

УДК 539.3

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНО-СЛОИСТОГО МАССИВА
 КАК НЕПРЕРЫВНОЙ СОВОКУПНОСТИ ТОНКИХ ПЛАСТИН**

САЛГАНИК Р. Л.

При деформировании прямолинейно-слоистого массива с межслойными связями, допускающими значительные взаимные сдвиги слоев, последние могут работать на изгиб подобно пластинам. Когда таких слоев-пластин достаточно много и они достаточно тонки, деформирование состоящего из них массива можно описывать в приближении сплошной среды.

С использованием соображений, аналогичных примененным в [1] для такого описания изгиба в массиве, состоящем из балок, в работе [2] рассматривался более общий случай массива из слоев-пластин с учетом их продольного нагружения (там же дан краткий обзор предыдущих исследований). Предполагалось, что касательные напряжения на межслойных границах относительно невелики и их влиянием на прогиб слоев можно пренебречь.

В данной работе учитывается действие этих напряжений (для массива из балок эффекты, связанные с трением на границах между ними, на основе подхода [1] рассматривались в [3]).

Для вывода уравнений деформирования и граничных условий использован вариационный способ. Для многослойного пакета из упругих слоев с упругими межслойными связями при его рассмотрении в приближении сплошной среды вариационный вывод уравнений деформирования и граничных условий на нормальных к слоям границах дан в [4] в предположении, что прогибы всех слоев одинаковы. Такое предположение соответствует условиям, когда характерная длина перераспределения нагрузки вдоль пакета велика по сравнению с его толщиной. Изложение дальнейших результатов, полученных на основе вариационного подхода в механике многослойных конструкций, содержится в [5].

Рассмотрение в данной работе, как и в [2], проводится на основе описания слоистого массива как сплошной среды для условий, когда существенны изменения прогиба от слоя к слою. Это подчеркивается употреблением слова «массив». Для справедливости такого описания надо, чтобы заметные изменения напряженно-деформированного состояния в массиве происходили на длинах, гораздо больших толщин слоев. Найдя распределение прогиба в таком приближении, можно по обычным формулам теории изгиба найти напряжения в любом слое.

1. Равновесие слоя под действием нормальных и касательных напряжений. Слой будем рассматривать как тонкую пластину. Ее срединную плоскость примем за плоскость $z=0$ декартовой системы координат x, y, z . Будем использовать в дальнейшем также обозначения $x_1=x, x_2=y, x_3=z$. Пластину считаем упругой с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , ее толщину обозначим h . На поверхностях $z=\pm 1/2 h$ считаем заданными напряжения $\sigma_{xz}^{\pm}, \sigma_{yz}^{\pm}, \sigma_{zz}^{\pm}$. Считаем, что пластина ограничена поверхностью прямого цилиндра с образующей, параллельной оси z . Линию пересечения этой поверхности со срединной плоскостью (контур пластины) обозначим через Γ . Заключенную внутри Γ область срединной плоскости, как и площадь этой области, обозначим S . Упругая энергия пластины в расчете на единицу ее площади складывается из энергии ее изгиба Ψ_1 и остальной части Ψ_2 . Считая прогиб пластины малым по сравнению с характерным пролетом и принимая во внимание ее тонкость, можно пренебречь при записи выражения Ψ_1 через прогиб w срединной плоскости пластины напряжениями, приложенными к поверхностям $z=\pm 1/2 h$, ввиду большого преобладания вклада от продольных напряжений, связанных с изгибом. При этом [6]:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \quad (1.1)$$

$$D = \frac{1}{2} E h^3 (1 - \nu^2)^{-1}$$

В том же приближении $\Psi_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ik} u_{ik} h$, где σ_{ik} , u_{ik} — средние по толщине пластины компоненты тензоров напряжений и деформаций (здесь и в дальнейшем по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование по всем принимаемым ими значениям). Из закона Гука имеем

$$u_{xx} = E^{-1} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \dots, u_{xy} = (1 + \nu) E^{-1} \sigma_{xz}, \dots \quad (1.2)$$

Здесь многоточия означают соотношения, получающиеся из выписанных круговыми перестановками индексов x, y, z ; напряжения $\sigma_{iz} = \frac{1}{2} (\sigma_{iz}^+ + \sigma_{iz}^-)$ — заданные величины. При помощи (1.2) выражение для Ψ_2 можно привести к виду

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} h [(\sigma_{\alpha\beta} (u_{\alpha\beta} - \nu E^{-1} \sigma_{zz} \delta_{\alpha\beta}) + 2(1 + \nu) E^{-1} \sigma_{\alpha z}^2 + E^{-1} \sigma_{zz}^2)] \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем греческие индексы принимают значения 1, 2. Вводя средние по толщине пластины смещения u_α , имеем [6]:

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \frac{\partial w}{\partial x_\beta} \quad (1.4)$$

(последним слагаемым здесь можно пренебречь, когда изгиб слабый, т. е. $w \ll h$). Из (1.2) находим

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}' + [\nu / (1 - \nu)] \sigma_{zz} \delta_{\alpha\beta}; \quad \sigma_{\alpha\beta}' = [E / (1 - \nu^2)] [\nu u_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1 - \nu) u_{\alpha\beta}] \quad (1.5)$$

Здесь $\sigma_{\alpha\beta}'$ — напряжения при плоском напряженном состоянии.

Для упругой энергии пластинки имеем выражение

$$F = \int_S [\Psi_1 + \Psi_2] dS \quad (1.6)$$

Варьируя выражение для F (см. [6]), находим

$$\delta F = \int_S \left\{ \left[D \Delta^2 w - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta}' \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right) \right] \delta w - h \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}'}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha \right\} dS + \\ + \int_\Gamma \left[\left(-DN_Q + h \sigma_{\alpha\beta}' n_\beta \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right) \delta w + DN_M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) + h \sigma_{\alpha\beta}' n_\beta \delta u_\alpha \right] dl \quad (1.7)$$

$$N_Q = \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial l} \left[n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (1.8)$$

$$N_M = \Delta w + (1 - \nu) \left[2n_1 n_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - n_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - n_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

Здесь n_α — компоненты вектора нормали в плоскости пластины к ее контуру, $\partial/\partial n$, $\partial/\partial l$ — операторы дифференцирования вдоль этого вектора и вдоль контура соответственно, $\Delta = \partial^2/\partial x_\alpha^2$.

Для получения уравнений равновесия в области пластины и на ее контуре надо приравнять δF работе внешних сил δW на малых вариациях продольных смещений и прогиба. Имеем

$$\delta W = \int_S (\sigma_{iz}^+ \delta u_i^+ - \sigma_{iz}^- \delta u_i^-) dS + h \int_S f_\alpha \delta u_\alpha dS + \\ + h \int_S f_z \delta w dS + h \int_\Gamma \left[Q \delta w + M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) + T_\alpha \delta u_\alpha \right] dl \quad (1.9)$$

Здесь первый интеграл — работа напряжений, действующих на поверхностях $z = \pm \frac{1}{2} h$, второй и третий интегралы — работа продольных компонент и поперечной компоненты объемной силы, изменение которых (если оно имеет место) предполагается достаточно плавным, так что в пределах

толщины пластины им можно пренебречь, четвертый интеграл — работа сил на контуре пластинки, складывающаяся из работы поперечной силы Q , изгибающего момента M и продольных сил T_α (рассчитанных на единицу толщины пластинки и единицу длины ее контура).

Преобразуем первый интеграл в (1.9). Выполняя в соотношениях закона Гука (1.2) для σ_{iz} интегрирование по z с учетом возможности (ввиду тонкости пластинки) считать напряженно-деформированное состояние в ней линейно изменяющимся по ее толщине, находим

$$\delta u_\alpha^\pm = \delta u_\alpha \mp \frac{1}{2} h \delta \delta w / \partial x_\alpha, \quad \delta u_z^\pm = \delta w \mp \frac{1}{2} h \nu (1 - \nu)^{-1} \delta u_{\alpha\alpha} \quad (1.10)$$

При этом члены с σ_{zz} отброшены, как это было сделано в рамках данного приближения при записи (1.1) (впрочем, и вариации этих членов равны нулю, поскольку σ_{iz} заданы).

С использованием (1.4) последнее равенство в (1.10) принимает вид

$$\delta u_z^\pm = \delta w \mp \frac{1}{2} h \nu (1 - \nu)^{-1} [(\partial w / \partial x_\alpha)(\partial \delta w / \partial x_\alpha) + (\partial \delta u_\alpha / \partial x_\alpha)] \quad (1.11)$$

Представим первый интеграл в (1.9) в виде

$$\int_S (\sigma_{iz}^+ \delta u_i^+ - \sigma_{iz}^- \delta u_i^-) dS = \delta W_1 + \delta W_2 \quad (1.12)$$

где δW_1 не содержит δu_α , а δW_2 не содержит δw . Отсюда с учетом (1.10), (1.11), выполняя в членах, содержащих производные от δw , δu_α , интегрирование по частям, находим

$$\begin{aligned} \delta W_1 = \int_S \left[\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^- + h \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^{(a)}}{\partial x_\alpha} + \frac{\nu}{1 - \nu} h \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sigma_{zz}^{(a)} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right) \right] \delta w dS - \\ - h \int_\Gamma \left(\sigma_{\alpha z}^{(a)} + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}^{(a)} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right) n_\alpha \delta w dl \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \delta W_2 = \int_S \left(\sigma_{\alpha z}^+ - \sigma_{\alpha z}^- + \frac{\nu}{1 - \nu} h \frac{\partial \sigma_{zz}^{(a)}}{\partial x_\alpha} \right) \delta u_\alpha dS - h \int_\Gamma \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}^{(a)} n_\alpha \delta u_\alpha dl \\ \sigma_{iz}^{(a)} = \frac{1}{2} (\sigma_{iz}^+ + \sigma_{iz}^-) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Приравняв δF и δW , т.е. выражения (1.7) и (1.9) с учетом (1.12) — (1.14), а также (1.5), и приняв во внимание независимость и произвольность вариаций δw , δu_α , получаем следующие уравнения равновесия, В области пластины

$$D \Delta^2 w - h \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\left(\sigma_{\alpha\beta}' + \frac{\nu}{1 - \nu} \delta_{\alpha\beta} \sigma_{zz}^{(a)} \right) \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right] = \sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^- + h \left(\frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial x_\alpha} + f_z \right) \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}'}{\partial x_\beta} + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial \sigma_{zz}^{(a)}}{\partial x_\alpha} + f_\alpha + \frac{\sigma_{\alpha z}^+ - \sigma_{\alpha z}^-}{h} = 0 \quad (1.16)$$

На контуре пластины

$$-DN_Q + [\sigma_{\alpha\beta}' + \nu(1 - \nu)^{-1} \sigma_{zz}^{(a)} \delta_{\alpha\beta}] n_\beta h \delta w / \partial x_\alpha = (Q - \sigma_{\alpha z} n_\alpha) h \quad (1.17)$$

$$DN_M = M \quad (1.18)$$

$$[\sigma_{\alpha\beta}' + \nu(1 - \nu)^{-1} \sigma_{zz}^{(a)} \delta_{\alpha\beta}] n_\beta = T_\alpha \quad (1.19)$$

Напряжения $\sigma_{\alpha\beta}'$ связаны с u_α соотношениями (1.5). При помощи (1.17) — (1.19) можно формулировать разные граничные условия. Например, всюду на Γ могут быть заданы Q , M , T_α .

2. Равновесие слоистого массива при заданных напряжениях на межслойных границах. Рассмотрим массив, состоящий из большого числа тонких плоских слоев-пластин. Ось z декартовой системы координат направим перпендикулярно плоскостям пластин. Занимаемую массивом область и ее объем обозначим V , а границу этой области и ее площадь обозначим A . Будем считать, что (за исключением, может быть, отдельных особых точек или линий) граница массива достаточно плавная и в масштабах толщины слоя может рассматриваться как плоская.

Уравнения равновесия получим вариационным способом, считая временно напряжения на межслойных границах заданными. Упругая энергия массива получается суммированием по всем слоям выражений (1.6), а вариация упругой энергии — суммированием выражений (1.7). Надо учесть, что теперь каждый слой имеет боковую границу (проходящую через контур) в виде некоторой поверхности, нормаль к которой в общем случае не параллельна срединной плоскости.

Перейдем к приближению сплошной среды. При этом считаем изменения искомого поля настолько плавными, что в пределах некоторого интервала усреднения ($z-\lambda, z+\lambda$), где $\lambda > 0$, переменные этих полей и их градиенты можно выносить за знак усреднения. Рассматривая интервалы усреднения как бесконечно малые и вводя функцию плотности числа слоев $\chi(z)$ ($\chi(z) dz$ — число слоев в интервале dz), суммирование при таком переходе можно заменить интегрированием. В результате с учетом (1.7) для вариации упругой энергии массива F_M находим

$$\begin{aligned} \delta F_M = & \int_V \left\{ \left[\langle D \rangle \Delta^2 w - \langle h \rangle \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta}' \frac{\partial w}{\partial x_\beta} \right) \right] \delta w - \langle h \rangle \frac{\delta \sigma_{\alpha\beta}'}{\partial x_\beta} \delta u_\alpha \right\} \chi(z) dV - \\ & - \int_A \left\{ \left[\langle D \rangle N_q - \langle h \rangle \sigma_{\alpha\beta}' \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} n_\beta \right] \delta w - \langle D \rangle N_M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) - \right. \\ & \left. - \langle h \rangle \sigma_{\alpha\beta}' n_\beta \delta u_\alpha \right\} \chi(z) \cos \mu dA \end{aligned} \quad (2.1)$$

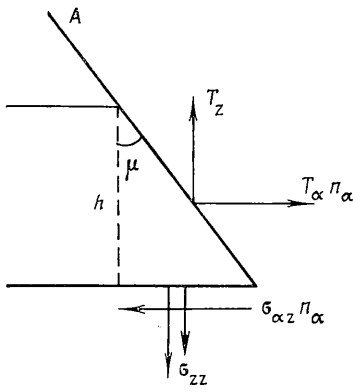
Здесь N_q, N_M определяются (1.8) μ — угол между лежащей в срединной плоскости слоя нормалью к контуру Γ и нормалью к границе массива в данной точке, угловыми скобками обозначены средние арифметические заключенных в них величин в пределах интервала усреднения. Предполагается, что эти средние аппроксимированы достаточно плавными функциями z . Использование при переходе к приближению сплошной среды операции «размазывания» [4] приводит к замене указанных средних интегралами в пределах $z-\lambda, z+\lambda$, деленными на 2λ .

При вычислении для массива виртуальной работы δW_M должна учитываться и работа напряжений на межслойных границах. Поскольку предполагается достаточная плавность рассматриваемых полей, можно $\sigma_{iz}^+ - \sigma_{iz}^-$ заменить на $h \partial \sigma_{iz} / \partial z$ и отбросить знак усреднения (a) над σ_{iz} . Тогда с учетом (1.9), (1.12) — (1.14) находим

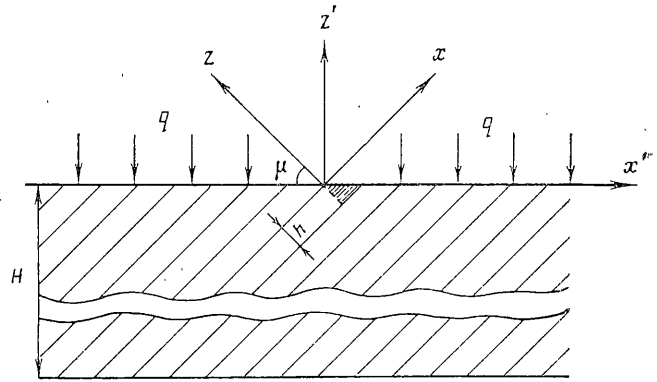
$$\begin{aligned} \delta W_M = & \int_V \langle h \rangle \left\{ \left[\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial x_\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right) + f_z \right] \delta w + \right. \\ & + \left[\frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\delta \sigma_{zz}}{\partial x_\alpha} + f_\alpha \right] \delta u_\alpha \left. \right\} \chi(z) dV + \\ & + \int_A \langle h \rangle \left\{ \left[Q - \left(\sigma_{\alpha z} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right) n_\alpha \right] \delta w + \right. \\ & \left. + M \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) + \left[T_\alpha' - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz} n_\alpha \right] \delta u_\alpha \right\} \chi(z) \cos \mu dA \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь штрихом у T_α отмечено, что это напряжения в нормальном сечении слоя (см. п. 1).

Выразим Q, M, T_α' через действующие на A напряжения T_i . На фиг. 1



Фиг. 1



Фиг. 2

представлен участок одного из слоев вблизи границы A в сечении, проходящем через нормаль к A перпендикулярно контуру. Чтобы не загромождать чертеж, показаны лишь напряжения, действующие в его плоскости. Имеем

$$Q = T_z \cos^{-1} \mu - \sigma_{zz} \operatorname{tg} \mu, \quad T_\alpha' = T_\alpha \cos^{-1} \mu - \sigma_{\alpha z} \operatorname{tg} \mu \quad (2.3)$$

Эти формулы получаются путем вычисления суммы соответствующих проекций сил, действующих справа от показанного штрихами нормального сечения, и отнесения ее к площади этого сечения (звиду тонкости слоев σ_{iz} заменены на σ_{iz}). При выводе предположена достаточная плавность изменения напряжений на A , так что в масштабе усреднения их можно считать постоянными. При этом допустимо пренебречь (как это и сделано в (2.3)) вкладом в Q от крутящих моментов в нормальных сечениях слоев.

Вычислив (в расчете на единицу длины контура) в указанных условиях сумму изгибающих моментов всех сил справа от вертикальной штриховой линии на фиг. 1, приравняв эту сумму Mh и произведя усреднение по слоям в масштабе 2λ , находим

$$M = \frac{1}{2} \langle h \rangle [T_z \cos^{-1} \mu - \sigma_{zz} \operatorname{tg} \mu - \sigma_{\alpha z} n_\alpha] \operatorname{tg} \mu \quad (2.4)$$

Уравнения равновесия получаются путем приравнивания (2.1) и (2.2). Учитывая (1.5), имеем внутри массива

$$\langle D \rangle \Delta^2 w - \langle h \rangle \partial (\sigma_{\alpha\beta} \partial w / \partial x_\alpha) / \partial x_\beta = \\ = \langle h \rangle [(\partial \sigma_{zz} / \partial z) + (\partial \sigma_{\alpha z} / \partial x_\alpha) + f_z] \quad (2.5)$$

$$(\partial \sigma_{\alpha\beta} / \partial x_\beta) + (\partial \sigma_{\alpha z} / \partial z) + f_\alpha = 0 \quad (2.6)$$

и (с учетом (2.3), (2.4)) на границе массива

$$(-\langle D \rangle N_Q + \langle h \rangle \sigma_{\alpha\beta} n_\beta \partial w / \partial x_\alpha) \cos \mu = \\ = \langle h \rangle (T_z - \sigma_{zz} \sin \mu - \sigma_{\beta z} n_\beta \cos \mu) \quad (2.7)$$

$$2\langle D \rangle N_M \cos^2 \mu = \langle h \rangle^2 (T_z - \sigma_{zz} \sin \mu - \sigma_{\beta z} n_\beta \cos \mu) \sin \mu \quad (2.8)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} n_\beta \cos \mu = T_\alpha - \sigma_{\alpha z} \sin \mu \quad (2.9)$$

Здесь $\sigma_{\alpha\beta}$ связаны с $u_{\alpha\beta}$ и σ_{zz} зависимостями (1.5). При $\mu = 1/2\pi$, когда граница массива параллельна слоям, получаем очевидное соотношение $\sigma_{zz} = T_z$ (следует из равенств (2.7), (2.8)).

Напряжения σ_{iz} предполагались заданными. В действительности же они определяются взаимодействием слоев.

3. Учет взаимодействия слоев в массиве. Как и в [2] (но используя вместо давления q напряжение σ_{zz}), положим

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(0)} + \sigma_{zz}^{(d)}, \quad \sigma_{zz}^{(d)} = E_\alpha \varphi (\partial w / \partial z) \quad (3.1)$$

где $\sigma_{zz}^{(0)}$ — напряжение не связанное с прогибом (например, для горизон-

тально-слоистого массива созданное весом вышележащей толщи), E_a — константа размерности напряжения, φ — функция, характеризующая взаимодействие слоев по нормали к ним. При $\varphi = \partial w / \partial z$ получаем закон упругости, соответствующий предположению Г. Зонтага [4], т. е. имеем совокупность большого числа пластин на упругом основании.

В геомеханических приложениях можно считать, что взаимодействие слоев имеет место только, если они надавливают один на другой. При этом φ обращается в нуль, когда надавливания нет. Нелинейность φ может быть связана с изменением площади фактического контакта слоев.

Рассмотрим вопрос о взаимном сдвиге слоев по межслойным границам. С использованием первого соотношения (1.10), где от вариаций надо перейти к самим u_α , находим для разности $u_{\alpha(j+1)}^- - u_{\alpha(j)}^+$ на межслойной границе между $j+1$ и j слоями в пределах пакета слоев толщины 2λ следующее выражение

$$u_{\alpha(j+1)}^- - u_{\alpha(j)}^+ = 1/2 [(\partial u_\alpha / \partial z) + (\partial w / \partial x_\alpha)] (h_{j+1} + h_j) \quad (3.2)$$

Здесь h_j , h_{j+1} — толщины соответствующих слоев, разность между u_α для них выражена через производную от u_α по z , и ввиду тонкости пакета принято, что различием прогибов входящих в него слоев можно пренебречь. Из (3.2) находим, что средняя величина скачков продольных смещений на межслойных границах, которую обозначим ϑ_α , имеет вид

$$\vartheta_\alpha = \langle h \rangle [(\partial u_\alpha / \partial z) + (\partial w / \partial x_\alpha)] \quad (3.3)$$

В качестве межслойных границ можно рассматривать также тонкие прослойки. Для случая упругого сопротивления межслойных границ сдвигу касательные напряжения на них пропорциональны выражениям (3.2) и могут заметно отличаться при существенном различии толщин слоев в пределах пакета усреднения, а также модулей сдвига и толщин прослоек. Чтобы выполнялось принятое выше предположение о достаточной плавности изменения $\sigma_{\alpha z}$, эти различия должны быть не столь существенными, что и будем предполагать для тех случаев, в которых напряжения $\sigma_{\alpha z}$ достаточно сильно зависят от скачков продольных смещений на межслойных границах. При этом можно положить

$$\sigma_{\alpha z} = \langle h \rangle \langle s \rangle^{-1} G^\sim [(\partial u_\alpha / \partial z) + (\partial w / \partial x_\alpha)] \quad (3.4)$$

где $\langle s \rangle$ — средняя толщина прослоек, G^\sim — некоторый оператор (в частности, он может означать функцию от стоящей справа величины), линейный или нелинейный, включающий в общем случае операции по времени. В случае, когда G^\sim — умножение на число G (модуль сдвига), имеем упругий закон деформирования прослоек. Для относительно тонкого пакета слоев, в пределах которого прогибы слоев можно считать одинаковыми, этот случай соответствует схеме, рассмотренной в [4], при условии, что продольные нагрузки в пакете изменяются по его толщине достаточно плавно.

Случай $G^\sim = G_0 \tau \partial / \partial t$, где t — время, а τ — некоторая постоянная времени, соответствует линейно-вязким межслойным границам (прослойкам). При этом может иметь значение учет изменения толщины прослоек вследствие их выдавливания. Однако здесь таких усложнений касаться не будем, считая $\langle s \rangle$ постоянной величиной.

На достаточно быстрые воздействия массив с вязкими межслойными границами будет реагировать как монолитный (т. е. с полным сцеплением по межслойным границам) и лишь спустя значительное время, либо при сравнительно медленных воздействиях смогут проявиться проскальзывание слоев и связанный с ним их изгиб.

Прослойки могут обладать пластичностью. В простейшем случае, когда скольжение по межслойным границам происходит лишь в одном направлении, скажем вдоль оси x , имеем хорошо известный закон

$$\sigma_{xz} = k_b + (\text{tg } \varphi_b) |\sigma_{zz}| \quad (3.5)$$

где k_b , φ_b — константы и предполагается взаимное надавливание слоев, т. е. $\sigma_{zz} < 0$ ($\varphi_b = 0$ соответствует случаю идеально пластичных прослоек). В геомеханических приложениях предположение о надавливании существенно и для зависимости (3.4).

Добавив (3.1), а также (3.4) или (3.5) (при двумерном скольжении необходимо соответствующее обобщение (3.5)) к уравнениям (2.5), (2.6), (1.5), получим замкнутую систему уравнений равновесия слоистого массива.

Из этой системы можно получить систему динамических уравнений, если к $\{f_x, f_z\}$ добавить силы инерции: $-\langle \rho h \rangle / \langle h \rangle \partial^2 / \partial t^2 \{u_x, w\}$, где ρ — плотность.

Перейдем к граничным условиям. Пусть всюду на A заданы T_i . Тогда граничными условиями будут соотношения (2.7) — (2.9), в которые вместо σ_{zz} и σ_{xz} надо подставить их выражения согласно (3.1) и (3.4) или (3.5) (с необходимым обобщением в случае двумерного проскальзывания) соответственно.

В случае пластичных прослоек, характеризуемых законом типа (3.5), необходимо задать также условие, позволяющее найти в массиве границу области действия этого закона, т. е. пластической области.

Возможны ситуации, при которых в слоях на границе будет появляться излом (связанный с их разрушением либо с образованием в них пластических «шарниров»). Произойдет излом слоев или нет должно определяться соответствующим критерием, наложенным на напряжения внутри слоев. Эти напряжения можно вычислить, зная w , u_x , по известным формулам теории тонких пластин.

Внутренний масштаб рассматриваемого описания, определяемый характерной толщиной слоев, может быть как порядка этой толщины, так и значительно превышать ее. Иллюстрацией этого, так же как и роли наклонной к слоям границы массива, может служить задача о сжатии наклонно-слоистого массива.

4. Задача о сжатии наклонно-слоистого массива. Рассмотрим наклонно-слоистый массив, нагруженный по горизонтальной границе однородно распределенным давлением q . Предположим, что до глубины H межслойные границы ослаблены и характеризуются предельным напряжением сдвига k , остающимся постоянным в процессе сдвига (идеально пластичные границы). Пренебрежем влиянием прогиба на напряжения, средние по нормальным сечениям слоев.

Будем считать, что на глубинах, превышающих H , межслойные границы достаточно прочны и проскальзывание по ним отсутствует.

На фиг. 2 изображено сечение массива вертикальной плоскостью, перпендикулярной линиям простирания слоев. Наряду с осями x (вдоль слоев), z введем оси x' (вдоль верхней границы массива), z' . Предположим, что имеют место условия плоской деформации. При этом напряженно-деформированное состояние зависит лишь от x , z . Будем считать давление q достаточно большим, так что по сравнению с создаваемыми им дополнительными напряжениями можно пренебречь начальными напряжениями в массиве.

До достижения предела, при котором начинается проскальзывание слоев, в массиве, очевидно, действуют напряжения

$$\sigma_{xx}^{(0)} = -q \cos^2 \mu, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = -q \sin^2 \mu, \quad \sigma_{xz}^{(0)} = -\frac{1}{2} q \sin 2\mu \quad (4.1)$$

где μ — введенный в п. 2 угол (см. фиг. 2). При превышении давлением q указанного предела, равного $q_0 = 2k \sin^{-1} 2\mu$, получим

$$\sigma_{xx} = -q + k \operatorname{tg} \mu, \quad \sigma_{zz} = -q \sin^2 \mu + E_a \partial w / \partial z \quad (4.2)$$

Здесь первое равенство (для среднего по толщине слоев напряжения) получается из условия равновесия треугольного элемента, заштрихованного на фиг. 2, с учетом того, что касательные напряжения на межслойных границах равны k , второе (см. (3.1)) записано в предположении, что сжатие

пакета слоев можно считать упругим. Отметим, что пока рассматривается односторонний процесс (только сжатие), не имеет существенного значения, является ли эта упругость истинной, т. е. сохраняется ли при разгрузке. Это позволяет при таких условиях приближенно рассматривать и случаи с достаточно низкими E_a , обусловленными смятием межслойного материала.

При возникновении проскальзывания слоев величины средних продольных напряжений сжатия в них возрастают по сравнению с теми, которые действовали бы в отсутствие проскальзывания: $|\sigma_{xx}| - |\sigma_{xx}^{(0)}| = q \sin^2 \mu - k \operatorname{tg} \mu > 0$ при $q > q_0$.

Так как при проскальзывании касательные напряжения на межслойных границах постоянны, их (вследствие тонкости слоев) при отыскании прогиба можно считать постоянными и внутри слоев.

Тогда, поскольку все искомые переменные не зависят от y и действием начальных напряжений (в том числе от объемных сил) можно пренебречь, подставляя (4.2) в (2.5), находим

$$D_a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - h_a (-q + k \operatorname{tg} \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = h_a E_a \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (4.3)$$

где $D_a = \langle D \rangle$, $h_a = \langle h \rangle$, E_a предполагаются постоянными. На верхней границе массива $z' = 0$ из (2.7), (2.8) с учетом (4.2) и постоянства касательных напряжений на межслойных границах находим следующие граничные условия

$$\begin{aligned} -D_a \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos \mu + h_a \left[(-q + k \operatorname{tg} \mu) \frac{\partial w}{\partial x} \cos \mu + E_a \frac{\partial w}{\partial z} \sin \mu - k \cos \mu \right] = \\ = -h_a q \cos^2 \mu \sin \mu \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$2D_a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \mu + h_a^2 E_a \frac{\partial w}{\partial z} \sin^2 \mu = -h_a^2 (1/2 q \sin 2\mu - k)^{1/2} \sin 2\mu$$

На нижней границе массива $z' = -H$, пренебрегая упругим деформированием нижележащей его части, примем условие жесткой заделки слоев, т. е.

$$w = 0, \quad \partial w / \partial x = 0 \quad (4.5)$$

В горизонтальном направлении массив будем считать безграничным. Тогда уравнением (4.3) и граничными условиями (4.4), (4.5) задача отыскания прогиба полностью определена. При этом вследствие однородности уравнения равновесия и граничных условий по x' прогиб будет зависеть лишь от z , т. е. решение задачи можно искать в виде

$$w = w(z'), \quad z' = x \cos \mu + z \sin \mu \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.3), находим

$$w'''' - \kappa^2 w'' = 0, \quad \kappa = \cos^{-2} \mu \{ [E_a \sin^2 \mu - (q - k \operatorname{tg} \mu) \cos^2 \mu] h_a / D_a \}^{1/2} \quad (4.7)$$

Начнем с рассмотрения случая умеренных q , для которых параметр κ действителен. Этот параметр представляет собой обратную величину внутреннего масштаба задачи. Общее решение уравнения (4.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} w = (1/2 q \sin 2\mu - k) h_a \cos \mu \{ B_1 \kappa^{-3} (\operatorname{sh} \kappa z' - \kappa z') + \\ + B_2 \kappa^{-2} (\operatorname{ch} \kappa z' - 1) + B_3 z' + B_4 \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $B_j (j=1, \dots, 4)$ — постоянные. Подставляя (4.8) в (4.4), (4.5), получаем для их определения следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} -B_1 + \kappa^2 B_3 = -D_a^{-1} \cos^4 \mu \\ 2D_a (\cos^4 \mu) B_2 + h_a^2 E_a (\sin^3 \mu) B_3 = -h_a \sin \mu \\ -\kappa^{-3} (\operatorname{sh} \kappa H - \kappa H) B_1 + \kappa^{-2} (\operatorname{ch} \kappa H - 1) B_2 - H B_3 + B_4 = 0 \\ \kappa^{-2} (\operatorname{ch} \kappa H - 1) B_1 - \kappa^{-1} (\operatorname{sh} \kappa H) B_2 + B_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Выразив B_3 из последнего уравнения и подставив в первые два, полу-

чим систему уравнений для B_1, B_2 , из которой находим

$$\begin{aligned} B_1 &= [2 - \kappa h_a (\operatorname{sh} \kappa H) \sin \mu (1 - \kappa^{-2} D_a^{-1} h_a E_a \sin^2 \mu \cos^{-4} \mu)] C^{-1} \\ B_2 &= -h_a \sin \mu (\operatorname{ch} \kappa H) [1 - \kappa^{-2} D_a^{-1} h_a E_a \sin^2 \mu \cos^{-4} \mu (1 - \operatorname{ch}^{-1} \kappa H)] C^{-1} \quad (4.10) \\ C &= D_a (2 \cos^4 \mu \operatorname{ch} \kappa H + \kappa^{-1} D_a^{-1} h_a^2 E_a \sin^3 \mu \operatorname{sh} \kappa H) \end{aligned}$$

Выражения для B_3, B_4 получаются подстановкой (4.10) в последние два уравнения (4.9). Таким образом, все постоянные B_i определены и задача решена.

Наибольшие (по абсолютной величине) напряжения от изгиба по толщине слоя, достигаемые у межслойных границ, выражаются известной формулой $\sigma = -6Dh^{-2} \partial^2 w / \partial x^2$, где h — толщина слоя, D — его изгибная жесткость. С учетом (4.8), (4.6) отсюда находим

$$\sigma = -6Dh^{-2} h_a ({}^{1/2} q \sin 2\mu - k) \cos^3 \mu [B_1 \kappa^{-1} \operatorname{sh} \kappa z' + B_2 \operatorname{ch} \kappa z'] \quad (4.11)$$

Из (4.7) видно, что при достаточном, но не очень крутом наклоне слоев, умеренных q и относительно небольшом различии податливости слоев и массива по нормали к ним внутренний масштаб κ^{-1} по порядку величины не сильно отличается от характерной толщины слоев. Поскольку она предполагается гораздо меньшей всех внешних размеров, величину κH в (4.10) надо считать большой. Ограничившись главными членами асимптотики при $\kappa H \rightarrow \infty$ и $|\kappa z'| \rightarrow \infty$, имеем (с учетом также (4.7)):

$$\sigma = \frac{6Dh_a^2 ({}^{1/2} q \sin 2\mu - k) \cos^3 \mu \sin \mu (1 - \kappa^{-2} D_a^{-1} h_a E_a \sin^2 \mu \cos^{-4} \mu)}{D_a h^2 (2 \cos^4 \mu + \kappa^{-1} D_a^{-1} h_a^2 E_a \sin^3 \mu)} e^{\kappa z'} \quad (4.12)$$

Полное продольное напряжение у межслойной границы получается прибавлением к (4.12) σ_{xx} из (4.2). Видно, что изгибные напряжения экспоненциально убывают в глубь массива, сосредоточиваясь в полосе толщиной порядка κ^{-1} вблизи его горизонтальной границы.

С ростом q внутренний масштаб растет и становится бесконечным, т. е. κ обращается в нуль, при

$$q = q_* = (k + E_a \operatorname{tg} \mu) \operatorname{tg} \mu \quad (4.13)$$

Таким образом, по мере приближения κ к нулю с ростом q зона существенного искривления слоев проникает в глубину массива до его основания ($z' = -H$). При дальнейшем росте q это положение сохраняется, но меняется характер распределения прогибов: гиперболические функции в (4.8) переходят в соответствующие тригонометрические в связи с тем, что параметр κ становится чисто мнимым (решение задачи остается действительным, но вместо κ в нем фигурирует $|\kappa|$). При $q = q_c > q_*$ знаменатель выражений (4.10) впервые обращается в нуль. Этому соответствует потеря устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sonntag G. Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung // Forsch Geb. Ingenieurwesens. 1957. Bd. 23. № 1/2. S. 3–8.
2. Салганик Р. Л. Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 48–56.
3. Каргозия А. Л. Напряженно-деформированное состояние слоистого массива горных пород при наличии трения на контактах слоев // Науч. сообщ. Ин-та горн. дела им. А. А. Скочинского, 1970. Вып. 73. С. 3–12.
4. Бологин В. В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 1. С. 61–66.
5. Бологин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI.1987