

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ  
С ЛИНЕЙНОЙ ОПОРОЙ,  
ВЫХОДЯЩЕЙ ОДНИМ КОНЦОМ НА ЗАЩЕМЛЕННУЮ ГРАНИЦУ

ОНИЦУК О. В., ПОНОВ Г. Я., ФАРШАЙТ П. Г.

Изгиб полосовых шарнирно опертых по обоим граням пластинок с опорами, выходящими одним концом на границу, рассматривался в [1–3]. Результаты счета показали резкое возрастание контактных усилий при приближении к концу опоры, расположенному внутри пластинки.

В публикуемой работе для прямоугольной пластинки Кирхгофа-Лява с линейной опорой, выходящей одним концом на защемленную границу, строится приближенное аналитическое решение, учитывающее поведение контактных усилий на обоих концах опоры. На конце, расположенном внутри пластинки, контактные усилия имеют неинтегрируемые особенности (аналогично [4–8]), что потребовало применения интегрального преобразования Меллина обобщенных функций [9]. На конце опоры, расположенном на границе, поведение контактных усилий довольно сложно и совпадает с поведением поперечных сил в вершине защемленной четвертьплоскости [10]. Для учета этого факта в работе используется новый метод решения интегральных уравнений с неподвижной особенностью в ядре.

1. Постановка задачи и сведение ее к интегральному уравнению. Рассмотрим прямоугольную пластину ( $0 < x < a$ ,  $|y| < b_1 = b/2$ ), две стороны которой ( $y = \pm b_1$ ,  $0 < x < a$ ) шарнирно оперты, сторона  $x = 0$ ,  $|y| < b_1$  защемлена, сторона  $x = a$ ,  $|y| < b_1$  свободна. Внутри пластинки на отрезке  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq c$  расположена абсолютно жесткая линейная опора, выходящая на защемленную сторону. Математически задача формулируется следующим образом: найти прогиб пластинки, удовлетворяющий следующему уравнению и граничным условиям, а также условию на опоре соответственно

$$D\Delta^2 w = q(x, y) \quad (0 < x < a, |y| < b_1 \text{ кроме } y = 0, 0 \leq x \leq c) \quad (1.1)$$

$$w = w_{yy}'' = 0 \quad (y = \pm b_1, 0 < x < a) \quad (1.2)$$

$$w = w_x' = 0 \quad (x = 0, |y| < b_1) \quad (1.3)$$

$$w_{xx}'' + \nu w_{yy}'' = 0, \quad w_{xxx}''' + (2 - \nu)w_{xyy}''' = 0 \quad (x = a, |y| < b_1) \quad (1.4)$$

$$w = w_y' = 0 \quad (y = \pm 0, 0 < x < c) \quad (1.5)$$

Пусть нагрузка  $q(x, y)$  симметрична относительно оси  $x$ , и, следовательно,  $w(x, y)$  четна по  $y$ .

Сведем задачу (1.1)–(1.5) к интегральному уравнению. Будем исходить из того [5–8], что наличие опоры вызывает скачок обобщенных поперечных сил

$$V_\nu(x, -0) - V_\nu(x, +0) = \psi(x), \quad \psi(x) \equiv 0 \quad c < x < a \quad (1.6)$$

Учитывая (1.2), (1.5), применим к (1.1), (1.3), (1.4) конечное косинус-преобразование Фурье по  $y$  по схеме обобщенного метода интегральных преобразований [6]. В результате приходим к следующей краевой задаче относительно трансформант: ( $\beta = \beta_l = \pi l b^{-1}$ ,  $l = 1, 3, 5, \dots$ )

$$w_i^{IV} - 2\beta^2 w_i'' + \beta^4 w_i = (\psi(x) + q_i(x)) D^{-1} \quad (0 < x < a) \quad (1.7)$$

$$U_0[w_i] = w_i(0) = 0, \quad U_1[w_i] = w_i'(0) = 0$$

$$U_2[w_i] = w_i''(a) - \nu \beta^2 w_i(a) = 0, \quad U_3[w_i] = w_i'''(a) - (2 - \nu) \beta^2 w_i'(a) = 0$$

$$[w_i(x), q_i(x)] = \int_{-b_1}^{b_1} [w(x, y), q(x, y)] \cos \beta y dy$$

Следуя [6], функцию Грина задачи (1.7) запишем в виде ( $\alpha = \alpha_k = \pi k a^{-1}$ ,  $\omega = \omega_l = \beta_l a$ ):

$$G(x, \xi) = \Phi(x, \xi) - \sum_{i=0}^3 \psi_i(x) U_i[\Phi], \quad \Phi(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \alpha \xi}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \quad (1.8)$$

$$U_0[\Phi] = U_2[\Phi] = 0, \quad \psi_1(x) = x \exp(-\beta x) + \psi_{10}(x)$$

$$\psi_{10}(x) = ((\beta^{-1} \operatorname{sh} \beta x - x \operatorname{ch} \beta x) (2(1+\nu) + (1-\nu)^2 \omega^2) + x \operatorname{sh} \beta x (4 + (1-\nu)^2 \omega (\omega - 1) - (1-\nu)(3+\nu) \operatorname{sh} \omega e^{-\omega})) d^{-1}$$

$$U_1[\Phi] = \frac{1}{2} \xi \beta^{-1} \exp(-\beta \xi) + U_{10}(\xi),$$

$$U_{10}(\xi) = \frac{1}{2} \xi \beta^{-1} (\operatorname{cth} \beta a - 1) \operatorname{ch} \beta \xi - \frac{1}{2} a \beta^{-1} \operatorname{sh} \beta \xi \operatorname{sh}^{-2} \beta a$$

$$\psi_3(x) = \beta^{-3} ((\beta x \operatorname{ch} \beta x - \operatorname{sh} \beta x) (2 \operatorname{ch} \omega + (1-\nu) \omega \operatorname{sh} \omega) - \beta x \operatorname{sh} \beta x ((1+\nu) \operatorname{sh} \omega + (1-\nu) \omega \operatorname{ch} \omega)) d^{-1}$$

$$U_3[\Phi] = \frac{1}{2} \omega \operatorname{sh}^{-1} \omega (2\omega^{-1} \operatorname{sh} \beta \xi - (1-\nu) (\operatorname{sh} \beta \xi \operatorname{cth} \omega + \xi a^{-1} \operatorname{ch} \beta \xi))$$

$$d = 4 + (1-\nu)^2 \omega^2 + (1-\nu)(3+\nu) \operatorname{sh}^2 \omega$$

Ряды в  $U_1[\Phi]$ ,  $U_3[\Phi]$  просуммированы с помощью формул [11].

Используя результаты [6] для нахождения  $w_i(x)$  и обращая косинус-преобразование Фурье по  $y$ , получим следующее выражение  $w(x, y)$  через неизвестную функцию  $\psi(\xi)$ :

$$w(x, y) = \frac{2}{bD} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \cos \beta_l y \int_0^c G(x, \xi) \psi(\xi) d\xi + w_q(x, y) \quad (1.9)$$

$$w_q(x, y) = \frac{2}{bD} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \cos \beta_l y \int_0^a G(x, \xi) q_l(\xi) d\xi$$

где  $w_q(x, y)$  — решение задачи (1.1)–(1.4) при отсутствии опоры. Условие  $w_y(x, \pm 0) = 0$  из (1.5) удовлетворяется за счет нечетности  $w_y'$  по  $y$  и равномерной сходимости ряда для  $w_y'$ , а условие  $w(x, \pm 0) = 0$  дает интегральное уравнение относительно  $\psi(\xi)$  (при вычислении  $\mu(z)$  использованы результаты [11]):

$$\int_0^c \left[ \frac{a^2}{2\pi^3 D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \alpha \xi}{k^3} (1 + \mu(\sigma k)) - \frac{x \xi}{\pi D} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} l^{-1} e^{-\beta(x+\xi)} - \frac{2}{bD} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} K_l(x, \xi) \right] \psi(\xi) d\xi = -w_q(x, 0) \quad (0 < x < c) \quad (1.10)$$

$$K_l(x, \xi) = x \exp(-\beta x) U_{10}(\xi) + \psi_{10}(x) U_1[\Phi] + \psi_3(x) U_3[\Phi]$$

$$\sigma = b a^{-1}, \quad \mu(z) = \operatorname{th} \rho - \rho \operatorname{sech}^2 \rho - 1, \quad \rho = \pi z / 2$$

В уравнении (1.10) сделаем следующие преобразования: выполним замену  $\xi = c\tau$ ,  $x = ct$ ,  $c\psi(c\tau) = \varphi(\tau)$  и введем обозначения  $\varepsilon = c a^{-1}$ ,  $\lambda = c b^{-1}$ ,  $\gamma = \gamma_k = \pi \varepsilon k$ ,  $\delta = \delta_l = \pi \lambda l$ ; медленно сходящиеся части рядов преобразуем с

использованием формул

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma t \sin \gamma \tau}{k^3} = \left(\frac{\pi \varepsilon}{2}\right)^2 \left[ (t-\tau)^2 \ln |t-\tau| - (t+\tau)^2 \ln(t+\tau) - \right. \\ \left. - 4t\tau \left( \ln \pi \varepsilon - \frac{3}{2} \right) \right] - \pi^2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2l} (2l-3)!}{2^{2l-3}-1} T_{2l-2} \sum_{h=1}^l \frac{t^{2l-2h+1}}{(2l-2k+1)!} \frac{\tau^{2h-1}}{(2k-1)!} \quad (1.11)$$

$$\sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} l^{-1} e^{-\delta(t+\tau)} = -\frac{1}{2} \left( \ln(t+\tau) + \ln \frac{\pi \lambda}{2} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2l} T_{2l}}{(-1)^l l} (t+\tau)^{2l} \right), \quad (1.12)$$

$$T_s = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h k^{-s}$$

Формула (1.11) получена трехкратным интегрированием равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikh} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2i} \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{i} \left( \frac{1}{z} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_l z^{2l-1}}{(2l)!} \right) \quad (1.13)$$

с определением констант интегрирования из асимптотики при  $z \rightarrow 0$  и выделением в полученном равенстве вещественной части [12]. Следует отметить, что ряд слева в (1.13) является расходящимся и суммируется по Абелю. Почленное интегрирование ряда при этом допустимо и приводит к сходящемуся ряду.

Формула (1.12) получена однократным интегрированием равенства (см. [12]):

$$\sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} e^{-ly} = \frac{1}{2} \operatorname{cosech} y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^{2l}-2}{(-1)^l (2l)!} B_l y^{2l-1} \right) \quad (1.14)$$

Для сходимости ряда (4.12) при  $t=\tau=1$  необходимо выполнение условия  $\lambda < 0,5$  (длина опоры меньше половины длины заземленной стороны пластинки). В дальнейшем рассматриваем этот случай.

В результате указанных преобразований уравнение (4.10) записывается в следующем виде:

$$\int_0^1 \left[ \left( \frac{\pi \varepsilon}{2} \right)^2 L(t, \tau) + K(t, \tau) \right] \varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (0 < t < 1) \quad (1.15)$$

$$L(t, \tau) = (t-\tau)^2 (\ln |t-\tau| - \ln(t+\tau)) + 2t\tau, \quad f(t) = -2\pi^3 D a^{-2} w_q(ct, 0)$$

$$K(t, \tau) = (\pi \varepsilon)^2 \left( \ln \frac{\lambda}{2\varepsilon} + 1 \right) t\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma t \sin \gamma \tau}{k^3} \mu(\sigma k) - \\ - \pi^2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2l} (2l-3)!}{2^{2l-3}-1} T_{2l-2} \sum_{h=1}^l \frac{t^{2l-2h+1}}{(2l-2k+1)!} \frac{\tau^{2h-1}}{(2k-1)!} - \\ - (\pi \varepsilon)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2l} T_{2l}}{(-1)^l l} (t+\tau)^{2l} - \frac{4\pi^3}{a^2 b} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} K_l(ct, c\tau)$$

Степенные ряды в  $K(t, \tau)$  бесконечно дифференцируемы при  $\varepsilon < 1$ ,

$\lambda < 0,5$ . Кроме того, в силу экспоненциального убывания  $\mu(\sigma k)$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $K_l$  при  $l \rightarrow \infty$ , соответствующие ряды также бесконечно дифференцируемы по  $t, \tau$ . Таким образом,  $K(t, \tau)$  — регулярная часть ядра в уравнении (1.15). Характеристическая часть ядра  $L(t, \tau)$  содержит подвижную (при  $t = \tau$ ) и неподвижную (при  $t = \tau = 0$ ) особенности, что является характерным для задач с линейными дефектами, выходящими на границу (см. [13–18]).

**2. Исследование особенностей контактных усилий.** Для построения эффективного приближенного решения уравнения (1.15) следует учесть поведение  $\varphi(\tau)$  при  $\tau \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 1$ . Асимптотики  $\varphi(\tau)$  определим, рассматривая характеристическое уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 L(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau = f_1(t) \quad (0 < t < 1) \quad (2.1)$$

которое можно переписать в виде свертки Меллина

$$\int_0^1 h\left(\frac{t}{\tau}\right) \tau^3 \varphi_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = f_1(t) \quad (0 < t < 1) \quad (2.2)$$

$$h(y) = \frac{1}{2} \pi^{-1} [(y-1)^2 \ln |(y-1)/(y+1)| + 2y]$$

Построим точное решение уравнения (2.2) методом факторизации [19] с использованием преобразования Меллина, для чего запишем (2.2) следующим образом ( $\psi(t)$  — неизвестная функция):

$$\int_0^\infty h\left(\frac{t}{\tau}\right) \tau^3 \varphi_-(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = f_-(t) + f_+(t) \quad (0 < t < \infty) \quad (2.3)$$

$$\|\varphi_-(t), f_-(t), f_+(t)\| = \begin{cases} \|\varphi_1(t), f_1(t), 0\| & (0 < t < 1) \\ \|0, 0, \psi(t)\| & (1 < t < \infty) \end{cases}$$

Поскольку  $L(0, \tau) = L'_t(0, \tau) = 0$ ,  $L(t, \tau) = 4\tau^2 + O(t^{-1})$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $f_-(t) = O(t^2)$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $f_+(t) = O(1)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Умножая (2.3) на  $t^{p-4}$  ( $1 < \text{Re } p < 3$ ) и интегрируя по  $t$  от 0 до  $\infty$ , получаем

$$H(p) \Phi^-(p) = F^-(p) + F^+(p) \quad (2.4)$$

$$\|H(p), \Phi^-(p), F^-(p), F^+(p)\| = \int_0^\infty \|h(t), t^3 \varphi_-(t), f_-(t), f_+(t)\| t^{p-4} dt \quad (2.5)$$

Обозначим  $f_2(t) = t^{-2} f_1(t)$  и предположим, что  $f_2'''(t)$  абсолютно интегрируема на промежутке  $(0, 1)$ . Трижды интегрируя по частям в (2.5), получаем (при вычислении  $H(p)$  использованы формулы [11]):

$$H(p) = -\frac{K(p)}{(p-3)(p-2)(p-1)} \text{tg} \frac{\pi}{2} p, \quad K(p) = 1 - \frac{(p-2)^2}{\sin^2(\pi p/2)} \quad (2.6)$$

$$F^-(p) = \frac{f_2(1)}{p-1} - \frac{f_2'(1)}{(p-1)p} + \frac{f_2''(1)}{(p^2-1)p} - F_3^-(p), \quad F_3^-(p) = \int_0^1 \frac{f_2'''(t) t^{p+1}}{(p^2-1)p} dt$$

$$F_3^-(p) = o(p^{-3})$$

Функция  $H(p)$  факторизуется следующим образом:

$$H(p) = H^+(p) H^-(p), \quad H^-(p) = \Gamma(\frac{1}{2}(p-1)) K^-(p) / [\Gamma(\frac{1}{2}p)(p-1)]$$

$$H^+(p) = \Gamma(\frac{1}{2}(3-p)) K^+(p) / [2\Gamma(\frac{1}{2}(4-p))(3-p)]$$

$$\|K^-(p), K^+(p)\| = \begin{cases} \|K(p)/E(p), E(p)\| & (\operatorname{Re} p \leq 2) \\ \|1/E(p), K(p)E(p)\| & (\operatorname{Re} p > 2) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$E(p) = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\ln K(q) dq}{q-p} \right)$$

$H^+(p)$  регулярна при  $\operatorname{Re} p < 3$ ,  $H^-(p)$  — при  $\operatorname{Re} p > 1$ ,  $H^\pm(p) = O(p^{-3/2})$ , а в представлении  $F^-(p)[H^+(p)]^{-1} = Q(p) = Q^+(p) + Q^-(p)$  имеем

$$Q^-(p) = \frac{f_2(1) - f_2'(1) + 1/2 f_2''(1)}{(p-1)H^+(1)} + \frac{f_2'(1) - f_2''(1)}{pH^+(0)} + \frac{f_2''(1)}{2(p+1)H^+(-1)} - Q_3^-(p) \quad (2.8)$$

$$Q_3^-(p) = -E_3(p) \quad (\operatorname{Re} p \geq 2), \quad Q_3^-(p) = Q_3(p) - E_3(p) \quad (\operatorname{Re} p \leq 2)$$

$$Q_3(p) = \frac{F_3^-(p)}{H^+(p)} = O(p^{-3/2}), \quad E_3(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left( \frac{q}{q-p} - 1 \right) Q_3(q) dq = O(p^{-1})$$

Здесь  $Q^-(p) = O(p^{-1})$  при  $p \rightarrow \infty$ . Используя (2.7), (2.8), а также схему рассуждений метода факторизации [19], решение задачи (2.4) получаем в виде

$$\Phi^-(p) = \frac{Q^-(p)}{H^-(p)} = \frac{Q^-(p) \Gamma(1/2 p) (p-1) E(p) \sin^{2/2} \pi p}{\Gamma(1/2 (p-1)) (\sin^{2/2} \pi p - (p-2)^2)} \quad (\operatorname{Re} p \leq 2) \quad (2.9)$$

$\Phi^-(p) = O(p^{1/2})$  при  $p \rightarrow \infty$ . Рост  $\Phi^-(p)$  при  $p \rightarrow \infty$  допускается при использовании преобразования Меллина обобщенных функций [9] и указывает на наличие неинтегрируемых особенностей у  $\varphi_1(\tau)$  при  $\tau \rightarrow 1$ :  $\varphi_1(\tau) = O((1-\tau)^{-3/2})$ . Таким образом, на конце опоры, расположенном внутри пластинки, особенность контактных усилий совпадает с полученной в [4–8] для задач об изгибе пластин с тонкими включениями. Для исследования поведения  $\varphi_1(\tau)$  при  $\tau \rightarrow 0$  следует применить к (2.9) формулу обращения для преобразования Меллина [9] и воспользоваться теоремой о вычетах. В итоге

$$\varphi_1(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^{-p_k} \quad (2.10)$$

где  $p_k$  — корни уравнения  $G(p) = \sin^{2/2} \pi p - (p-2)^2 = 0$  в области  $\operatorname{Re} p < 1$  ( $\operatorname{Re} p_{k+1} \leq \operatorname{Re} p_k$ ).

Следовательно, на конце опоры, выходящем на защемленную сторону, поведение контактных усилий совпадает с поведением поперечных сил в вершине защемленной четвертьплоскости [10]. Используя [10], находим  $p_{0,1} \approx -0,7395 \pm 1,119i$ .

В настоящее время метод решения интегральных уравнений с неподвижной особенностью в ядре (см. [6, 13, 14]) основывается на представлении искомой функции в виде  $\varphi(\tau) = \tau^{-\alpha} (1-\tau)^\beta \varphi_0(\tau)$ , где в нашем случае  $\beta = -3/2$ , а  $\alpha$  — корень уравнения  $G(p) = 0$ , что в исследуемой задаче затруднено наличием двух комплексно-сопряженных корней  $p_0$  и  $p_1$ . В подобных случаях в [15–18] использовался упрощенный подход, в котором  $\alpha = 0$  (его эффективность иллюстрировалась на конкретных примерах). После выбора  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $\varphi_0(\tau)$  аппроксимируется многочленами либо сплайсами. Следует подчеркнуть, что на гладкость  $\alpha_0(\tau)$  и эффективность такой аппроксимации оказывают влияние значения  $p_0$  (при  $\alpha = 0$ ) и положение корней  $p_k$  с  $\operatorname{Re} p_k < \operatorname{Re} p_0$  (при  $\alpha = p_0$ ). Тот факт, что недостаточная гладкость может привести к нарушению сходимости численного алгоритма, проиллюстрирован в [20] на модельной задаче (величина  $\varphi_0(1)$  стабилизировалась на известном точном значении, величина  $\varphi_0(0)$  стабилизировалась на значении, заметно отличающемся от точного).

Наличие точного решения уравнения (2.1) позволяет свести (1.15) к интегральному уравнению второго рода, которое, после соответствующих замен, можно сделать уравнением Фредгольма (аналогично [21]). Ниже используется другой путь, повторяющий в основных чертах метод ортогональных многочленов [6, 19] и позволяющий учесть не только наличие двух комплексно-сопряженных корней уравнения

$G(p)=0$ , но и все показатели  $p_k$ , входящие в разложение (2.10), что является основой хорошей сходимости метода.

**3. Общая схема метода базисных правых частей.** Рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 [S(t, \tau) + K(t, \tau)] \varphi(\tau) d\tau - f(t) = 0 \quad (0 < t < 1) \quad (3.1)$$

Следуя [19], построим систему функций  $\theta_n^\pm(\tau)$ , являющихся решениями уравнений со специальными правыми частями

$$\int_0^1 S(t, \tau) \theta_n^+(\tau) d\tau = t^n, \quad \int_0^1 S(\tau, t) \theta_n^-(\tau) d\tau = t^n \quad (0 \leq t \leq 1, n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

(для некоторых ядер  $S(t, \tau)$  диапазон изменения  $n$  может сужаться, см. п. 4).

Используя [6], построим функции

$$\|\pi_n^\pm(\tau), p_n^\mp(t)\| = \sum_{l=0}^n a_{nl}^\pm \|\theta_l^\pm(\tau), t^l\| \quad (3.3)$$

для которых имеют место соотношения

$$\int_0^1 S(t, \tau) \pi_n^+(\tau) d\tau = \sigma_n^+ p_n^-(t), \quad \int_0^1 S(\tau, t) \pi_n^-(\tau) d\tau = \sigma_n^- p_n^+(t) \quad (3.4)$$

$$(0 \leq t \leq 1, n=0, 1, 2, \dots)$$

и выполняются условия биортогональности

$$\int_0^1 p_n^\pm(t) \pi_m^\pm(t) dt = N_n^\pm \delta_{mn} \quad (3.5)$$

Формулы (3.4), (3.5) позволяют записать точное решение уравнения

$$\int_0^1 S(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau = f_1(t) \quad (0 < t < 1) \quad (3.6)$$

в следующем виде (аналогично [19]):

$$\varphi_1(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_m^- \sigma_m^+} \left( \int_0^1 f_1(t) \pi_m^-(t) dt \right) \pi_m^+(\tau) \quad (3.7)$$

а также найти приближенное решение уравнения (3.1) по следующей схеме: записать искомую функцию в виде

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^N \Phi_n \pi_n^+(\tau) \quad (3.8)$$

и определить  $\Phi_n$  из условия ортогональности левой части (3.1) функциям  $\pi_m^-(t)$  ( $m=0, 1, \dots, N$ )

$$N_m \sigma_m^+ \Phi_m + \sum_{n=0}^N d_{mn} \Phi_n = F_m \quad (m=0, 1, \dots, N) \quad (3.9)$$

$$d_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 K(t, \tau) \pi_n^+(\tau) \pi_m^-(t) d\tau dt, \quad F_m = \int_0^1 f(t) \pi_m^-(t) dt$$

Функцию (3.8) можно записать также в виде

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^N \varphi_n \theta_n^+(\tau) \quad (3.10)$$

Определяя  $\varphi_n$  из условия ортогональности левой части (3.1) функциям  $\theta_m^-(t)$ :

$$\sum_{n=0}^N (a_{mn} + b_{mn}) \varphi_n = f_m \quad (m=0, 1, \dots, N) \quad (3.11)$$

$$a_{mn} = \int_0^1 t^n \theta_m^-(t) dt, \quad f_m = \int_0^1 f(t) \theta_m^-(t) dt$$

$$b_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 K(t, \tau) \theta_n^+(\tau) \theta_m^-(t) d\tau dt$$

Использование (3.10), (3.11) вместо (3.8), (3.9) позволяет обойтись без трудоемкого в общем случае построения биортогональных систем (3.3).

**4. Решение интегрального уравнения задачи.** Описанная в п. 3 схема достаточно просто реализуется в случае уравнения (1.15) на базе следующих двух его свойств:

1. Уравнение (2.4), соответствующее (3.2), решается точно методом факторизации (так как  $L(t, \tau) = L(\tau, t)$ , то  $\theta_n^+(\tau) = \theta_n^-(\tau) = \theta_n(\tau)$ ). Беря в (2.4)  $f_1(t) = t^{n+2}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), получаем  $F^-(p) = (p+n-1)^{-1}$ :

$$\int_0^1 \theta_n(\tau) \tau^{p-1} d\tau = \Phi_n^-(p) = F^-(p) [H^+(1-n)H^-(p)]^{-1} \quad (4.1)$$

2. На основании (4.1) имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 t^i \tau^j \theta_n(\tau) \theta_m(t) dt d\tau = \Phi_m^-(i+1) \Phi_n^-(j+1) \quad (4.2)$$

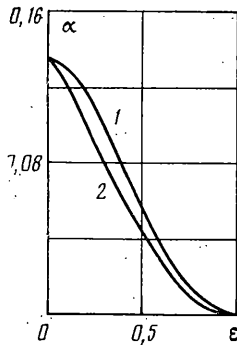
а ядро  $K(t, \tau)$  является абсолютно сходящимся рядом из слагаемых вида  $t^i \tau^j$ . Это позволяет получить простые формулы для  $b_{mn}$  в (3.11). Например,

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma t \sin \gamma \tau}{k^3} \mu(\sigma k) \right) \theta_n(\tau) \theta_m(t) dt d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(\sigma k)}{k^3} A_m A_n$$

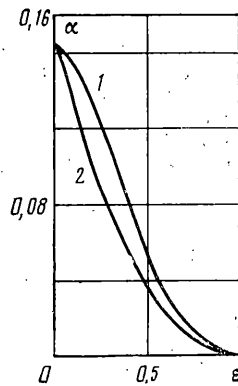
$$A_k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \gamma^{2i+1}}{(2i+1)!} \Phi_k^-(2i+2), \quad a_{mn} = \frac{1}{2} \pi^3 \varepsilon^2 \Phi_m^-(n+3)$$

Этот прием может быть использован для вычисления  $f_m$  после выбора конкретного вида нагрузки  $q(x, y)$  и разложения  $f(t)$  в ряд по степеням  $t$ .

Численная реализация проведена в случае действия сосредоточенной силы на продолжении опоры:  $q(x, y) = P \delta(x-d) \delta(y)$ ,  $d > c$ . Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . После определения контактных усилий  $\psi(\sigma\tau) = c^{-1} \varphi(\tau)$  ( $\varphi(\tau)$  дается формулой (3.10),  $\varphi_n$  находятся из (3.11), достаточная точ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ность получалась при  $N \geq 3$ ) вычислялся прогиб пластинки  $w(x, y) = w_\psi(x, y) + w_q(x, y)$  на продолжении опоры ( $c < x < a, y = 0$ ),  $w_\psi(x, y)$  — левая часть уравнения (1.10) при  $c < x < a$ . Исследовалось влияние длины опоры  $c$  на значение прогиба под силой  $w(d, 0)$ , которое характеризует жесткость системы пластинка — опора. Для сравнения с результатами [22], где рассматривалась пластинка без опоры, полагалось  $d = a - 0$  (точка приложения силы устремлялась к свободной стороне пластинки). Графики безразмерной величины  $\alpha(\epsilon, \sigma) = w(d, 0) DP^{-1} a^{-2}$  приведены на фиг. 1 ( $\sigma = 2$ ) и фиг. 2 ( $\sigma = 4$ ) (кривые 1). Они показывают, что с ростом длины опоры величина  $\alpha$  быстро уменьшается (а жесткость системы пластинка — включение растет) по сравнению со случаем отсутствия опоры ( $\epsilon = 0$ ). При этом значения  $\alpha$  оказываются довольно близки к аналогичным значениям, получающимся, если вместо опоры  $0 < x < c, y = 0$  имеется защемление по отрезку  $x = c, |y| < b$ , (кривые 2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zöphel J. Plattenstreifen mit äguidistanten Querwänden (Stauchwänden) under Gleichlast // Bautechnik. 1973. Bd 50. H. 6. S. 208–213.
2. Артюхин Ю. П., Каримов С. М. Контактная задача длинной плиты, опирающейся на жесткие поперечные стенки // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. Вып. 12. С. 250–255.
3. Артюхин Ю. П., Каримов С. М. Контактная задача для длинной плиты с прямоугольными поперечными опорами // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. Вып. 19. С. 36–46.
4. Попов Г. Я., Толкачев В. М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 192–206.
5. Онищук О. В., Попов Г. Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141–150.
6. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
7. Клямук Ю. С., Онищук О. В., Попов Г. Я. Задачи о колебаниях и устойчивости прямоугольной пластинки с тонким включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 137–143.
8. Онищук О. В., Попов Г. Я., Фаршайт П. Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 293–302.
9. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
10. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
12. Девят Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
13. Ворovich И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи упругости для полуполосы // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 109–115.
14. Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А. Метод интегральных уравнений в двумерных задачах теории упругости для кусочно-однородных тел с разрезами // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1986. Вып. 24. С. 28–31.



15. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
16. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев. Наук. думка, 1981. 323 с.
17. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стацук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
18. *Грилицкий Д. В., Евтушенко А. А.* Взаимодействие тонкого упругого включения с трещиной в кусочно-однородной плоскости // Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38. № 3. С. 12–24.
19. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев; Одесса: Вища школа, 1982. 167 с.
20. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* Numerical solution of Cauchy type singular integral equations by use of the Lobatto-Jacobi numerical integration rule // *Appl. Mat.* 1978. V. 23. № 6. P. 439–452.
21. *Гальбин А. Н.* Трещинообразование при сжатии неограниченного хрупкого тела с круговым отверстием // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1044–1047.
22. *Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д.* Расчет пластин, Киев: БудІвельник, 1970. 435 с.

Одесса

Поступила в редакцию  
14.IV.1987