

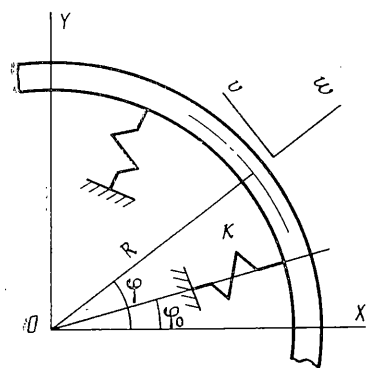
УДК 531.8

О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В ШАРИКОПОДШИПНИКАХ

БАЛЬМОНТ В. Б., ВАРЛАМОВ Е. Б.

Представлены результаты теоретического и экспериментального исследований виброакустических свойств шарикоподшипников в составе стандартных приводных установок. Показано, что резонансы в спектре регистрируемой радиальной вибрации шарикоподшипников в звуковом диапазоне частот связаны главным образом с первыми формами изгибных колебаний наружных колец подшипников. Получены и экспериментально проверены формулы для расчета собственных частот радиальных колебаний наружных колец нагруженных шарикоподшипников.

1. Задача о вибрации подшипника может быть подразделена на две подзадачи: задачу определения вибровозмущений, генерируемых вращающимся подшипником, и задачу определения динамических характеристик колебательной системы, которую образует подшипник в составе изделия или испытательного стенда. Применительно к шариковым подшипникам первая задача исследуется в [1]. Менее исследованной остается вторая задача. В некоторых работах [2, 3] постулируется, что в спектре вибрации шарикоподшипников имеют место резонансы на собственных частотах изгибных колебаний свободных (измеренных вне подшипника) колец и сепаратора. В то же время экспериментальные исследования показывают, что резонансы, имеющие место при контроле вибрации шарикоподшипников в составе стандартных приводных установок по стандартным методикам [4], наблюдаются на частотах, не совпадающих с собственными частотами изгибных колебаний свободных колец и сепаратора. В связи с этим возникает задача исследования динамических характеристик шарикоподшипников.



Фиг. 1

Изгибные колебания колец шарикоподшипника будем считать квазистатическими, полагая вибрационные движения значительно более быстрыми, чем движение шариков. Кольцо шарикоподшипника (например, наружное, на котором обычно крепится датчик) будем считать равномерно нагруженным n одинаковыми упругими элементами жесткостью K , характеризующими шарикоподшипник (фиг. 1). Исследуем изгибные колебания кольца в радиальной плоскости без учета масс шариков.

Пусть $w(t, \varphi)$ — смещение элемента кольца в радиальном направлении, $v(t, \varphi)$ — в тангенциальном направлении, где t — время, φ — угол, определяющий положение элемента кольца. Точкой вверху будем обозначать производную по t , а штрихом — производную по φ . Согласно [5], плотность кинетической энергии кольца равна $T^* = 0,5 \rho R S (w^2 + v^2)$, а плотность потенциальной энергии свободного кольца (без упругих элементов) есть $\Pi^* = 0,5 E I R^{-3} (w'' + v'')^2$, где E , ρ — модуль упругости и плотность материала, R — радиус средней линии, S — площадь поперечного сечения кольца, I — момент инерции поперечного сечения относительно своей главной оси, перпендикулярной плоскости кольца. Полная кинетическая энергия коль-

ца равна

$$T=0,5\rho RS \int_0^{2\pi} (w'^2+v'^2) d\varphi \quad (1.1)$$

Полная потенциальная энергия рассматриваемой механической системы складывается из потенциальной энергии свободного кольца и потенциальной энергии n упругих элементов

$$\Pi=0,5EIR^{-3} \int_0^{2\pi} (w''+v')^2 d\varphi + \sum_{i=1}^n \frac{K}{2} w^2(t, \varphi_i) \quad (1.2)$$

где $\varphi_i = \varphi_0 + 2\pi(i-1)/n$, $i=1, 2, \dots, n$; φ_0 — угол, определяющий положение упругого элемента (шарика), условно названного первым, относительно начала координат.

Рассмотрим m -ю форму колебаний кольца

$$w = a \sin m\varphi \cos vt \quad (1.3)$$

полагая при этом, что ось X системы координат проходит через узел изгибных колебаний кольца (фиг. 2). Используя условие нерастяжимости средней линии кольца $v' = w$ [6], получим

$$v = -(a/m) \cos m\varphi \cos vt \quad (1.4)$$

Подставляя в (1.1), (1.2) выражения (1.3), (1.4) и проводя интегрирование, получим следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий рассматриваемой механической системы

$$\begin{aligned} T &= 0,5\pi\rho RSa^2v^2(1+m^{-2})\sin^2 vt \\ \Pi &= [0,5EIR^{-3}a^2\pi(m^2-1)^2 + 0,25Kna^2(1-\mu_n^{2m} \cos 2m\varphi_0)] \cos^2 vt \quad (1.5) \\ \mu_n^{2m} &= 1 \quad (2m=ln), \quad \mu_n^{2m} = 0 \quad (2m \neq ln), \quad (l=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Собственные частоты системы найдем, приравнявая амплитуды кинетической и потенциальной энергий в (1.5)

$$v^2 = \frac{EI(m^2-1)^2}{\rho R^4 S(1+1/m^2)} + \frac{Kn}{2\pi RS\rho(1+1/m^2)} (1-\mu_n^{2m} \cos 2m\varphi_0) \quad (1.6)$$

Первое слагаемое представляет собой квадрат собственной частоты m -й формы изгибных колебаний свободного кольца [6]; обозначим его v_m^{*2} , где $m=2, 3, \dots$ — номер формы. Рассмотрим второе слагаемое (1.6). Свяжем жесткость упругого элемента, характеризующего отдельный шарик, с радиальной жесткостью шарикоподшипника. При перемещении кольца вдоль оси X на величину dx изменение реакции i -го шарика составит $df_i = Kdx \cos \varphi_i$. Приращение составляющей реакции шарикоподшипника по оси X есть

$$dF_x = \sum_{i=1}^n df_i \cos \varphi_i = K \left(\sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i \right) dx = 0,5Kn dx$$

Радиальная жесткость шарикоподшипника $K_x = dF_x/dx = Kn/2$ для случая осевого нагружения рассчитывается по известной формуле [1]

$$K_x = 0,75(nk_g)^{2/3} (A/\sin \tau)^{1/3} \cos^2 \tau$$

где A — осевая нагрузка, k_g — коэффициент, характеризующий контактную жесткость системы шарик — кольца [1], τ — угол контакта. Заметим также, что $2\pi RS\rho = m_k$, где m_k — масса кольца. В результате (1.6) запишем в следующем виде:

$$v_m^2 = v_m^{*2} + 2v_1^2 (1+m^{-2})^{-1} (1-\mu_n^{2m} \cos 2m\varphi_0) \quad (1.7)$$

где $v_1^2 = K_x/m_h$ — квадрат собственной частоты колебаний кольца на упругих элементах как твердого тела, которую для удобства будем называть частотой первой формы радиальных колебаний ($m=1$), полагая $v_{m=1}^* = 0$ в (1.7).

В зависимости от значения символа μ_n^{2m} формула (1.7) представляет два случая. При $m \neq ln/2$ имеем $v_m^2 = v_m^{*2} + 2v_1^2(1+m^{-2})^{-1}$, а при $m = ln/2$ получим

$$v_m^2 = v_m^{*2} + 2v_1^2(1+m^{-2})^{-1}(1 - \cos 2m\varphi_0) \quad (1.8)$$

В силу экстремальных свойств собственных частот и собственных форм колебаний второе слагаемое в выражении (1.8) может принимать лишь экстремальные значения, т. е. 0 при $\varphi_0 = 0$ и $4v_1^2/(1+m^{-2})$ при $2m\varphi_0 = \pi$. В результате вместо (1.7) запишем

$$v_m^2 = v_m^{*2} + 2\lambda v_1^2(1+m^{-2})^{-1} \quad (1.9)$$

где $\lambda = 1$ при $m \neq ln/2$; $\lambda = 0$ и $\lambda = 2$ при $m = ln/2$. Второй случай имеет наглядную механическую интерпретацию. При $m = ln/2$, $\varphi_0 = 0$ означает, что упругие элементы располагаются в узлах изгибных колебаний кольца; очевидно, что в этом случае собственная частота изгибных колебаний кольца с упругими элементами совпадает с собственной частотой изгибных колебаний свободного кольца. При $\varphi_0 = \pi/(2m)$ упругие элементы располагаются в пучностях изгибных колебаний кольца, «сдерживая» эти колебания и тем самым увеличивая частоту данной формы.

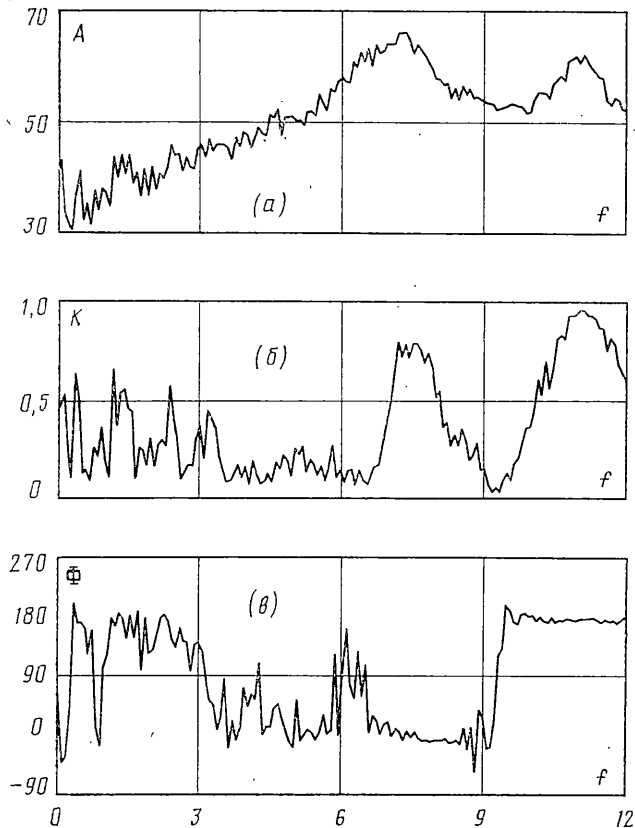
2. В целях проверки полученных теоретических результатов проведено экспериментальное исследование радиальной вибрации наружных колец шарикоподшипников двух типов при их испытаниях на приводной установке. Испытывались шарикоподшипники со следующими основными данными: шарикоподшипник типа 106 — вибрирующая масса наружного кольца с присоединенными элементами $m_h = 0,08$ кг, расчетная радиальная жесткость при используемой осевой нагрузке $A = 200$ Н $K_x = 132 \cdot 10^6$ Н/м, число шариков $n = 14$; шарикоподшипник типа 310 — вибрирующая масса $m_h = 0,6$ кг, расчетная радиальная жесткость при используемой осевой нагрузке $A = 200$ Н $K_x = 150 \cdot 10^6$ Н/м, число шариков $n = 8$.

Во время испытаний на стандартной приводной установке регистрировались радиальные составляющие виброускорений двух диаметрально противоположных точек наружного кольца. Сигналы с пьезодатчиков анализировались в диапазоне частот от 0 до 12 кГц. Результаты анализа выводились на графопостроитель и представлялись графиками на фиг. 2 для подшипника типа 106 и фиг. 3 для подшипника типа 310. На фиг. 2, а и 3, а представлены амплитудные спектры вибрации, регистрируемые одним из двух используемых вибродатчиков (A — уровень виброускорения, ДБ; f — частота, кГц). На фиг. 2, б и 3, б представлены спектры когерентности сигналов, поступающих с двух вибродатчиков, расположенных на кольце (K — функция когерентности [7]). На фиг. 2, в и 3, в представлены фазочастотные характеристики тех же сигналов (Φ — разность фаз сигналов, поступающих с двух вибродатчиков, град.).

После измерений виброхарактеристик шарикоподшипников измерялись спектры радиальной вибрации свободных наружных колец тех же подшипников. Для этого кольца с точно так же расположенными вибродатчиками подвешивались на нити и возбуждались белым шумом. Сигнал, поступающий с вибродатчиков, анализировался точно таким же образом, как и в первом случае. Спектр виброускорений наружного кольца шарикоподшипника типа 310 представлен на фиг. 4. Измеренные таким образом (числитель) и расчетные (знаменатель) значения собственных частот изгибных колебаний свободных колец составили: для подшипника типа 106 — 3,50/3,56 кГц ($m=2$) и 9,70/10,07 кГц ($m=3$); для подшипника типа 310 — 1,92/1,93 кГц ($m=2$), 5,34/5,47 кГц ($m=3$) и 10,00/10,49 кГц ($m=4$). Расчетные значения несколько выше экспериментально установленных (в среднем на 3%), что объясняется влиянием присоединенных масс вибродатчиков пьезоэлектрического типа.

По формуле (1.8) рассчитывались собственные частоты колебаний наружных колец в составе шарикоподшипника. Расчетные значения этих частот, выраженные в кГц, для шарикоподшипника типа 106 в контролируемом диапазоне частот составили: $f_{m=1} = 5,07$ кГц (собственная частота колебаний кольца как твердого тела, рассчитывалась с учетом масс, присоединяемых к нему во время измерений элементов), $f_{m=2} = 7,31$, $f_{m=3} = 11,8$ кГц. В спектре вибрации этого типа подшипников резонансы наблюдаются на частотах 7,5 и 11 кГц (см. фиг. 2).

Расчетные значения собственных частот для шарикоподшипника типа 310 составили: $f_{m=1} = 2,5$, $f_{m=2} = 3,7$, $f_{m=3} = 6,3$ кГц. В спектре вибрации этого типа подшипников резонансы наблюдаются на частотах 3,8 и 6,2 кГц (см. фиг. 3). Поскольку подшипник типа 310 имеет 8 шариков, то для 4-й формы изгибных колебаний наружного кольца, собственная частота которой попадает в контролируемый частотный диапазон, выполняется условие $m = ln/2$ при $l=1$, и в (1.9) следует полагать $\lambda = 0$ и $\lambda = 2$. Два значения собственной частоты в этом случае составляют $f_{m=4}^{(1)} =$



Фиг. 2

$\approx 10,0$ кГц при $\lambda=0$, когда шарики находятся в узлах изгибных колебаний кольца, и $f_{m=4}^{(2)}=11,1$ кГц, когда шарики находятся в пучностях изгибных колебаний кольца. В спектре вибрации этого типа подшипников соответствующие резонансы наблюдаются на частотах 10 и 11,2 кГц (фиг. 3).

Таким образом, рассчитанные по предложенной теории собственные частоты совпадают с экспериментально установленными резонансными частотами наружных колец в составе шарикоподшипников. В то же время в спектре вибрации подшипника типа 310 (фиг. 3) имеются два дополнительных резонанса на частотах 9,2 и 11,8 кГц, идентифицировать которые в рамках изложенной выше теории не удается.

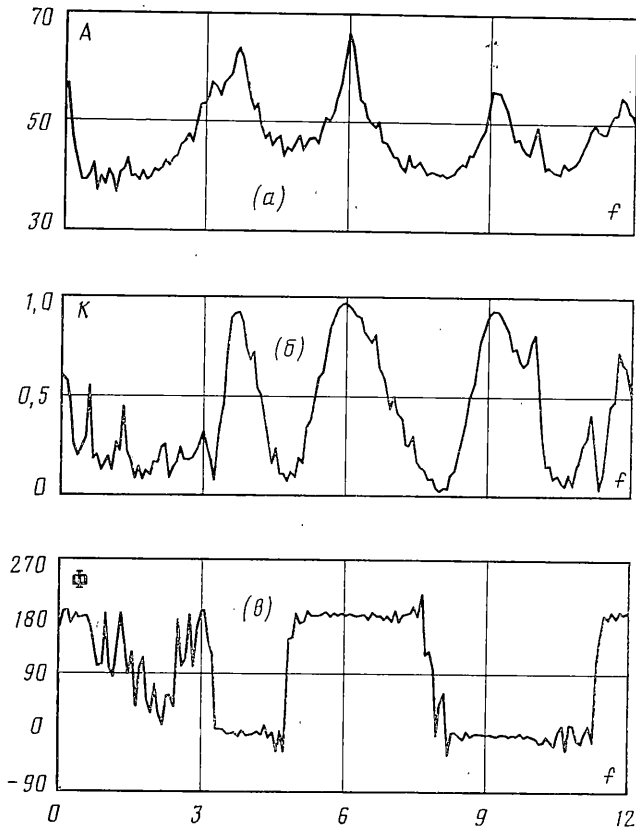
3. С целью объяснения двух неидентифицируемых в рамках вышеизложенной теории резонансных пиков в спектре виброускорений наружного кольца подшипника типа 310 на частотах 9,2 и 11,8 кГц (фиг. 3) рассмотрим изгибные колебания наружного кольца с учетом присоединенных масс шариков. Обозначим массу шарика m_b , перемещение i -го шарика вдоль оси, проходящей через его центр и центр кольца, s_i — жесткость контакта шарик — наружное кольцо K_1 , а шарик — внутреннее кольцо K_2 (при этом в соответствии с принятыми ранее обозначениями фиг. 1, $K_1^{-1} + K_2^{-1} = K^{-1}$).

Кинетическая и потенциальная энергии n шариков равны

$$T_b = 0,5 \sum m_b s_i^2, \quad \Pi_b = 0,5 \sum [K_2 s_i^2 + K_1 (w(\varphi_i) - s_i)^2] \quad (3.1)$$

Будем полагать, что движение i -го шарика по координате s_i связано со смещением элемента кольца в радиальном направлении $w(\varphi_i)$ зависимостью $s_i = \varepsilon w(\varphi_i)$, где ε — неизвестный коэффициент. При этом для m -й формы колебаний кольца в соответствии с (1.3) получим $s_i = \varepsilon a \sin m\varphi_i \cos vt$. Подставляя это выражение в (3.1) и проводя вычисления, получим

$$T_b = 0,25 m_b \varepsilon^2 a^2 v^2 n (1 - \mu_n^{2m} \cos 2m\varphi_0) \sin^2 vt \quad (3.2)$$



Фиг. 3

$$P_b = 0,25a^2n(1 - \mu_n^{2m} \cos 2m\varphi_0) [\varepsilon^2 K_2 + (1 - \varepsilon)^2 K_1] \cos^2 vt$$

Выражения (3.2) следует рассматривать как дополнительные члены полученных ранее выражений для кинетической и потенциальной энергий кольца (1.5). Собственные частоты системы находятся приравнением амплитуд кинетической и потенциальной энергий системы. При этом в зависимости от номера формы колебаний кольца m получим следующие два случая.

1°. $2m \neq ln$, $l=1, 2, \dots$; $\mu_n^{2m} = 0$. Проводя вычисления, найдем

$$\nu_m^2 = \{\nu_m^{*2} + 2(1+m^{-2})^{-1} [\varepsilon^2 \omega_2^2 + (1-\varepsilon)^2 \omega_1^2]\} [1 + \kappa \varepsilon^2 (1+m^{-2})^{-1}]^{-1} \quad (3.3)$$

$$\omega_1^2 = nK_1 / (2m_k), \quad \omega_2^2 = nK_2 / (2m_k), \quad \kappa = nm_b / m_k$$

Неизвестные значения коэффициента ε следует определять из условия экстремальности собственных частот и собственных форм колебаний $\partial \nu_m^2 / \partial \varepsilon = 0$, которое после подстановки в него выражения (3.3) принимает вид квадратного алгебраического уравнения.

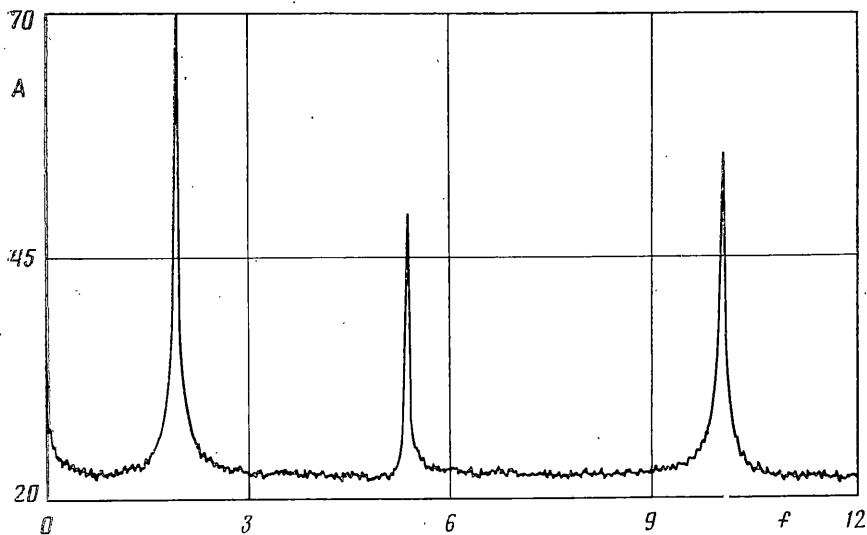
В частном случае, когда $K_1 = K_2$ (что характерно для многих типов шарикоподшипников, в том числе и рассматриваемых в статье), имеем

$$f_m^2 = \{f_m^{*2} + 4(1+m^{-2})^{-1} f_1^2 [\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2]\} [1 + \kappa \varepsilon^2 (1+m^{-2})^{-1}]^{-1} \quad (3.4)$$

где значение ε определяется решением уравнения

$$4\kappa(1+m^{-2})^{-1} \varepsilon^2 + [8 - \kappa(f_m^*/f_1)^2 - 4\kappa(1+m^{-2})^{-1}] \varepsilon - 4 = 0 \quad (3.5)$$

Для подшипника типа 310 имеем $\kappa = 0,33$, $f_1 = 2,5$ кГц, расчетное значение собственной частоты пятой формы изгибных колебаний свободного наружного кольца ($m=5$) $f_{m=5}^* = 16,2$ кГц. Решая уравнение (3.5) при этих значениях параметров, получим $\varepsilon_1 = 6,08$, $\varepsilon_2 = -0,516$. Соответствующие этим ε значения собственных частот, рассчитываемые по формуле



Фиг. 4

(3.4), равны $f_{m=5}^{(1)} = 11,8$ и $f_{m=5}^{(2)} = 17,3$ кГц. Таким образом, резонанс на частоте 11,8 кГц, наблюдающийся в спектре вибрации подшипника типа 310 (фиг. 3), идентифицирован.

2°. $2m=ln$, $l=1, 2, \dots$; $\mu_n^{2m}=1$. Проводя вычисления, найдем $v_m^2 = \{v_m^{*2} + 2(1+m^{-2})^{-1}[\varepsilon^2\omega_2^2 + (1-\varepsilon)^2\omega_1^2](1-\cos 2m\varphi_0)\} [1+\kappa\varepsilon^2(1+m^{-2})^{-1} \cdot (1-\cos 2m\varphi_0)]^{-1}$. Неизвестные значения коэффициента ε и угла φ_0 следует определять из условия экстремальности собственных частот и собственных форм колебаний $\partial v_m^2/\partial\varepsilon=0$, $\partial v_m^2/\partial\varphi_0=0$. В частном случае, когда $K_1=K_2$, имеем

$$f_m^2 = \{f_m^{*2} + 4f_1^2(1+m^{-2})^{-1}[\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2](1-\cos 2m\varphi_0)\} \times \\ \times [1+\kappa\varepsilon^2(1+m^{-2})^{-1}(1-\cos 2m\varphi_0)]^{-1} \quad (3.6)$$

где значения ε и φ_0 определяются решением системы уравнений

$$(1-\cos 2m\varphi_0) \{4\kappa(1+m^{-2})^{-1}(1-\cos 2m\varphi_0)\varepsilon^2 + [8-\kappa(f_m^*/f_1)^2 - \\ - 4\kappa(1+m^{-2})^{-1}(1-\cos 2m\varphi_0)]\varepsilon - 4\} = 0 \quad (3.7) \\ \sin 2m\varphi_0 \{[8-\kappa(f_m^*/f_1)^2]\varepsilon^2 - 8\varepsilon + 4\} = 0$$

Система (3.7) имеет решения $\varphi_0=0$ и $\varphi_0=\pi/(2m)$. Первое решение не зависит от ε , соответствует расположению шариков в узлах изгибающегося кольца и полностью совпадает с тем, что было получено ранее в п. 1 при рассмотрении колебательной системы без учета масс шариков:

$$f_m = f_m^* \quad (3.8)$$

Второе решение, $\varphi_0=\pi/(2m)$, соответствует расположению шариков в пучностях изгибающегося кольца. Квадрат собственной частоты

$$f_m^2 = \{f_m^{*2} + 8(1+m^{-2})^{-1}f_1^2[\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)^2]\} [1+2\kappa\varepsilon^2(1+m^{-2})^{-1}]^{-1} \quad (3.9)$$

где значения ε находятся решением первого уравнения системы (3.7) при $\varphi_0=\pi/(2m)$, принимающего следующий вид:

$$8\kappa(1+m^{-2})^{-1}\varepsilon^2 + [8-\kappa(f_m^*/f_1)^2 - 8\kappa(1+m^{-2})^{-1}]\varepsilon - 4 = 0 \quad (3.10)$$

Решая уравнение (3.10) при значениях параметров, характерных для подшипника типа 310, для четвертой формы изгибных колебаний кольца ($m=4$) поручим $\varepsilon_1=1,22$ и $\varepsilon_2=-1,33$. Соответствующие этим ε значения собственных частот рассчитываются по формуле (3.9) и равны: $f_{m=4}^{(1)} = 9,4$,

m	106		310					
	2	3	2	3	4	4	4	5
f_m'	7,6	11,4	3,9	6,1	9,4	10,0	14,5	11,8
f_m''	7,3	11,8	3,7	6,3	—	10,0	11,0	—
f_m'''	7,5	11,0	3,8	6,2	9,2	10,0	*	11,8

$f_{m=4}^{(2)} = 14,5$ кГц. Таким образом, резонанс на частоте 9,2 кГц, наблюдающийся в спектре вибрации подшипника типа 310 (фиг. 3), идентифицирован.

Подробное исследование зависимости (3.6) показало, что она не имеет экстремумов при $\varphi_0 \neq 0$ и $\varphi_0 \neq \pi/(2m)$. Наличие и характер экстремумов при $\varphi_0 = \pi/(2m)$ зависит от параметра $p = \kappa(f_m^*/f_1)^2$. Уравнение (3.10) всегда имеет два решения: $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 > 0$. Отрицательное решение ε_1 всегда соответствует максимуму функции (3.6). При $p > 4$ положительное решение соответствует минимуму функции (3.6). При $p < 4$ экстремум не существует (точка $\varphi_0 = \pi/(2m)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ является особой точкой типа «седло»). При $p = 4$ получаем $\varepsilon_2 = 1$, $f_m = f_m^*$.

Для удобства сравнения расчетные и экспериментально установленные значения собственных частот шарикоподшипников типа 106 и 310 представлены в таблице, где m — номер формы колебаний кольца, f_m' — расчетная частота m -й формы по уточненной модели, f_m'' — расчетная частота m -й формы по приближенной модели, f_m''' — экспериментально установленная частота m -й формы; собственные частоты выражены в кГц; прочерк соответствует отсутствию частоты при расчетах по приближенной модели, а * — выходу соответствующей частоты за диапазон измерений прибора.

Таким образом, резонансные явления в шарикоподшипниках, виброакустические характеристики которых контролируются на стандартных приводных установках, определяются главным образом изгибными колебаниями наружных колец.

Собственные частоты наружных колец шарикоподшипников, работающих под осевой нагрузкой, отличаются от собственных частот изгибных колебаний свободных колец. Частоты первых форм собственных колебаний наружных колец нагруженных шарикоподшипников могут рассчитываться по приближенной формуле (1.9), не учитывающей влияние масс шариков. Собственные частоты высших форм колебаний, особенно шарикоподшипников больших размеров, следует рассчитывать по уточненным зависимостям (3.4), (3.5), (3.8) — (3.10), учитывающим влияние масс шариков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В. Ф., Бальмонт В. Б. Механика шарикоподшипников гироскопов. М.: Машиностроение, 1986. 272 с.
2. Jgarashi T. Noise of Ball Bearing // Bull. JSME. 1962. V. 5. № 17. P. 184–194.
3. Halm G. Resonanzfrequenzen beider untersuchung von Lagerschwingungen // Maschinen Bantchnick. 1973. № 1. S. 19–22.
4. American national standart of Rolling Bearing vibration and noise // ANSI. 1976. V. 313. 7 p.
5. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–23.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
7. Бендат Дж. С., Пирсол А. Дж. Применение корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1983. 312 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.II.1986