

УДК 624.07.534.1

О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО КОЛЬЦА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

АЛЬБЕР А. Я.

Рассматривается задача о возбуждении упругих волн в кольце под действием движущейся нагрузки. Исследуются качественно различные случаи возбуждения волн, резонансные режимы в зависимости от параметров нагрузки. Для характеристики решения в целом предлагается энергетический подход. Рассматривается вопрос о волновом сопротивлении движению нагрузки. Данная модельная задача возникает, например, при рассмотрении общей динамики подшипника качения в звуковом диапазоне частот.

1. Упругое кольцо будем характеризовать плотностью Гамильтониана [1]:

$$\lambda(u, w) = 0,5 \{ A(u_\varphi + w)^2 + D(w_{\varphi\varphi} - u_\varphi)^2 + \rho F(u_t^2 + w_t^2) \} \quad (1.1)$$

где  $A = EF/R^2$ ,  $D = EJ/R^4$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $F$  — площадь поперечного сечения,  $R$  — радиус средней линии,  $\rho$  — плотность вещества,  $u(\varphi, t)$ ,  $w(\varphi, t)$  — соответственно, окружные и поперечные перемещения в координатах  $\varphi$  (угол) и  $t$  (время), индексы  $\varphi$  и  $t$  означают соответствующие частные производные.

Пусть на упругое кольцо воздействует точечная по пространству и периодическая по времени нагрузка, лежащая в плоскости кольца и направленная по нормали к нему. Предположим, что нагрузка движется по кольцу с некоторой постоянной скоростью  $V > 0$ . Диссипацию будем характеризовать величинами  $\xi \geq 0$  и  $\zeta \geq 0$ , вообще говоря являющимися зависимыми ( $\xi = \zeta = \text{const}$ ), в предположении, что демпфирующие компоненты пропорциональны скоростям  $u_t$  и  $w_t$  ( $\xi$  характеризует окружное затухание,  $\zeta$  — поперечное). Пусть, кроме того, для кольца выполняются условия пространственной периодичности решения его частных производных по  $\varphi$  до требуемого порядка. Тогда для  $n$ -й пространственной моды справедлива замена  $\partial/\partial\varphi \rightarrow -in$ , где  $n$  — волновое число ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Обозначим, соответственно, окружные и поперечные моды  $n$ -го порядка через  $u_n(t)$  и  $w_n(t)$ .

Рассмотрим нагрузку в виде  $Q(\varphi, t) = (P_0 \exp i\Omega t) \delta(\varphi - Vt)$  ( $\Omega \geq 0$ ); ее  $n$ -я пространственная составляющая определяется равенством

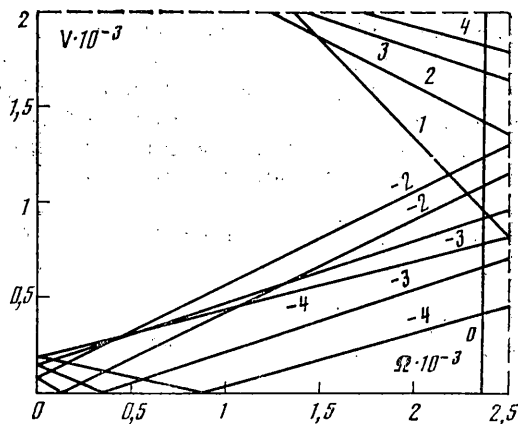
$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\varphi, t) \exp in\varphi d\varphi = P_0 \exp i(\Omega + nV)t \quad (1.2)$$

Уравнение для  $u_n$  и  $w_n$  представляется в операторном виде

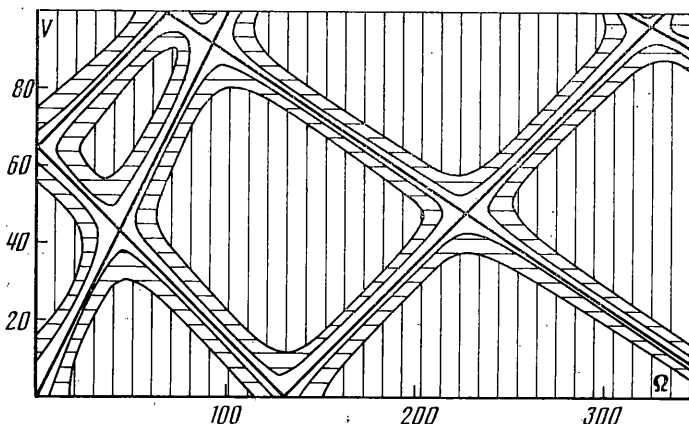
$$L_n \begin{pmatrix} w_n(t) \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$L_n = \begin{pmatrix} \rho F d^2/dt^2 + A + Dn^4 + \xi d/dt & -in(A + Dn^2) \\ in(A + Dn^2) & \rho F d^2/dt^2 + (A + D)n^2 + \zeta d/dt \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Из соотношения (1.2) видно, что решение уравнения (1.3) имеет Доплеровскую добавку к частоте внешнего воздействия тем большую, чем выше порядок рассматриваемой моды. При этом фазовая скорость с ростом  $n$



Фиг. 1



Фиг. 2

асимптотически стремится к скорости движения нагрузки.

Приравнявая к нулю преобразование Фурье по  $t$  оператора (1.4), получим дисперсионное уравнение

$$\omega^4 - i(\xi + \zeta)(\rho F)^{-1}\omega^3 - [\rho h(1+n^2)(A+Dn^2) + \xi\zeta](\rho F)^{-2}\omega^2 + i[\xi(A+Dn^2) + \zeta n^2(A+D)](\rho F)^{-2}\omega + n^2AD(n^2-1)^2(\rho F)^{-2} = 0 \quad (1.5)$$

Можно показать, что  $\omega$  — действительно при  $\xi=0$  и  $\zeta=0$ , т. е. ядро оператора  $L_n$  состоит из суммируемых функций. При положительных  $\xi$  и  $\zeta$  значения  $\omega$  — комплексные с положительной мнимой частью, что также приводит к суммируемым функциям. Положительность мнимой части  $\omega$  проверяется заменой в (1.5)  $\omega$  на  $(-i\omega)$  и последующей проверкой критерия Рауса-Гурвица.

Для удобства представления решения системы (1.4) введем следующие обозначения

$$T = T(\Omega, V, n) = -\rho F(\Omega + nV)^2 + A + Dn^4 \\ S = S(\Omega, V, n) = -\rho F(\Omega + nV)^2 + (A + D)n^2$$

Значение левой части (1.5) при  $\omega = \Omega + nV$  обозначим  $\chi = \chi(\Omega, V, n)$ .

Тогда

$$w_n(t) = P_0 \chi^{-1}(S + \xi(\Omega + nV)) \exp[i(\Omega + nV)t] \\ u_n(t) = iP_0 \chi^{-1} n(A + Dn^2) \exp[i(\Omega + nV)t]$$

Как в случае систем с непрерывным спектром [2], резонансные свойства рассматриваемого решения зависят от скорости движения нагрузки: в случае, когда комбинация  $\Omega + nV$  удовлетворяет уравнению  $\chi(\Omega, V, n) = 0$ , амплитуды колебаний неограниченно возрастают. При  $\xi > 0$  и  $\zeta > 0$

неограниченный рост амплитуд не наблюдается, так как нули  $\chi$  не лежат на действительной оси. На фиг. 1 изображены резонансные линии для стального кольца ( $E=2 \cdot 10^6$ ;  $R=7$ ;  $S=0,5$ ;  $J=0,01$ ;  $\rho=7,8$ ;  $n$  рядом с линиями — волновое число — соответствует модам с  $-4$  по  $4$ ;  $V=c^{-1}$ ,  $\Omega=c^{-1}$ ) в плоскости  $(\Omega, V)$ . Видно, что в зависимости от физических параметров задачи, резонансы могут наблюдаться, в частности, по нескольким модам одновременно.

Запишем решение задачи в действительной форме: если  $Q = (P_0 \cos \Omega t) \delta(\varphi - Vt)$ , тогда

$$w(\varphi, t) = P_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(\Omega, V) \cos((\Omega + nV)t - n\varphi - \kappa_n(\Omega, V)) \quad (1.6)$$

$$u(\varphi, t) = P_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(\Omega, V) \sin((\Omega + nV)t - n\varphi - \nu_n(\Omega, V))$$

$$\begin{aligned} \Phi_n(\Omega, V) &= [S^2(\Omega, V, n) + \xi^2(\Omega + nV)^2]^{1/2} |\chi(\Omega, V, n)|^{-1} \\ \Psi_n(\Omega, V) &= n(A + n^2D) |\chi(\Omega, V, n)|^{-1} \\ \kappa_n(\Omega, V) &= \arctg[(S \operatorname{Im} \chi + \xi(\Omega + nV) \operatorname{Re} \chi) / (S \operatorname{Re} \chi + \xi(\Omega + nV) \operatorname{Im} \chi)] \\ \nu_n(\Omega, V) &= \arctg[\operatorname{Im} \chi / \operatorname{Re} \chi] \end{aligned}$$

2. Поскольку решение (1.6) содержит счетное число мод, каждая из которых имеет свою фазовую скорость, то для характеристики решения в целом не совсем удобно рассматривать функционалы типа «зависимость амплитуды решения от входных параметров». Поэтому предлагается за основу характеристики решения принять полную энергию, отнесенную к амплитуде  $P_0$ , и, должным образом обезразмерив, проследить ее зависимость от входных параметров  $(\Omega, V)$ . При этом необходимо использовать тот факт, что полная энергия системы меняется во времени с периодом  $\pi/\Omega$  (не зависит от  $V$ ) несмотря на то, что каждая мода имеет свою частоту. Это указывает на возможность усреднения по периоду нагрузки.

Полная энергия системы равна  $\langle \lambda(u, w) \rangle$  определяется выражением (1.1):

$$H(t) = \int_0^{2\pi} \lambda(u, w) d\varphi$$

Проделав выкладки, при  $\Omega \neq 0$  получим

$$\begin{aligned} \langle H(t) \rangle &= \pi P_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{A(\Phi_n(\Omega, V) - \Psi_n(\Omega, V)n)^2 + \\ &+ Dn^2(\Psi_n(\Omega, V) - n\Phi_n(\Omega, V))^2 + \rho F(\Omega + nV)^2(\Psi_n^2(\Omega, V) + \Phi_n^2(\Omega, V))\} \end{aligned}$$

В случае  $\Omega = 0$  имеем  $dH/dt = 0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \langle H(t) \rangle &= H = 2\pi P_0^2 \left[ \Phi_0^2(0, V)A/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A(\Phi_n(0, V) - \Psi_n(0, V)n)^2 + \right. \\ &\left. + Dn^2(\Psi_n(0, V) - n\Phi_n(0, V))^2 + \rho F n^2 V^2(\Psi_n^2(0, V) + \Phi_n^2(0, V))\} \right] \end{aligned}$$

На фиг. 2 изображены линии уровня функционала  $P: (\Omega, V) \rightarrow \langle H(t) \rangle (P_0 R)^{-1}$  в случае стального кольца ( $E=2 \cdot 10^6$ ;  $R=7$ ;  $S=0,5$ ;  $J=0,01$ ;  $\rho=7,8$ ; вертикальная штриховка соответствует  $P < 0,1$ ; горизонтальная штриховка:  $0,1 < P < 1$ ; незаштрихованные области:  $1 < P < 5$ ; темные зоны внутри незаштрихованных областей соответствуют  $P > 5$  ( $\max P \approx 23$ );  $V=c^{-1}$ ,  $\Omega=c^{-1}$ . Видно, что максимумы  $P$  лежат в окрестности ре-

зонансных прямых  $\Omega + nV = \text{Re } \omega_n^*$ , где  $\omega_n^*$  — решения дисперсионного уравнения  $\chi(\Omega, V, n) = 0$  (1.5). Помимо этого, высокий уровень  $P$  приходится на линию  $\Omega = V$ . Случай  $\Omega = V$  является особым.

Из формул (1.6) можно заметить следующее: при  $\Omega < V$  все моды бегут в том же направлении, что и нагрузка. При этом существуют быстрая и медленная компоненты с одной и той же длиной волны. Первая имеет фазовую скорость  $V_+ < V$ , вторая  $V_+ > V$ . При  $\Omega = V$  мода порядка  $-1$  останавливается; когда  $\Omega > V$ , она бежит в сторону, противоположную движению нагрузки. Таким образом случай  $\Omega = V$  разделяет две качественно различные картины возбуждения волн. При  $\Omega > V$  можно определить число мод  $k^*$ , бегущих в обратном направлении из системы неравенств:  $\Omega - k^*V > 0$ ,  $\Omega - (k^* + 1)V < 0$ . Помимо этого, при  $\Omega = V$  для любых значений коэффициентов затухания наблюдается резонанс моды порядка  $-1$  (это связано с вырождением дисперсионного соотношения).

Рассмотрим отдельно поперечную моду порядка  $-1$ . Поскольку колебания малые, то  $\Phi_{-1}/R \approx \varepsilon \ll 1$ . Срединная линия недеформируемого кольца удовлетворяет соотношению  $x^2 + y^2 = R^2$ . С учетом моды порядка  $-1$ , срединная линия отклонится от равновесного состояния на величину  $\Phi_{-1} \cos(-\varphi - \kappa_{-1})$  (не ограничивая общности, положим  $\kappa_{-1} = 0$ ). Оказывается, что существует точка  $x_0$  такая, что с точностью до второго порядка малости по  $\varepsilon$ , уравнение срединной линии деформированного кольца запишется как  $y^2 + (x - x_0)^2 = R^2$ , где  $x_0 = \Phi_{-1}/R$ . Это значит, что отклонение от равновесного состояния, описываемое модой  $-1$ , на самом деле не связано с деформацией, а представляет собой движение кольца как целого в направлении, определяемом фазой  $\kappa_{-1}$ . Вклад моды порядка  $-1$  при  $\Omega = V$  в полную энергию системы равен нулю. Поэтому в данном случае в (1.6) необходимо отбросить моду  $-1$ , как не связанную с упругими деформациями.

Особый интерес представляет волновое сопротивление движению нагрузки. Для подсчета силы сопротивления можно воспользоваться законом сохранения полной энергии, которая в рассматриваемом случае имеет вид: ( $S$  — плотность потока энергии,  $f$  — сила волнового сопротивления)

$$dH/dt = S|_{\varphi=0} - S|_{\varphi=2\pi} + fV + \int_0^{2\pi} (w_t(Q + \xi w_t) + \xi u_t^2) d\varphi \quad (2.1)$$

Для определения постоянной составляющей силы  $f$  произведем усреднение (2.1) по периоду нагрузки (если  $\Omega = 0$ ,  $f$  не зависит от времени). В силу пространственной периодичности задачи  $S|_{\varphi=0} = S|_{\varphi=2\pi}$ . Получим

$$\langle f \rangle = P_0^2 (2V)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\Omega + nV) \Phi_n \sin \kappa_n - 2\pi(\Omega + nV)^2 (\xi \Psi_n^2 + \zeta \Phi_n^2)]$$

В случае отсутствия потерь сила сопротивления при любом значении  $\Omega$  равна нулю. В этом заключается существенное отличие замкнутых, пространственно ограниченных систем от систем со «стоками» энергии или пространственно неограниченных, в которых энергия движения нагрузки может излучаться на бесконечность, начиная с некоторой критической скорости тормозное излучение [2, 3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике: Справочник в 6 томах. Т. 1 под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. Крысов С. В. Вынужденные колебания и резонанс в упругих системах с движущимися нагрузками. Горький: Горьк. ун-т. 1985. 69 с.
3. Тамм И. Е. Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхзвуковыми скоростями, и некоторые приложения к физике плазмы. Успехи физ. наук. 1959. Т. 68. Вып. 3. С. 387–396.

Москва

Поступила в редакцию  
23.IX.1987