

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЕДЯНОГО ПОЛЯ С СИСТЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОПОР

МАЦКЕВИЧ Д. Г., ШХИНЕК К. Н.

Рассматривается задача об определении нагрузок, действующих вследствие изменения уровня воды, на вертикальные цилиндрические колонны со стороны примерзшего к ним ледяного поля. Задача решается при общепринятых допущениях о возможности рассмотрения ледяного покрова до возникновения трещин как упругой пластины, лежащей на винклеровском основании. Использование теоремы сложения Графа и выражения для силы, действующей на единичную колонну [1, 2], позволило получить относительно простые конечные зависимости.

1. Рассмотрим систему из нескольких цилиндрических опор, к которым примерзло бесконечное ледяное поле, лежащее на поверхности воды. При повышении уровня воды, вызванном, например, приливом, ледяное поле на бесконечности поднимается на высоту прилива, а у опор останется на прежнем уровне. В результате на опоры со стороны льда будут действовать вертикально направленные силы, а также вследствие отсутствия осевой симметрии относительно центров колонн изгибающие моменты.

Решение задачи отыскивается при следующих предположениях: подъем воды происходит за относительно короткий интервал времени, в течение которого вязкопластические свойства льда не проявляются, т. е. лед считается идеально упругой средой; контакт льда с водой не нарушается, т. е. исследуется только случай подъема уровня воды; расстояние между опорами значительно превосходит толщину льда, и ледяное поле можно рассматривать как тонкую пластинку.

Итак, рассмотрим идеально упругую тонкую пластинку на винклеровском основании. Будем отсчитывать прогиб пластинки W от нового уровня воды. Тогда сформулированная задача приводится к решению уравнения [3]:

$$D\Delta\Delta W + \gamma W = 0 \quad (1.1)$$

при граничных условиях

$$W|_{\Gamma_i} = \delta, \quad W|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial n_i} \right|_{\Gamma_i} = 0, \quad |\nabla W| |_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

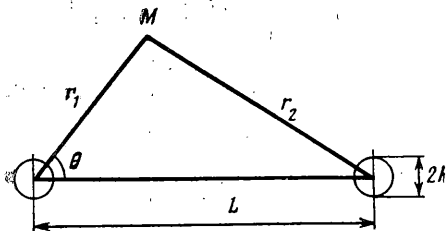
где Γ_i — система контуров вмерзших опор, n_i — нормаль в данной точке контура, γ — удельный вес воды, D — изгибная жесткость льда, δ — величина изменения уровня воды, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина ледяного поля.

Известно [3], что в случае одной опоры точное решение поставленной задачи в полярной системе координат (r, θ) с центром на оси цилиндра имеет вид $W = \delta w^*(r)$, где

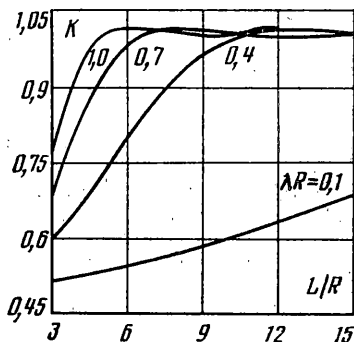
$$w^*(r) = (ker'(\lambda R) kei(\lambda r) - kei'(\lambda R) ker(\lambda r)) / K_1 \quad (1.3)$$

$$K_1 = ker'(\lambda R) kei(\lambda R) - kei'(\lambda R) ker(\lambda R), \quad \lambda = (\gamma/D)^{1/4}$$

где R — радиус цилиндра, ker , kei — функции Кельвина.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. В случае, когда упругая пластина опирается на систему круговых цилиндров, построение точного решения затруднительно. Поэтому предлагается искать приближенное решение. Для двух опор оно строится следующим образом.

Введем в рассмотрение две системы полярных координат (r_1, θ_1) , (r_2, θ_2) с началами, расположенными на осях соответствующих цилиндров (фиг. 1). Очевидно, что общий прогиб ледяной пластины обуславливается прогибами, вызванными влиянием каждой из опор. Соответственно, будем искать приближенное решение задачи в виде

$$W = \alpha(w^*(r_1) + w^*(r_2)) \quad (2.1)$$

где α — некоторый коэффициент, определяемый в результате решения. Прогиб, определяемый по (2.1), удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям на бесконечности. Однако условиям на контурах Γ_i он не удовлетворяет. Приближенность искомого решения состоит в том, что условие равенства прогиба на контурах Γ_i величине δ заменяется интегральным условием минимальности отклонения от этого значения, т. е.

$$\int_{\Gamma_i} (W - \delta)^2 ds_i \rightarrow \min \quad (2.2)$$

Замена условий (1.2) интегральным обоснована физически тем, что нас в конечном итоге интересует не распределение прогибов или усилий по контуру, а интегральная характеристика — суммарное усилие, действующее на опору. Подставляя (2.1) в (2.2), получаем

$$\alpha = \delta(1+B)^{-1} \quad (2.3)$$

$$B = \left[\int_0^{2\pi} w^*(r_2) (1+w^*(r_2)) d\theta_1 \right] \left[\int_0^{2\pi} (1+w^*(r_2)) d\theta_1 \right]^{-1}$$

Применяя теорему о среднем, получим

$$B = w^*(r_2^*), \quad L-R < r_2^* < L+R \quad (2.4)$$

Используем теорему Графа [4], позволяющую представить любую цилиндрическую функцию или комбинацию цилиндрических функций от r_2 в виде бесконечного ряда по функциям от аргументов r_1, θ_1, L . Тогда можно записать

$$w^*(\lambda r_2) = w_0(\lambda L) J_0(\lambda r_1) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\lambda L) J_n(\lambda r_1) \cos n\theta_1 \quad (2.5)$$

$$w_n(\lambda r) = [kei_n(\lambda r) ker'(\lambda R) - ker_n(\lambda r) kei'(\lambda R)] / K_1$$

Формула (2.5) справедлива лишь при условии $r_1 < L$, т. е. в окрестности контура Γ_1 .

Подставив (2.5) в (2.3) и проведя необходимые преобразования, получаем

$$B = w_0(\lambda L) J_0(\lambda R) + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2(\lambda L) J_n^2(\lambda R) [1 + w_0(\lambda L) J_0(\lambda R)]^{-1}$$

В случае, когда λR мало, можно полагать, что $B \approx w_0(\lambda L)$, т. е. в (2.5) $r_2 \approx L$. Отметим, что применяя (2.5) можно показать, что

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial W}{\partial r_i} ds_i = 2\pi \lambda R J_1(\lambda R) w_0(\lambda L)$$

т. е. условия жесткого закрепления на контурах Γ_i выполняются в интегральном смысле приближенно.

3. Вертикальную силу, действующую на опору со стороны ледяного поля при изменении уровня воды, можно вычислить по формуле [3]:

$$P = R \int_0^{2\pi} N d\theta, \quad (3.1)$$

где $N = Dn_i \cdot \nabla(\Delta W)$ — перерезывающее усилие в пластине, а $W(r_1, r_2)$ определяется выражением (2.1).

Так как задача симметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей между центрами опор, достаточно определить силу, действующую на первый цилиндр

$$N_1 = \frac{D\delta}{1+B} \frac{d}{dr_1} \{ \Delta w^*(r_1) + \Delta w^*(r_2) \} |_{r_1=R}$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся соотношениями

$$\Delta ker(\lambda r) = -\lambda^2 kei(\lambda r), \quad \Delta kei(\lambda r) = \lambda^2 ker(\lambda r) \quad (3.2)$$

Используя (1.3) и (2.1) получаем

$$N_1 = D\delta \lambda^3 K_1^{-1} (1+B)^{-1} \{ (kei'(\lambda R))^2 + (ker'(\lambda R))^2 + \lambda^{-1} (d/dr_1) [kei'(\lambda R) kei(\lambda r_2) + ker'(\lambda R) ker(\lambda r_2)] |_{r_1=R} \} \quad (3.3)$$

Заметим, что перерезывающее усилие, действующее по контуру отдельно стоящей опоры, определяется по формуле [5]: $N^* = D\delta \lambda^3 K_1^{-1} \{ (kei'(\lambda R))^2 + (ker'(\lambda R))^2 \}$, т. е. выражение (3.3) можно записать в виде

$$N_1 = N^* (1+B)^{-1} \{ 1 + \lambda^{-1} (d/dr_1) [kei'(\lambda R) kei(\lambda r_2) + ker'(\lambda R) ker(\lambda r_2)] |_{r_1=R} [(kei'(\lambda R))^2 + (ker'(\lambda R))^2]^{-1} \}$$

Преобразовывая это выражение с помощью теоремы Графа и подставляя его в формулу для вертикальной силы (3.1), получим:

$$P = P^* (1+B)^{-1} \{ 1 - J_1(\lambda R) [kei'(\lambda R) kei(\lambda L) + ker'(\lambda R) ker(\lambda L)] [(kei'(\lambda R))^2 + (ker'(\lambda R))^2]^{-1} \} \quad (3.4)$$

где P^* — сила, действующая на отдельно стоящую опору. Введем в рассмотрение коэффициент взаимного влияния опор K , показывающий во сколько раз уменьшается сила, действующая на опору многоопорного сооружения, из-за наличия соседних опор по сравнению с силой, действующей на отдельно стоящую опору. Согласно приведенным выше формулам, для двухопорного сооружения

$$K = (1+B)^{-1} \{ 1 - J_1(\lambda R) [kei'(\lambda R) kei(\lambda L) + ker'(\lambda R) ker(\lambda L)] [(kei'(\lambda R))^2 + (ker'(\lambda R))^2]^{-1} \} \quad (3.5)$$

При достаточно малых значениях λR выражение (3.4) можно запи-

сать в упрощенном виде $K=(1+B)^{-1}$. Зависимость коэффициента K от параметров задачи показана на фиг. 2. Отличие значений K , вычисленных по формуле (3.5) и по упрощенной формуле, в исследуемом диапазоне R и h не превосходит 1% ($2\text{ м} \leq R \leq 20\text{ м}$, $0,3\text{ м} \leq h \leq 2\text{ м}$).

4. Воспользовавшись предложенным выше методом построения приближенного решения задачи об изгибе бесконечной плиты на винклеровском основании, защемленной по системе круговых контуров, можно построить выражения для коэффициентов взаимного влияния опор K в случае трех и четырех опор. Для четырех опор, расположенных в вершинах прямоугольника со сторонами L и H , в случае малых значений λR имеем

$$K = [1 + w^*(\lambda L) + w^*(\lambda H) + w^*(\lambda(L^2 + H^2)^{1/2})]^{-1}$$

Для трех опор, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со сторонами длиной L , имеем

$$K = [1 + 2w^*(\lambda L)]^{-1}$$

Для трех опор, образующих равнобедренный треугольник, две стороны которого равны H , а основание L :

$$K = [1 + w^*(\lambda L) - 2w^*(\lambda H)] [1 + w^*(\lambda L) - 2(w^*(\lambda H))^2]^{-1}$$

для опоры, расположенной в вершине треугольника и

$$K = [1 - w^*(\lambda H)] [1 + w^*(\lambda L) - 2(w^*(\lambda H))^2]^{-1}$$

для опор, расположенных в основании.

5. Изгибающий момент, действующий на опору со стороны ледяного поля, возникает при наличии нескольких опор вследствие отсутствия осевой симметрии явления. Он определяется по формуле

$$M = \int_{\Gamma_i} m ds_i + R \int_{\Gamma_i} N \times e_{r_i} \cos \theta_i ds_i$$

В случае двух опор задача симметрична относительно оси Oy (фиг. 1), поэтому достаточно вычислить момент, действующий, к примеру, на первый цилиндр. Тогда

$$m = m_{r_1} e_{\theta_1} + m_{r_{\theta_1}} e_{r_1} = [-m_{r_1} \sin \theta_1 + m_{r_{\theta_1}} \cos \theta_1] e_x + [m_{r_1} \cos \theta_1 + m_{r_{\theta_1}} \sin \theta_1] e_y$$

$$m_{r_1} = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_1^2} + \nu \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial W}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_1^2} \right) \right)$$

$$m_{r_{\theta_1}} = (1 - \nu) \frac{D}{r_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\frac{\partial W}{\partial r_1} - \frac{W}{r_1} \right), \quad N = -D \frac{\partial}{\partial r_1} \Delta W e_z$$

Поскольку $r_2 = [L^2 + r_1^2 - 2Lr_1 \cos \theta_1]^{1/2}$, то воспользовавшись соотношениями

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \theta_1} \sin \theta_1 ds_1 = - \int_{\Gamma_1} w \cos \theta_1 ds_1, \quad \int_{\Gamma_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta_1^2} \cos \theta_1 ds_1 = - \int_{\Gamma_1} w \cos \theta_1 ds_1$$

можно показать, что

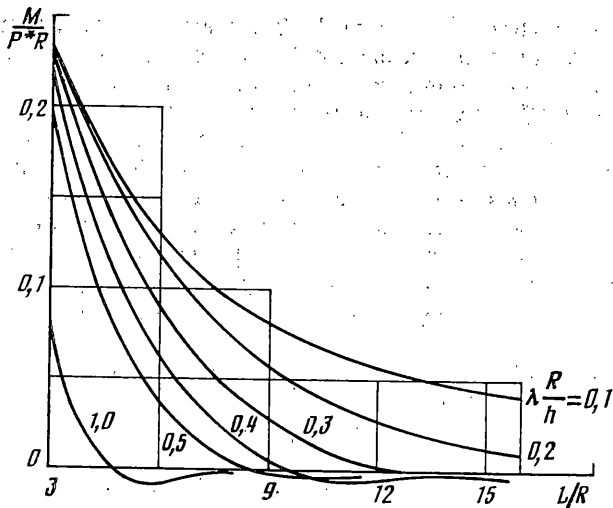
$$\int_{\Gamma_1} m_{r_1} \sin \theta_1 ds_1 = \int_{\Gamma_1} m_{r_{\theta_1}} \cos \theta_1 ds_1 = 0$$

и учитывая равенство

$$\int_{\Gamma_1} \varphi(r_1) \cos \theta_1 ds_1 = 0$$

для произвольной функции $\varphi(r_1)$, получим выражение

$$\underline{M} = -\underline{e}_y D \delta (1+B)^{-1} \int_{\Gamma_1} \left[\Delta w^*(r_2) + R \frac{d}{dr_1} \Delta w^*(r_2) \right] \cos \theta_1 ds_1 \quad (5.1)$$



Фиг. 3

где $w^*(r_2)$ определяется выражением (1.3). Для проведения дальнейших преобразований используем соотношения (3.2). Тогда

$$\Delta w^* = \lambda^2 (kei'(\lambda R) kei(\lambda r) + ker'(\lambda R) ker(\lambda r)) / K_1 \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (5.1) и снова используя теорему сложения (2.5), окончательно получим

$$\underline{M} = -2\pi DR^2 \lambda^2 \delta J_0(\lambda R) K_1^{-1} (1+B)^{-1} [kei'(\lambda R) kei_1(\lambda L) + ker'(\lambda R) ker_1(\lambda L)]$$

Это выражение удобнее представить в виде

$$M = -P^* R J_0(\lambda R) [kei'(\lambda R) kei_1(\lambda L) + ker'(\lambda R) ker_1(\lambda L)] \times \\ \times [kei'(\lambda R))^2 + (ker'(\lambda R))^2]^{-1}$$

На фиг. 3 приведены графики, позволяющие вычислить изгибающий момент в зависимости от основных параметров задачи.

Вследствие приближенности граничного условия (2.2) линия контакта льда с опорой, получаемая из приведенного решения, оказывается повернутой вокруг оси Oy в положительном направлении относительно истинной линии контакта примерзшего льда. Это приводит к занижению величины момента M по сравнению с точным решением.

Авторы выражают признательность Н. В. Зволинскому за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kerr A. W. Ice Forces on Structures due to Change of Water Level // Proc. 3rd Intern. Symp. on Ice Problems, 1975, Hanover: IAHR, 1975. P. 419-427.
2. Kerr A. D. Analysis of piles frozen-in to an ice cover and subjected to forces that cause pile bending. // Proc. IAHR 7th Ice Sympos., 1984. Hamburg, 1984. P. 123-134.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
4. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Гостехиздат, 1953. 380 с.
5. Симаков Г. В., Долгополов Ю. В., Марченко Д. В., Храпацкий Н. Г. Нагрузки и воздействия льда на морские гидротехнические сооружения. Л.: Ленингр. политехн. ин-т, 1983. 76 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.VIII.1987