

УДК 533.6013.42

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ  
С УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ,  
ПОКРЫТОЙ ТОНКИМ СЖИМАЕМЫМ СЛОЕМ**

ПЕКУРОВСКИЙ Л. Е., ПОРУЧИКОВ В. Б.

Исследование дифракции акустических волн в жидкости на оболочках различной формы в классической постановке изложено, в частности в монографиях [1, 2]. Постановка задач, учитывающая наличие тонкого сжимаемого слоя, покрывающего тело, предложена в [3, 4]. Амортизирующий слой моделировался специальным граничным условием на поверхности тела, а тело предполагалось абсолютно жестким. В предлагаемой работе делается отказ от этого ограничения: рассматривается дифракция акустической волны на сферической упругой оболочке с амортизирующим покрытием. Полученное в [3] граничное условие обобщается с целью учета упругих свойств оболочки.

**1. Постановка нестационарной осесимметричной задачи дифракции.** Пусть сферическая оболочка радиуса  $a$  и толщины  $h$  ( $h \ll a$ ) первоначально покоится в бесконечном пространстве идеальной сжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_0$ , давлением  $p_0$  и скоростью звука  $c_0$ .

В момент времени  $t=0$  на оболочку набегают акустическая волна давления  $p_i=f(t, r, \varphi)+p_0$ , в результате чего возникает процесс взаимодействия упругой оболочки с жидкостью. Предполагается, что  $f(t, r, \varphi) \equiv 0$  всюду в области перед фронтом падающей волны  $p_i$ , впервые достигающим поверхности тела в точке  $A$  на полуоси  $\varphi=0$  ( $x=y=0$ ), где  $r, \varphi, \psi$  — подвижная система сферических координат, начало которой всегда совпадает с центром масс упругой оболочки ( $x=r \sin \varphi \cos \psi, y=r \sin \varphi \sin \psi, z=r \cos \varphi$ ).

В рамках линейной теории в выбранной подвижной системе координат движение оболочки описывается уравнениями Кирхгофа — Лява [1, 2] для радиального  $w$  и тангенциального  $v$  смещений ее срединной поверхности. В данном случае предполагается, что жесткость амортизирующего слоя пренебрежимо мала по сравнению с жесткостью оболочки, а к массе элемента оболочки добавляется масса покрывающего его элемента амортизирующего слоя. Результирующее поле давлений  $p$  в жидкости описывается волновым уравнением с нулевыми начальными и со следующим граничным условием на поверхности тела

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\rho_* c_*^2}{h_*} \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \cos \varphi \right] = \frac{c_*^2}{a^2} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \quad (1.1)$$

где  $\rho_*$ ,  $c_*$  — соответственно плотность и скорость распространения звука в материале амортизирующего слоя,  $\zeta$  — смещение центра масс оболочки, т. е. его координата в неподвижной системе отсчета, совпадающей в начальный момент времени с введенной выше подвижной системой, и предполагается, что  $\zeta > 0$  в направлении отрицательной полуоси  $Oz$  и  $w > 0$  по направлению к центру сферы.

Граничное условие (1.1) получено путем обобщения граничного условия, введенного в [3] для моделирования тонкого сжимаемого слоя, покрывающего абсолютно жесткое тело. Снятие ограничения абсолютной жесткости требует замены величины  $(1/\rho_0) \partial p / \partial r$  указанного условия разностью, стоящей в квадратных скобках.

К упомянутым уравнениям и условиям добавляется уравнение движения центра масс оболочки

$$4\pi a^2 (\rho h + \rho_* h_*) \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \iint_{\Sigma} p \cos \varphi d\Sigma \quad (1.2)$$

с нулевыми начальными условиями ( $\rho$  — плотность оболочки,  $\Sigma$  — поверхность оболочки).

Поскольку постановка рассматриваемой задачи линейна, удобно представить давление  $p$  в жидкости в виде суммы  $p = p_i + p_s + p_R$ , где составляющая  $p_s$  (дифракционное давление) — возмущение, которое вносит жесткая неподвижная сфера с амортизирующим покрытием в поле давлений набегающей волны  $p_i$ , а составляющая  $p_R$  (давление излучения) возникает из-за движения оболочки как твердого тела и ее упругих колебаний.

Введем теперь безразмерные переменные

$$\begin{aligned} r^* &= r/a, \quad t^* = c_0 t/a, \quad p_i^* = (p_i - p_0)/p_m = \\ &= f/p_m = f^*, \quad p_s^* = p_s/p_m, \quad p_R^* = p_R/p_m \\ p^* &= (p - p_0)/p_m, \quad w^* = w/a, \quad v^* = v/a, \quad \xi^* = \xi/a \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $p_m$  — произвольная константа, имеющая размерность давления, в качестве которой часто удобно брать величину перепада давлений на фронте падающей волны  $p_i$ . В этих безразмерных переменных описанная выше система уравнений движения оболочки, жидкости и их граничных и начальных условий принимает следующий вид (всюду далее звездочка у безразмерных переменных опускается):

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon) [\nabla^2 - (v + \text{ctg}^2 \varphi)] v + \frac{\partial}{\partial \varphi} \{ [\varepsilon \nabla^2 + \varepsilon(1-v) - 1 - v] w \} - \\ - \frac{\sin \varphi}{K_*} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{1}{K_*} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + \text{ctg} \varphi \right) \{ [1 + v + \varepsilon(v - \nabla^2 + \text{ctg}^2 \varphi)] v \} - [\varepsilon \nabla^2 (\nabla^2 + 1 - v) + 2(1+v)] w - \\ - \frac{\cos \varphi}{K_*} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{1}{K_*} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{3\beta}{m} (p_i + p_s + p_R)_{r=1} \right] \end{aligned}$$

$$v = \partial w / \partial \varphi = 0 \quad (\varphi = 0, \pi)$$

$$v = w = 0 \quad (t < 0) \quad (1.5)$$

$$\Delta p_s = \partial^2 p_s / \partial t^2 \quad (r > 1) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (p_i + p_s)}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial (p_i + p_s)}{\partial r} = \frac{v_*^2}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \sin \varphi \frac{\partial (p_i + p_s)}{\partial \varphi} \right] \\ p_s = 0 \quad (t < 0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\Delta p_R = \partial^2 p_R / \partial t^2 \quad (r > 1) \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_R}{\partial t^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_R}{\partial r} = \frac{v_*^2}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial p_R}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\gamma \beta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{d^2 \xi}{dt^2} \cos \varphi \right) \quad (r=1) \\ p_R = 0 \quad (t < 0) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{3\beta}{2m} \int_0^\pi (p_i + p_s + p_R) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \quad (1.10)$$

$$\xi = 0 \quad (t < 0) \quad (1.11)$$

$$K_* = \frac{c^2}{c_0^2 [1 + \rho_* h_* / (\rho h)]}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho(1-v^2)}, \quad m = 3 \frac{\rho h + \rho_* h_*}{\rho_0 a}$$

$$\beta = \frac{p_m}{\rho_0 c_0^2}, \quad \gamma = \frac{h_* \rho_0 c_0^2}{a \rho_* c_*^2}, \quad v_* = \frac{c_*}{c_0}, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{12a^2}$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right], \quad \nabla^2 \equiv \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$\nu, E$  — соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала оболочки,  $M_j, M_s$  — соответственно масса жидкости в объеме сферы и масса сферической оболочки с амортизирующим покрытием.

Система (1.4)–(1.11) полностью описывает решение задачи. Заметим при этом, что подсистема (1.6), (1.7) решается независимо от других уравнений и условий. Что же касается подсистем (1.4), (1.5), (1.8), (1.9) и (1.10), (1.11), то их решения взаимосвязаны.

**2. Решение задачи.** Применим к уравнениям и граничным условиям в системе (1.4)–(1.11) преобразование Лапласа по  $t$

$$\Phi^*(q, r, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, r, \varphi) e^{-qt} dt \quad (2.1)$$

$$\Phi(t, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon_0 - i\infty}^{\varepsilon_0 + i\infty} \Phi^*(q, r, \varphi) e^{qt} dq, \quad \varepsilon_0 > 0$$

Заметим, что в верхней формуле (2.1) нижний предел интегрирования по  $t$  будет на самом деле конечным, ибо в каждой точке жидкости и оболочки возмущения отсутствуют до момента прихода в нее падающей волны или возмущения от оболочки. Далее предполагая, что все функции, рассматриваемые в задаче, могут иметь не более, чем степенное возрастание по  $t$  при  $t \rightarrow \infty$ , получаем, что их изображения являются аналитическими функциями в области  $\text{Re } q > 0$ .

В результате, учитывая начальные условия (1.5), (1.7), (1.9) и (1.11), приводим (1.4)–(1.11) к виду

$$(1+\varepsilon) [\nabla^2 - (\nu + \text{ctg}^2 \varphi)] v^* + (\partial/\partial \varphi) \{ [\varepsilon \nabla^2 + \varepsilon(1-\nu) - 1 - \nu] w^* \} - q^2 \zeta^* \sin \varphi / K_* = q^2 v^* / K_* \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & (\partial/\partial \varphi + \text{ctg} \varphi) \{ [1 + \nu + \varepsilon(\nu - \nabla^2 + \text{ctg}^2 \varphi)] v^* \} - \\ & - [\varepsilon \nabla^2 (\nabla^2 + 1 - \nu) + 2(1 + \nu)] w^* - q^2 \zeta^* \cos \varphi / K_* = \\ & = q^2 w^* / K_* - (3\beta / m K_*) (p_i^* + p_s^* + p_R^*)_{r=1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$v^* = \partial w^* / \partial \varphi = 0 \quad (\varphi = 0, \pi) \quad (2.4)$$

$$\Delta p_s^* = q^2 p_s^* \quad (r > 1) \quad (2.5)$$

$$q^2 (p_i^* + p_s^*) - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial r} (p_i^* + p_s^*) = \frac{\nu_*^2}{\sin \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \sin \varphi \frac{\partial (p_i^* + p_s^*)}{\partial \varphi} \right] \right\} \quad (r=1) \quad (2.6)$$

$$p_s^* \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.7)$$

$$\Delta p_R^* = q^2 p_R^* \quad (r > 1) \quad (2.8)$$

$$q^2 p_R^* - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_R^*}{\partial r} = \frac{\nu_*^2}{\sin \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial p_R^*}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{q^2}{\gamma \beta} (w^* + \zeta^* \cos \varphi) \quad (r=1) \quad (2.9)$$

$$p_R^* \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

$$q^2 \zeta^* = \frac{3\beta}{2m} \int_0^\pi (p_i^* + p_s^* + p_R^*) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \quad (2.11)$$

Условия (2.7) и (2.10) следуют из того факта, что при  $t < r - 1$  функции  $p_s$  и  $p_R$  тождественно равны нулю.

Для исключения  $v^*$  из уравнений оболочек введем новую переменную  $u^*$  по формуле  $v^* = \partial u^* / \partial \varphi$ . Тогда уравнения (2.2), (2.3) можно записать в виде

$$(\partial/\partial\varphi) \{ [(1+\varepsilon)(\nabla^2+1-\nu)-q^2/K_*] u_0^* + [\varepsilon(\nabla^2+1-\nu)+(1+\nu)] w_0^* \} = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & [1+\nu-\varepsilon(\nabla^2+1-\nu)] \nabla^2 u_0^* - \\ & - [\varepsilon \nabla^2 (\nabla^2+1-\nu) + q^2/K_*] w_0^* = \\ & = - (3\beta/mK_*) (p_i^* + p_s^* + p_R^*)_{r=1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$u_0^* = u^* - \zeta^* \cos \varphi, \quad w_0^* = w^* + \zeta^* \cos \varphi$$

Применив оператор  $\partial/\partial\varphi + \text{ctg} \varphi$  к уравнению (2.12), приведем его к виду

$$[(1+\varepsilon)(\nabla^2+1-\nu)-q^2/K_*] \nabla^2 u_0^* + [\varepsilon(\nabla^2+1-\nu)-1-\nu] \nabla^2 w_0^* = 0 \quad (2.14)$$

Если теперь применить к (2.14) оператор  $[\varepsilon(\nabla^2+1-\nu)-1-\nu]$ , а к (2.13) — оператор  $[(1+\varepsilon)(\nabla^2+1-\nu)-q^2/K_*]$  и сложить эти уравнения, то окончательно придем к следующему уравнению  $w_0^*$ :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \nabla^6 w_0^* + \varepsilon (4 - q^2/K_*) \nabla^4 w_0^* + \\ & + [4\varepsilon + (1+\varepsilon)(1-\nu^2) + (1+\varepsilon\nu)q^2/K_*] \nabla^2 w_0^* + \\ & + [2(1+\varepsilon)(1-\nu^2) - (1+3\nu-\varepsilon+\varepsilon\nu)q^2/K_* - q^4/K_*^2] w_0^* = \\ & = (3\beta/(mK_*)) [(1+\varepsilon)(\nabla^2+1-\nu)-q^2/K_*] (p_i^* + \\ & + p_s^* + p_R^*)_{r=1}, \quad \nabla^{2m} \equiv \nabla^2 (\nabla^{2(m-1)}) \quad (m=2, 3) \end{aligned}$$

Далее разлагая  $w_0^*$ ,  $p_i^*$ ,  $p_s^*$  и  $p_R^*$  в ряды по полиномам Лежандра, найдем

$$\Phi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^* P_n(\cos \varphi), \quad \Phi_n^* = \left( n + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\pi} \Phi^* P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$$w_{0n}^* = (3\beta/m) (q^2 + C_n) (q^4 + A_n q^2 + B_n)^{-1} (p_{in}^* + p_{sn}^* + p_{Rn}^*)_{r=1} \quad (2.15)$$

$$A_n = K_* [\varepsilon \lambda^2 + (1+\varepsilon\nu)\lambda + 1 + 3\nu - \varepsilon(1-\nu)]$$

$$B_n = K_*^2 [\varepsilon \lambda(\lambda-2) + (1+\varepsilon)(1-\nu^2)] (\lambda-2)$$

$$C_n = K_* (1+\varepsilon) (\lambda-1+\nu), \quad \lambda = n(n+1) \quad (2.16)$$

Обратимся теперь к системам (2.5)–(2.7) и (2.8)–(2.10). Разлагая входящие в них функции в ряды по полиномам Лежандра от функций  $\cos \varphi$ , а затем решая получившиеся обыкновенные дифференциальные уравнения для функций  $p_{sn}^*(r)$  и  $p_{Rn}^*(r)$ , находим решения, убывающие при  $r \rightarrow \infty$ :

$$p_{sn}^* = M_n K_{n+1/2}(qr) r^{-1/2},$$

$$p_{Rn}^* = N_n K_{n+1/2}(qr) r^{-1/2} \quad (2.17)$$

Здесь  $K_{n+1/2}(qr)$  — модифицированная функция Бесселя третьего рода,  $M_n$  и  $N_n$  — неизвестные константы. Эти константы должны быть определены соответственно из условий (2.6) и (2.9), которые для функций  $p_{sn}^*$  и  $p_{Rn}^*$  принимают вид

$$d(p_{in}^* + p_{sn}^*)/dr - \gamma \alpha_n (p_{in}^* + p_{sn}^*) = 0 \quad (r=1)$$

$$dp_{Rn}^*/dr - \gamma \alpha_n p_{Rn}^* = q^2 w_{0n}^*/\beta \quad (r=1) \quad (2.18)$$

Подставляя (2.17) соответственно в (2.18), находим

$$M_n = \frac{2(\gamma \alpha_n p_{in} - dp_{in}^*/dr)_{r=1}}{2qK_{n+1/2}'(q) - (1+2\gamma \alpha_n)K_{n+1/2}(q)} \quad (2.19)$$

$$N_n = \frac{2q^2 w_{0n}^*}{\beta [2qK_{n+1/2}'(q) - (1+2\gamma\alpha_n)K_{n+1/2}(q)]}$$

С помощью (2.17) и (2.19) получаем следующее выражение для изображения амплитуды  $p_n^*$  формы результирующего давления в жидкости на сферической оболочке.

$$p_n^*|_{r=1} = (p_{in}^* + p_{sn}^* + p_{Rn}^*)|_{r=1} = \\ = [(p_{in}^*)|_{r=1} - (dp_{in}^*/dr)|_{r=1} F_n(q)/q + \\ + w_{0n}^* q F_n(q)/\beta] T_n(q) \quad (2.20)$$

$$F_n(q) = \{ [K_{n+1/2}(q) q^{-1/2}]' \}^{-1} K_{n+1/2}(q) q^{-1/2}, \\ T_n(q) = [1 - \gamma\alpha_n F_n(q)/q]^{-1} \quad (2.21)$$

Из (2.15) и (2.20) находим

$$p_n^*|_{r=1} = \frac{q^4 + A_n q^2 + B_n}{Q_n(q)} T_n(q) \left[ p_{in}^* - \frac{dp_{in}^*}{dr} \frac{F_n(q)}{q} \right]_{r=1} \quad (2.22)$$

$$Q_n(q) = q^4 + A_n q^2 + B_n - (3/m) q (q^2 + D_n) F_n(q) T_n(q) \quad (2.23)$$

Изображение безразмерной величины силы  $F^*$  (отнесенной к  $\rho a^2 p_m$ ), действующей на сферическую оболочку вследствие падения на нее акустической волны, согласно (2.2), дается выражением

$$F^* = (4/3) (p_i^*)|_{r=1} \quad (2.24)$$

Подставляя в (2.24) выражение (2.22) при  $n=1$  и учитывая, что согласно (2.16)  $B_1=0$ ,  $A_1=3D_1$ , находим

$$F^* = \frac{4}{3} \frac{(Cq^2+3)(q^2+2q+2) \{ p_{i1}^* - (dp_{i1}^*/dr) [F_1(q)/q] \}_{r=1}}{C\gamma q^5 + C(1+\gamma)q^4 + a_3 q^3 + a_2 q^2 + a_1 (q+1)} \quad (2.25)$$

$$a_1 = 6C_1, a_2 = 3(1+\gamma) + 2CC_2, a_3 = 3\gamma + 2CC_2$$

$$C_1 = 1 + (2m)^{-1} + \gamma v^*, C_2 = 1 + 3(2m)^{-1} + \gamma v^{*2}$$

$$C = D_1^{-1} = (c_0^2/c^2) [1 + (\rho^* h^*)/(\rho h)] [(1+\varepsilon)(1+v)]^{-1}$$

Из формул (2.24) и (2.11) находится связь между изображениями силы и смещения центра масс оболочки.

$$\xi^* = (3/4) \beta F^*/(mq^2) \quad (2.26)$$

Для безразмерной величины импульса  $I$  (отнесенного к  $\rho a^3 p_m/c_0$ ) находим

$$I = \int_0^\infty F(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t F(t) dt = \lim_{q \rightarrow 0} [q (F^*/q)] = \lim_{q \rightarrow 0} F^* \quad (2.27)$$

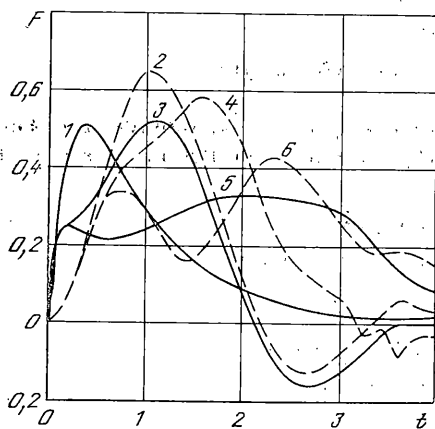
**3. Частные случаи.** 1°. Если в формулах (2.22), (2.25) перейти к пределу при  $c_0/c \rightarrow 0$ , то  $K_n \rightarrow \infty$  и получаются выражения, пригодные для случая абсолютной жесткой сферы конечной массы, покрытой тонким сжимаемым слоем

$$(p_n^*)|_{r=1, n \neq 1} = T_n(q) [p_{in}^* - (dp_{in}^*/dr) F_n(q)/q]_{r=1} \quad (3.1)$$

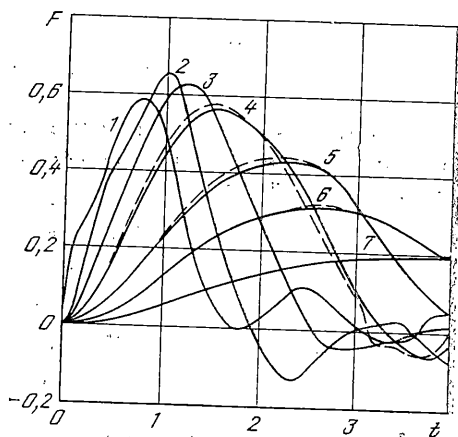
$$F^*(q) = \frac{4}{3} \frac{(q^2+2q+2) [p_{i1}^* - (dp_{i1}^*/dr) F_1(q)/q]_{r=1}}{\gamma q^3 + (1+\gamma)q^2 + 2[1+\gamma v^* + (2m)^{-1}](q+1)}$$

Здесь  $T_n(q)$  и  $F_n(q)$  даются выражениями (2.21).

2°. Если в формулах (2.22), (2.25) перейти к пределу при  $h^*/a \rightarrow 0$ , то  $\gamma \rightarrow 0$  и получаются результаты для случая упругой сферической обо-



Фиг. 1



Фиг. 2

лочки без амортизирующего покрытия [5]:

$$(p_n^*)_{r=1} = (q^4 + A_n q^2 + B_n) [p_{in}^* - (dp_{in}^*/dr) F_n(q)/q]_{r=1} Q_n^{-1}(q) \quad (3.2)$$

$$Q_n(q) = q^4 + A_n q^2 + B_n - (3/m) q (q^2 + D_n) F_n(q)$$

$$F^* = \frac{4}{3} \frac{(q^2 + 2q + 2)(Cq^2 + 3) [p_{i1}^* - (dp_{i1}^*/dr) F_1(q)/q]_{r=1}}{Cq^4 + C(2 + 3/m)q^3 + [3 + C(2 + 3/m)]q^2 + 3(2 + 1/m)(q + 1)}$$

3°. В случае плоской падающей волны вида  $p_i = p_m \exp\{-[t + (z-a)/c_0]/\theta_0\} \eta[t + (z-a)/c_0]$  в безразмерных переменных (1.3) (опуская звездочку у переменных) будем иметь  $p_i = \exp[-\vartheta(t + r \cos \varphi - 1)] \eta(t + r \cos \varphi - 1)$ , где  $\vartheta = a/(c_0 \theta_0)$ ,  $\eta(t)$  — функция Хевисайда. Тогда

$$p_{in}^* = \frac{e^{-\vartheta}}{q + \vartheta} \sqrt{\frac{2\pi}{q}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(qr)}{\sqrt{r}} \quad (3.3)$$

$$[p_{in}^* - (dp_{in}^*/dr) F_n(q)/q]_{r=1} = -\sqrt{2\pi} (n + \frac{1}{2}) e^{-\vartheta} q^{-2} (q + \vartheta) / [K_{n+\frac{1}{2}}(q)/\sqrt{q}]'$$

В частности при  $n=1$ :

$$[p_{i1}^* - (dp_{i1}^*/dr) F_1(q)/q]_{r=1} = 3q(q + \vartheta)^{-1} (q^2 + 2q + 2)^{-1} \quad (3.4)$$

и формулы (2.22) и (2.25) принимают вид

$$(p_n^*)_{r=1} = -(q^4 + A_n q^2 + B_n) T_n(q) Q_n^{-1}(q) q^{-2} (q + \vartheta)^{-1} \sqrt{2\pi} (n + \frac{1}{2}) e^{-\vartheta} / [K_{n+\frac{1}{2}}(q)/\sqrt{q}]' \quad (3.5)$$

$$F^* = 4q(Cq^2 + 3) (q + \vartheta)^{-1} [C\gamma q^5 + C(1 + \gamma)q^4 + a_3 q^3 + a_2 q^2 + a_1 (q + 1)]^{-1} \quad (3.6)$$

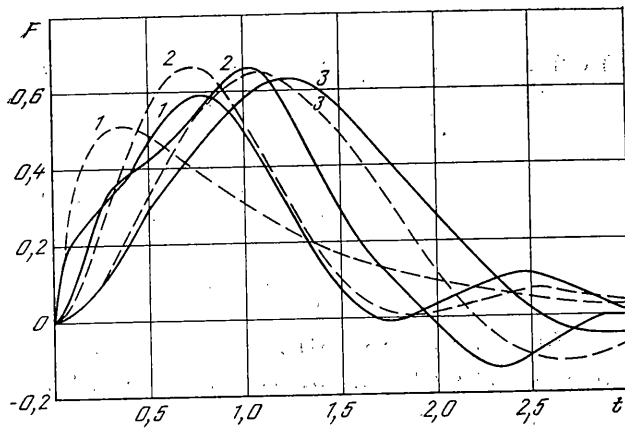
$$I = \lim_{q \rightarrow 0} F^* = \begin{cases} 0, & \vartheta \neq 0 \\ 2[1 + (2m)^{-1} + \gamma v_*^2]^{-1}, & \vartheta = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Функции  $T_n(q)$  и  $Q_n(q)$  даны выражениями (2.21) и (2.23), а коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  — формулами в (2.25).

При  $t \rightarrow \infty$  с помощью формул (2.26) и (3.6) можно найти предельное смещение центра масс

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \begin{cases} (3\beta/\vartheta) [1 + 2m(1 + \gamma v_*^2)]^{-1} + o(1), & \vartheta \neq 0 \\ 3\beta [t - 1 + o(1)] [1 + 2m(1 + \gamma v_*^2)]^{-1}, & \vartheta = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Так как величина  $\gamma v_*^2 = (h_* \rho_0)/(a \rho_*)$ , то, как следует из формул (3.7) и (3.8), величина импульса, сообщенного оболочке падающей волной, и предельное смещение центра масс оболочки не зависят от упругих свойств оболочки и амортизирующего покрытия.



Фиг. 3

4. Сила, действующая на оболочку. Пусть на погруженную в жидкость сферическую оболочку падает акустическая волна в форме ступеньки, т. е.  $\phi=0$  в формуле (3.3). Сила, действующая на оболочку, находится путем непосредственного вычисления интеграла обращения (2.1), в который подставлено изображение для силы (3.6). Считается, что  $m=12,5$ ; это соответствует стальной оболочке в воде, когда отношение плотности материала оболочки к плотности воды равно восьми, а относительная толщина оболочки  $h/a=0,01$ ; величины  $(\rho_* h_*)/(\rho h)$  и  $\gamma v_*^2$  полагаются для простоты равными нулю.

На фиг. 1 представлены зависимости силы от времени для оболочек без амортизирующего покрытия, когда  $\gamma=0$  (сплошные кривые) и оболочек, покрытых амортизирующим слоем (штриховые кривые), когда  $\gamma=1$ . Параметр  $C$ , характеризующий жесткость оболочек, выбирался равным 0; 0,2; 1. Кривые пронумерованы в соответствии с ростом  $C$  так, что значению  $\gamma=0$  отвечают нечетные номера, а значению  $\gamma=1$  — четные.

Хорошо видно, что сила, действующая на упругую оболочку без амортизирующего слоя, сначала возрастает почти так же как и сила, действующая на абсолютно жесткую оболочку (примерно до момента времени  $t=0,1$ ), а затем в зависимости уже от жесткости оболочки заметно замедляет свой рост, переходя в дальнейшем к осцилляциям с убывающей амплитудой. Если же оболочка покрыта амортизирующим слоем, то уже с самого начала сила возрастает заметно медленнее, хотя ее наибольшее значение в выбранном для примера случае каждый раз выше, чем у такой же оболочки без слоя. Заметим, что аналогичный эффект имеет место для абсолютно жестких тел с амортизирующим покрытием [3].

На фиг. 2 приведены зависимости силы от времени для одной и той же оболочки ( $C=0,08$ ), но с различными амортизирующими покрытиями (сплошные линии), номера кривых в порядке возрастания соответствуют  $\gamma=0; 0,4; 1; 2; 5; 10; 25$ . Материал оболочки характеризуется параметрами:  $\rho=7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $E=154$  ГПа,  $\nu=0,3$ ; скорость звука в воде  $c_0=1500$  м/с. Для значений  $\gamma=2; 5; 10$  штриховые кривые соответствуют оболочке той же массы, но абсолютной жесткости ( $C=0$ ). Видно, что уже при  $\gamma=5$  штриховая и сплошная кривые мало отличаются, а при  $\gamma=10$  они практически неразличимы. Это значит, что сила, действующая на упругую оболочку с достаточно мягким амортизирующим покрытием, не зависит от упругих свойств оболочки. При сравнительно небольших значениях параметра  $\gamma$  учет упругих свойств оболочки существен. Это видно из фиг. 3, на которой сплошными линиями показана зависимость силы от времени для  $\gamma=0; 0,4; 1,0$  (номера кривых — соответственно 1, 2, 3) для той же оболочки ( $C=0,08$ ), а штриховыми — аналогичные зависимости, но для абсолютно жестких оболочек ( $C=0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григolloк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек Л.: Судостроение, 1974. 208 с.
2. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Киев: Наук. думка, 1982. 400 с.
3. Пекуровский Л. Е., Поручиков В. Б., Созоненко Ю. А. Взаимодействие акустических волн с телами, покрытыми тонким сжимаемым слоем // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 823—831.
4. Дифракция акустических волн на телах с амортизирующим покрытием. М.: Изд-во МГУ, 1985. 57 с.
5. Поручиков В. Б., Степанов А. В. О существовании слабо затухающих колебаний тонкой сферической оболочки в жидкости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 6. С. 1335—1340.

Москва

Поступила в редакцию  
3.IV.1987