствующие наличию локальных дислокаций в анизотропной среде.

1. Рассмотрим тело V, ограниченное поверхностью $\Gamma=\Gamma_u+\Gamma_\sigma$, находящееся в равновесии под воздействием массовых сил F_i, поверхностных сил t_i и наложенных деформаций γ_{ij}. Соответствующие им поля перемещений, деформаций и напряжений обозначим через u_i, ε_{ij}, σ_{ij}. Введем в рассмотрение вторую систему сил F_i^*, t_i^* и наложенных дислокаций γ_{ij}^*, которым ставятся в соответствие u_i^*, ε_{ij}^* и σ_{ij}^*. Причем обе совокупности воздействий не зависят друг от друга. Из принципа виртуальности работ [1] имеем

$$\int\limits_V \sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}\,dV=\int\limits_V F_i^*u_i\,dV+\int\limits_\Gamma t_i^*u_i\,d\Gamma$$

$$\int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*\,dV=\int\limits_V F_iu_i^*\,dV+\int\limits_\Gamma t_iu_i^*\,d\Gamma \tag{1.1}$$

$$e_{ij}=e_{ij}+\gamma_{ij},\qquad \varepsilon_{ij}^*=e_{ij}^*+\gamma_{ij}^*$$

где e_{ij}, e_{ij}^* — упругие составляющие тензора деформаций. В силу равенства $\sigma_{ij}^*e_{ij}=\sigma_{ij}e_{ij}^*$ из соотношения (1.1) получим

$$\int\limits_V F_i^*u_i\,dV+\int\limits_\Gamma t_i^*u_i\,d\Gamma-\int\limits_V\sigma_{ij}^*\gamma_{ij}\,dV=\int\limits_V F_iu_i^*\,dV+\int\limits_\Gamma t_iu_i^*\,d\Gamma-\int\limits_V\sigma_{ij}^*\gamma_{ij}\,dV \tag{1.2}$$

Положим, что система воздействий, помеченных звездочкой, связана с действием единичной силы $F_i^*=\delta_{ij}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ в неограниченной среде V_∞ при $\gamma^*=0$. Тогда

$$u_i^*(\mathbf{p})=U_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\delta_j(\mathbf{q}),\qquad t_i^*(\mathbf{p})=T_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})\delta_j(\mathbf{q}) \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ij}^*(\mathbf{p})=S_{ijk}(\mathbf{p},\mathbf{q})\delta_k(\mathbf{q}),\qquad t_i^*(\mathbf{p})=\sigma_{ij}^*n_j=S_{ijk}(\mathbf{p},\mathbf{q})n_j(\mathbf{p})\delta_k(\mathbf{q})\quad (i,j=1,2,3)$$

Подставляя соотношение (1.3) в (1.2) и учитывая свойства обобщенных функций, получим

$$u_j(\mathbf{q})=\int\limits_{\Gamma}[U_{ij}(\mathbf{P},\mathbf{q})t_i(\mathbf{P})-T_{ij}(\mathbf{P},\mathbf{q})u_i(\mathbf{P})]d\Gamma(\mathbf{P})+$$
$$+\int\limits_{V}[U_{ij}(\mathbf{p},\mathbf{q})F_i(\mathbf{p})-S_{ijk}(\mathbf{p},\mathbf{q})\gamma_{ik}(\mathbf{p})]dV(\mathbf{p}) \tag{1.4}$$

Положим теперь, что система воздействий со звездочкой связана с действием единичной дислокации, т. е. $\gamma_{ij}{}^*=\delta_{ijkl}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ при $F_i=0$ в V_∞, где δ_{ijkl} — матрица, элементы которой имеют вид $\delta_{ijkl}=1$, $(i,j)=(k,l)$; $\delta_{ijkl}=0$, $(i,j)\neq(k,l)$.

Тогда функции $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{t}^*$ и $\boldsymbol{\sigma}^*$ можно представить в виде

$$u_i{}^*(\mathbf{p})=L_{ikl}(\mathbf{p},\ \mathbf{q})\delta_{kl}(\mathbf{q}),\qquad \sigma_{ij}{}^*(\mathbf{p})=Z_{ijkl}(\mathbf{p},\ \mathbf{q})\delta_{kl}(\mathbf{q}) \tag{1.5}$$
$$t_i{}^*(\mathbf{p})=Q_{ikl}(\mathbf{p},\ \mathbf{q})\delta_{kl}(\mathbf{q})=Z_{ijkl}(\mathbf{p},\ \mathbf{q})n_j(\mathbf{p})\delta_{kl}(\mathbf{q})$$

где δ_{kl} — компоненты единичной дислокации в точке $\mathbf{q}$; $Z(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ — функция, аналогичная функции $U(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$ и определяющая напряжения в точке $\mathbf{p}$ при воздействии единичной дислокации в точке $\mathbf{q}$.

Подставляя соотношение (1.5) в (1.2), получим

$$\sigma_{kl}(\mathbf{q})=\int\limits_{\Gamma}[L_{ikl}(\mathbf{P},\mathbf{q})t_i(\mathbf{P})-Q_{ikl}(\mathbf{P},\mathbf{q})u_i(\mathbf{P})]d\Gamma(\mathbf{P})+$$
$$+\int\limits_{V}[L_{ikl}(\mathbf{p},\mathbf{q})F_i(\mathbf{p})+Z_{ijkl}(\mathbf{p},\mathbf{q})\gamma_{ij}(\mathbf{p})]dV(\mathbf{p}) \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) позволяет по известным граничным и объемным воздействиям определять компоненты тензора напряжений в рассматриваемой среде. Сложность численной реализации (1.6) заключается в построении фундаментальных функций (решений) $\mathbf{L}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$. Получим их путем сопоставления решений (1.4) и (1.6). Введем линейный дифференциальный оператор $\mathbf{D}_q(\mathbf{F})={}^1/_2[F_{i,j}(\mathbf{q})+F_{j,i}(\mathbf{q})]$, а физический закон деформирования тела запишем в форме $\sigma_q=\mathbf{CD}_q\mathbf{u}(\mathbf{q})$, где $\mathbf{C}$ — тензор упругости четвертого ранга. С учетом этих соотношений из (1.4) получим интегральное уравнение

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q})=\int\limits_{\Gamma}[\mathbf{CD}_q\mathbf{U}(\mathbf{P},\mathbf{q})t(\mathbf{P})-\mathbf{CD}_q\mathbf{T}(\mathbf{P},\mathbf{q})\mathbf{u}(\mathbf{P})]d\Gamma(\mathbf{P})+$$
$$+\int\limits_{V}\{\mathbf{CD}_q\mathbf{U}(\mathbf{p},\mathbf{q})\mathbf{F}(\mathbf{p})-\mathbf{C}[\mathbf{D}_q\mathbf{S}(\mathbf{p},\mathbf{q})+\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})]\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{p})\}dV(\mathbf{p}) \tag{1.7}$$

Сравнивая (1.6) и (1.7) для фундаментальных решений $\mathbf{L}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}$, имеем

$$\mathbf{L}(\mathbf{p},\ \mathbf{q})=\mathbf{CD}_q\mathbf{U}(\mathbf{p},\ \mathbf{q}),\ \mathbf{Q}(\mathbf{p},\ \mathbf{q})=\mathbf{CD}_q\mathbf{T}(\mathbf{p},\ \mathbf{q}), \tag{1.8}$$
$$\mathbf{Z}(\mathbf{p},\ \mathbf{q})=-\mathbf{C}\,[\mathbf{D}_q\mathbf{S}(\mathbf{p},\ \mathbf{q})+\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})]$$

Таким образом, соотношение (1.8) позволяет по известным решениям для $\mathbf{U}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $\mathbf{T}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ построить фундаментальные решения, вызываемые единичными дислокациями.

2. Следуя [2], фундаментальные решения $U_{ij}(\mathbf{r})$ для анизотропной среды представим в виде

$$U_{ij}(\mathbf{r})=\frac{1}{8\pi^2|\mathbf{r}|}G_{ij}(\boldsymbol{\rho}),\qquad G_{ij}(\boldsymbol{\rho})=\int\limits_0^{2\pi}Q_{ij}^{-1}(\mathbf{z})\,d\varphi \tag{2.1}$$
$$|\mathbf{r}|=[(x_i-y_i)(x_i-y_i)]^{1/2},\ \boldsymbol{\rho}=(\mathbf{x}-\mathbf{y})/|\mathbf{r}|$$

где x_i, y_i — координаты точек **p** и **q** соответственно; $Q_{ij}^{-1}(\mathbf{z})=D_{ij}/D=(6D)^{-1}\varepsilon_{jqm}\varepsilon_{irn}Q_{qr}Q_{mn}$ — однородная функция компонент единичного вектора **z**, лежащего в плоскости, образованной векторами **r** и $\boldsymbol{\xi}$ и ортогонального **r**; $\boldsymbol{\xi}$ — вектор в пространстве преобразования Фурье; φ — угол в плоскости, ортогональной к радиус-вектору и отсчитываемый от произвольно выбранного направления в этой плоскости; $D(\mathbf{z})$, $D_{ij}(\mathbf{z})$ — детерминант и алгебраические дополнения основной системы уравнений в форме Ламе в пространстве преобразований Фурье; $Q_{ik}(\mathbf{z})=C_{ijkl}z_jz_l$ — матрица коэффициентов алгебраической системы уравнений в пространстве преобразований Фурье. При этом интегрирование в выражении (2.1) проводится по всем возможным направлениям вектора **z**. Вводя преобразование, переводящее систему координат до совпадения оси x_3 с направлением вектора $\boldsymbol{\rho}$ и имеющее вид $\rho_i=A_{ij}\rho_j'$, $\rho_j'=\delta_{j3}$, где A — ортогональная матрица, представляемая в форме

$$A=\begin{Vmatrix} \rho_2/R & \rho_1\rho_2/R & \rho_1 \\ -\rho_1/R & \rho_2\rho_3/R & \rho_2 \\ 0 & -R & \rho_3 \end{Vmatrix}, \quad R=(1-\rho_3^2)^{1/2}$$

и единичный вектор **e**, компоненты которого равны $e_1=\cos(\varphi)$, $e_2=\sin(\varphi)$, $e_3=0$. Компоненты вектора **z** выразим посредством соотношения $z_i=A_{ij}e_j$, а выражение (2.1) представляется в виде простого интеграла

$$G_{ij}(\boldsymbol{\rho})=\int_0^{2\pi}Q_{ij}^{-1}(\mathbf{e})\,d\varphi, \qquad Q_{ij}(\mathbf{e})=Q_{ij}^{-1}(\mathbf{z})\,|_{z_k=A_{kn}e_n} \tag{2.2}$$

Функции S_{ijm} и T_{im}, входящие в уравнение (1.4), в данном случае представляются следующими выражениями

$$S_{ijm}=-(16\pi^2|\mathbf{r}|^3)^{-1}C_{ijkl}[\rho_lG_{km}+\rho_kG_{lm}+ +(\rho_l\rho_s-\delta_{sl})\partial G_{km}/\partial\rho_s+(\rho_k\rho_s-\delta_{ks})\partial G_{lm}/\partial\rho_s] \tag{2.3}$$

$$T_{im}=S_{ijm}n_j.$$

Используя представление (1.8) из (2.1) для построения фундаментального решения **L** получим следующее выражение

$$L_{ijm}=(16\pi^2|\mathbf{r}|^3)^{-1}C_{ijkl}[\rho_lG_{mk}+\rho_kG_{ml}+ (\rho_l\rho_s-\delta_{sl})\partial G_{mk}/\partial\rho_s+(\rho_k\rho_s-\delta_{sk})\partial G_{ml}/\partial\rho_s \tag{2.4}$$

Выражение для **Z** будет иметь вид

$$Z_{ijkl}(\mathbf{r})=(16\pi^2|\mathbf{r}|^3)^{-1}G_{ijmn}[S_{klm,\,n}(\boldsymbol{\rho})+S_{kln,\,m}(\boldsymbol{\rho})]+ +C_{ijmn}\delta_{mnkl}\delta(\mathbf{r})$$

$$\begin{gathered} Z_{rsk,\,l}=G_{rspt}\{(\delta_{tl}-3\rho_t\rho_l)G_{pk}+(\delta_{pl}-3\rho_p\rho_l)G_{tk}+ \\ +(\delta_{tl}\rho_n+2\delta_{nl}\rho_t+2\delta_{nt}\rho_l-5\rho_l\rho_t\rho_n)\partial G_{pk}/\partial\rho_n+ \\ +(\delta_{pl}\rho_n+2\delta_{nl}\rho_p+2\delta_{np}\rho_l-5\rho_l\rho_p\rho_n)\partial G_{tk}/\partial\rho_n+ \\ +(\delta_{ml}-\rho_m\rho_l)[(\rho_n\rho_t-\delta_{nt})\partial^2G_{rk}/\partial\rho_n\partial\rho_m+ \\ +(\rho_n\rho_p-\delta_{np})\partial^2G_{tk}/\partial\rho_n\partial\rho_m]\} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Для функции **Q** аналогично из (1.8) с использованием (2.2) получим

$$Q_{ijs}(\mathbf{r})=(16\pi^2|\mathbf{r}|^3)^{-1}G_{ijkl}[T_{sk,\,l}(\boldsymbol{\rho})+T_{sl,\,k}(\boldsymbol{\rho})] \tag{2.6}$$

$$T_{ik,\,l}(\boldsymbol{\rho})=S_{ijk,\,l}(\boldsymbol{\rho})n_j$$

Учитывая, что $Q_{ik}Q_{jk}^{-1}=\delta_{ij}$, получим

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial\rho_k}=-\int_0^{2\pi}Q_{ik}^{-1}(\mathbf{e})\,\frac{\partial Q_{kn}(\mathbf{e})}{\partial\rho_k}\,Q_{nj}^{-1}(\mathbf{e})\,d\varphi$$

$$\frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial\rho_n\partial\rho_m}=\int\limits_0^{2\pi}\Bigg[2Q_{ik}^{-1}(\mathbf{e})\frac{\partial Q_{kp}(\mathbf{e})}{\partial\rho_n}Q_{pl}^{-1}(\mathbf{e})\frac{\partial Q_{ls}(\mathbf{e})}{\partial\rho_m}Q_{sj}^{-1}(\mathbf{e})-$$

$$-Q_{ik}^{-1}(\mathbf{e})\frac{\partial^2 Q_{kp}(\mathbf{e})}{\partial\rho_n\partial\rho_m}Q_{pj}^{-1}(\mathbf{e})\Bigg]d\varphi$$

$$\frac{\partial Q_{kn}(\mathbf{e})}{\partial\rho_l}=c_{kjnr}e_\alpha e_\beta\left(\frac{\partial A_{j\alpha}}{\partial\rho_l}A_{r\beta}+A_{j\alpha}\frac{\partial A_{r\beta}}{\partial\rho_l}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Q_{kn}(\mathbf{e})}{\partial\rho_m\partial\rho_l}=C_{kjnr}e_\alpha e_\beta\Bigg(\frac{\partial^2 A_{j\alpha}}{\partial\rho_m\partial\rho_l}A_{r\beta}+$$

$$+\frac{\partial A_{j\alpha}}{\partial\rho_m}\frac{\partial A_{r\beta}}{\partial\rho_l}+\frac{\partial A_{j\alpha}}{\partial\rho_l}\frac{\partial A_{r\beta}}{\partial\rho_m}+A_{j\alpha}\frac{\partial^2 A_{r\beta}}{\partial\rho_m\partial\rho_l}\Bigg)$$

В случае изотропного тела имеем

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

$$Q_{ik}(\mathbf{z})=(\mu+\lambda)z_iz_k+\mu\delta_{ik}$$

$$Q_{ik}^{-1}(\mathbf{z})=(\delta_{ik}-{}^1/_2(1-\nu)^{-1}z_iz_k)/\mu.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^{2\pi}e_\alpha e_\beta\,d\varphi=\pi\delta_{\alpha\beta}$$

из соотношения (2.2) после ряда преобразований получим

$$G_{ij}(\boldsymbol{\rho})=\pi\,[2\mu(1-\nu)]^{-1}[(3-4\nu)\delta_{ij}+\rho_i\rho_j]$$

$$\frac{\partial G_{km}}{\partial\rho_r}=\pi[2\mu(1-\nu)]^{-1}(\rho_k\delta_{mr}+\rho_m\delta_{kr})$$

$$\frac{\partial^2 G_{km}}{\partial\rho_r\partial\rho_l}=\pi[2\mu(1-\nu)]^{-1}(\delta_{kl}\delta_{mr}+\delta_{ml}\delta_{kr})$$

а функции L_{ijm}, Z_{ijs} и Q_{ijr} в данном случае приводятся к виду

$$L_{ijm}=[8\pi|\mathbf{r}|^2(1-\nu)]^{-1}[(1-2\nu)(\delta_{im}\rho_j+\delta_{jm}\rho_i-\delta_{ij}\rho_m)+3\rho_i\rho_j\rho_m]$$

$$Z_{ijrs}=-\mu\,[4\pi|\mathbf{r}|^3(1-\nu)]^{-1}[(1-2\nu)(\delta_{is}\delta_{jr}+\delta_{js}\delta_{ir}+$$
$$+3\delta_{ij}\rho_r\rho_s+3\delta_{rs}\rho_i\rho_j)+3\nu(\delta_{ir}\rho_s\rho_j+\delta_{jr}\rho_s\rho_i+$$
$$+\delta_{is}\rho_r\rho_i)-(1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{rs}-15\rho_i\rho_j\rho_r\rho_s]$$

$$Q_{ijr}=-\mu\,[4\pi|\mathbf{r}|^3(1-\nu)]^{-1}[3\rho_ln_l\{(1-2\nu)\delta_{ij}\rho_r+$$
$$+\nu(\delta_{ir}\rho_j+\delta_{jr}\rho_i)-5\rho_i\rho_j\rho_r\}+$$
$$+(1-2\nu)(\delta_{jr}n_i+\delta_{ir}n_j+3\rho_i\rho_jn_r)+$$
$$+3\nu(\rho_i\rho_rn_i+\rho_i\rho_rn_j)-(1-4\nu)\delta_{ij}n_r]$$

В случае плоской задачи фундаментальное решение имеет вид

$$U_{ij}(\mathbf{r})=-\frac{1}{\pi\Delta}\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{2}A_{ij}^{(k)}\ln\sigma_k$$

$$\sigma_k=(x_1-y_1)+\alpha_k(x_2-y_2)$$

$$A_{11}^{(k)}=(C_{2222}\alpha_k^2+2C_{2212}\alpha_k+C_{1212})d_k$$

$$A_{12}^{(k)}=A_{21}^{(k)}=-[C_{2212}\alpha_k^2+(C_{1122}+C_{1212})\alpha_k+C_{1112}]dk$$

$$A_{22}^{(k)}=(C_{1212}\alpha_k^2+2C_{1112}\alpha_k+C_{1111})\,d_k, \qquad \Delta=C_{2222}C_{1212}-C_{2212}^2$$

$$d_1^{-1}=(\alpha_1-\bar\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\bar\alpha_2), \quad d_2^{-1}=(\alpha_2-\bar\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\bar\alpha_2)$$

где α_k — корни характеристического уравнения плоской задачи. Действуя оператором напряжений [3], для функций S_{ijr} и T_{ir} в данном случае получим

$$S_{ijr}=\frac{1}{\pi\Delta}\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{2}\frac{A_{rl}^{(k)}}{\sigma_k}(C_{ij1l}+\alpha_k C_{ijl2})$$

$$T_{ir}=S_{ijr}n_j \quad (i,\ j,\ r,\ l=1,\ 2)$$

Поступая так же, как при выводе соотношений (2.4), для фундаментальных решений L_{ijs} и Z_{ijrs} получим следующие выражения

$$L_{ijr}=\frac{1}{\pi\Delta}\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}\left[\frac{A_{rl}}{\sigma_k}(C_{ij1l}+\alpha_k C_{ijl2})\right]$$

$$Z_{ijrs}=-\frac{1}{\pi\Delta}\,\mathrm{Im}\sum_{t=1}^{2}\left[\frac{A_{kp}^{(t)}}{\sigma_t^2}(C_{ijk1}+\alpha_t C_{ijk2})(C_{rskp}+\alpha_t C_{rspk})\right], \qquad Q_{ijr}=Z_{ijrs}n_s$$

Таким образом, построенные решения (2.3)—(2.5) позволяют формулировать задачу сразу в напряжениях, что в конечном итоге упрощает алгоритмизацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Лифшиц И. М., Розенцвейг А. М.* О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. Вып. 9. С. 783–791.
3. *Башелейшвили М. О.* Решение плоских граничных задач статики анизотропного тела // Тр. ВЦ АН ГССР, 1963. Т. 3. С. 93–139.

Москва

Поступила в редакцию 2.III.1987