МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1988

УДК 539.3

ПОЛОГАЯ ОБОЛОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ (асимптотические результаты)

НЕРУБАЙЛО Б. В., ОБРАЗЦОВ И. Ф., ОЛЬШАНСКИЙ В. П.

Вопросы расчета оболочек на действие локальных нагрузок рассматривались в [1–5] [1]. Асимптотические формулы для расчета напряженно-деформированного состояния бесконечно длинной цилиндрической оболочки, нагруженной сосредоточенной силой, предложены в [6]. В [7, 8] указывалось на ограничения, связанные с применением этих формул. В данной статье для вычисления напряжений в зоне малых областей нагружения получены замкнутые элементарные формулы. В них учитываются размеры и форма области нагружения, плотность распределения нагрузки, а также форма срединной поверхности тонкостенного тела. Построение этих формул основано на замене функций Грина фундаментальными решениями дифференциальных уравнений пологих оболочек. При таком подходе игнорируется влияние граничных условий на распределение напряжений в зоне внешнего силового воздействия. Поэтому полученные выражения обеспечивают высокую точность для небольших размеров областей нагружения, достаточно удаленных от краев оболочки. Предложенные ниже асимптотические результаты относятся к оболочкам нулевой и положительной гауссовой кривизны.

1. Общие асимптотические представления изгибающих моментов. При построении расчетных зависимостей будем исходить из уравнений теории пологих оболочек, фундаментальные решения которых разлагаются в степенной ряд с логарифмом по полярному радиусу и тригонометрический ряд по полярному углу [9]. Ограничимся двучленным приближением в рядах, согласно которому вычисление изгибающих моментов $m_{1,2}$ сводится к интегралам

$$m_1=A_1+\nu A_2,\quad m_2=A_2+\nu A_1 \tag{1.1}$$

$$A_{1,2}(x_1,y_1)=\iint\limits_{\Omega} q(x,y)\,\Phi_{1,2}(x,y,x_1,y_1)\,dx\,dy$$

$$\Phi_{1,2}=-(1/8\pi)\{2\ln[b(1+\sqrt{\lambda})r/4]+1{,}1544\pm$$
$$\pm(1-\sqrt{\lambda})/(1+\sqrt{\lambda})\pm(X^2-Y^2)/r^2+(\pi/4)(br/2)^2\times$$
$$\times[(^1/_2(2\pm1+\lambda(2\mp1)\pm(^1/_2)(1\pm1+\lambda\mp\lambda)(X^2-Y^2)/r^2]\}$$
$$X=x_1-x,\quad Y=y_1-y,\quad r=(X^2+Y^2)^{1/2}$$
$$b^4=12(1-\nu^2)h^{-2}R_2^{-2},\quad \lambda=R_2R_1^{-1}$$

Здесь $R_2\leqslant R_1$ — радиусы кривизны срединной поверхности оболочки толщиной h; ν — коэффициент Пуассона; x, y — координаты точки приложения нагрузки; x_1, y_1 — координаты расчетной точки в местной системе, начало которой находится в центре области нагружения Ω; $q(x,\ y)$ — плотность распределения нагрузки; ось ox лежит в плоскости наименьшей кривизны. Изгибающие моменты являются основными компонентами напряженного состояния оболочки при действии нормальной локальной нагрузки [6, 10]. Поэтому остальные определять не будем.

Аналитическое вычисление интегралов (1.1) для канонических форм областей не вызывает затруднений, если плотность распределения нагруз-

[1] И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло, В. П. Ольшанский. Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). М., 1988. 192 с.– Деп. ВИНИТИ 12.02.88, № 1222.

ки аппроксимировать с помощью элементарных функций. В результате удается получить простые расчетные формулы. Остановимся на их построении для наиболее распространенных в расчетной и конструкторской практике случаев нагружения оболочек. Рассмотрим прямоугольную и эллиптическую области Ω.

2. Прямоугольная область. Будем считать, что $2u$ и $2v$ определяют размеры области соответственно в направлении осей x и y. Внешняя сила P равномерно распределена по области, так что плотность задается функцией

$$q(x, y)=P/(4uv) \text{ в } \Omega, \quad q(x, y)=0 \text{ вне } \Omega \tag{2.1}$$

Определим изгибающие моменты в центре области ($x_1=0$, $y_1=0$), где они достигают наибольших значений. Выполнив интегрирование в (1.1) с учетом (2.1), получаем

$$\begin{gathered}A_j=-(P/8\pi)\{2\ln[b(1+\sqrt{\lambda})(u^2+v^2)^{1/2}/4]-\\-(-1)^j(1-\sqrt{\lambda})/(1+\sqrt{\lambda})-1{,}8456+\gamma_j-(\pi b^2/48)[(5-2j-\\-(1-\lambda)/2)u^2+2j-1-2j(1-\lambda)+(^3/_2)(1-\lambda)v^2]\} \quad (j=1, 2)\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\gamma_1=(2u/v)\operatorname{arctg}(v/u), \quad \gamma_2=(2v/u)\operatorname{arctg}(u/v)$$

Для цилиндрической оболочки, нагруженной по квадратной области, формулы (2.2) при $\nu=0{,}3$ приводят к следующим значениям изгибающих моментов (R — радиус цилиндра, $\delta_0=u/R$):

$$\begin{gathered}m_1=-P[0{,}0517\ln(R\delta_0^2/h)-0{,}0321-0{,}0284(R\delta_0^2/h)\\m_2=-P[0{,}0517\ln(R\delta_0^2/h)-0{,}0878-0{,}0163(R\delta_0^2/h)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Представляет интерес сравнение расчетных величин моментов по асимптотическим формулам (2.3) с результатами численного суммирования тригонометрических рядов. Такое сравнение представлено в таблице; в первой части таблицы (первые пять строк) содержатся безразмерные значения момента m_1/P, а во второй — момента m_2/P для различных размеров области нагружения (параметра δ_0) и отношений радиуса оболочки к ее толщине. Результаты расчетов по асимптотическим формулам $(m_i/P)_2$ незначительно отличаются от значений номограммы из [4] $(m_i/P)_1$.

Таким образом, принятое выше двучленное приближение фундаментальных решений обеспечивает хорошую точность для небольших размеров нагруженных областей. Это будет достигаться и для других форм областей, размеры которых удовлетворяют неравенству $b\sup(u, v)\leqslant 2$.

Вторым условием применимости асимптотических формул (1.1) является достаточная удаленность области нагружения от края оболочки. Для сферической поверхности это удаление должно быть не менее $2/b$. В случае поверхностей других форм оно должно быть гораздо большим, так как сферическая оболочка характеризуется наиболее быстрым затуханием локальных возмущений.

Решения в виде тригонометрических рядов сходятся медленно при действии локальных нагрузок моментного типа. Имеющиеся асимптотические формулы в этом случае существенно завышают значения напряжений [5, 6]. Поэтому рассмотрим далее воздействие внешнего момента M, распределенного по закону $q(x, y)=(^3/_4)M(vu^3)^{-1}x$ (в Ω), $q(x, y)=0$ (вне Ω).

Вычислив интегралы (1.1) на краю области ($x_1=u$, $y_1=0$), где изгибающие моменты максимальны, получаем

$$\begin{gathered}A_1=(M/8\pi u^3)\{u^2+4(u^3/v)\operatorname{arctg}(v/2u)+\\+(v^2/4)\ln[v^2/(v^2+4u^2)-(^5/_{16})(5+\lambda)b^2u^4\}\\A_2=(^3/_{16})(M/\pi u^3)\{2u^2+(^1/_2)v^2\ln[(v^2+4u^2)/v^2]-\\-2u\operatorname{arctg}(2u/v)-(\pi/24)(1+\lambda)b^2u^4\}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Эти выражения значительно упрощаются при нагружении оболочки

R/h	δ_0	$R\delta_0^2/h$	$(m_i/P)_1$	$(m_i/P)_2$
100	0,03	0,09	0,15	0,159
150	0,01	0,015	0,25	0,249
400	0,015	0,09	0,15	0,159
400	0,05	1,00	0,05	0,060
900	0,01	0,90	0,16	0,159
50	0,08	0,32	0,15	0,152
150	0,02	0,06	0,25	0,234
400	0,03	0,36	0,15	0,146
400	0,05	1,00	0,10	0,104
600	0,04	0,96	0,10	0,105

по квадратной области. Тогда

$$m_1=M(B_1+\nu B_2)/u, \quad m_2=M(B_2+\nu B_1)/u$$
$$B_1=0{,}0976-0{,}0078(5+\lambda)(bu)^2 \qquad (2.5)$$
$$B_2=0{,}0352-0{,}0078(1+\lambda)(bu)^2$$

Если вектор внешнего момента M коллинеарен оси x и плотность нагрузки задана функцией $q(x, y)=(^3/_4)M(uv^3)^{-1}y$ (в Ω), $q(x, y)=0$ (вне Ω), определение $A_{1,2}$ сводится к формулам (2.4), в которых нужно заменить u на v и наоборот, $(5+\lambda)$ на $(1+\lambda)$, $(1+\lambda)$ на $(1+5\lambda)$.

Чтобы судить о точности формул (2.5), сравним значения, к которым они приводят, с данными расчетов [11]. Полагая $\nu=0{,}3$; $R_2h^{-1}=300$; $uR_2^{-1}=0{,}01$ для цилиндра $(\lambda=0)$ и сферы $(\lambda=1)$ находим соответственно: $m_1uM^{-1}=0{,}10404$, $m_2uM^{-1}=0{,}06257$; $m_1uM^{-1}=0{,}10303$, $m_2uM^{-1}=0{,}06157$. В [11] комбинированным методом для этих параметров получены значения 0,10444, 0,06278 и 0,10353, 0,06187 соответственно. Малые отличия асимптотических результатов от данных численного суммирования рядов свидетельствуют о том, что при $bu<0{,}5$ формулы (2.5) обеспечивают хорошую точность.

3. Эллиптическая область нагружения. Пусть u и v являются полуосями эллипса в направлении осей x и y. Примем распределение внешней силы P равномерным, когда $q(x, y)=P(\pi uv)^{-1}$. Вычислив интегралы (1.1) для центра области $(x_1=0, y_1=0)$, имеем

$$A_{1,2}=-(P/8\pi)\{2\ln[(^1/_8)(u+v)(1+\sqrt{\lambda})]+0{,}1544\pm$$
$$\pm(u-v)/(u+v)\pm(1-\sqrt{\lambda})/(1+\sqrt{\lambda})-(\pi b^2/64)]\,[(2\pm1)u^2+$$
$$+(2\mp1)v^2-(^1/_2)(1-\lambda)(u^2+(3\mp2)v^2)]$$

Из этих выражений при $u=v$ следуют известные результаты для круга [12].

Рассмотрим далее линейное распределение нагрузки по одной из переменных, когда внешнее воздействие сводится к моменту M. Полагая $q(x, y)=M((\pi/4)vu^3)^{-1}x$ (в Ω), $q(x, y)=0$ (вне Ω), после вычисления интегралов в точке $x_1=u$, $y_1=0$, для наибольших значений моментов получаем

$$A_1=(M/2\pi)(u+v)^{-1}[(3+a)/2+(^1/_6)(2a^2+3a-1)-$$
$$-(\pi/64)(5+\lambda)b^2u(u+v),\ a=(v-u)/(v+u) \qquad (3.1)$$
$$A_2=(Mu/\pi)(u+v)^{-2}[^1/_2+(1+2a)/6-(\pi/128)(1+\lambda)b^2(u+v)^2]$$

Полагая в формулах (3.1) $u=v$, приходим к нагружению панели по кругу [13].

Представляет интерес нагружение оболочки по замкнутой линии в виде эллипса. Переходя от распределения момента M по площадке к нагружению по линии, вместо (3.1) в точке $x_1=u$, $y_1=0$ получаем

$$A_1=M\{(3+a)[4\pi(u+v)]^{-1}-(^1/_{128})(5+\lambda)b^2u\} \qquad (3.2)$$

$$A_2 = M\{u[2\pi(u+v)^2]^{-1} - (^1/_{128})(1+\lambda)b^2u\}$$

Расчет такого воздействия путем суммирования тригонометрических рядов проведен в [12]. Поэтому для анализа погрешностей формул (3.2) сравним результаты вычислений. Полагая в (3.2) $R_2=1$ м; $\nu=0{,}3$; $h=4\cdot10^{-3}R_2$; $u=0{,}02R_2$; $v=0{,}03R_2$, для цилиндрической ($\lambda=0$) и сферической ($\lambda=1$) поверхностей получаем соответственно: $m_1uM^{-1}=0{,}09581$; $m_2uM^{-1}=0{,}04957$ и $m_1uM^{-1}=0{,}09246$; $m_2uM^{-1}=0{,}04621$. В [14] при удержании 400×400 членов ряда находим: 0,09663, 0,05002 и 0,09418, 0,04757. Погрешность асимптотических формул в этом примере не превышает 3%.

Если внешний момент коллинеарен оси x и его распределение задано линейной функцией $q(x, y)=M((\pi/4)uv^3)y$ (в Ω), $q(x, y)=0$ (вне Ω), в формулах (3.1), (3.2), как и в случае прямоугольника, следует заменить u на v и наоборот; $(5+\lambda)$ на $(1+\lambda)$; $(1+\lambda)$ на $(1+5\lambda)$.

В заключение отметим, что аналитическое интегрирование может быть выполнено и для других областей Ω (треугольника, ромба и т. п.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жигалко Ю. П.* Статика оболочек при силовых локальных воздействиях // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. Вып. 11. С. 62–91.
2. *Моссаковский В. И., Гудрамович В. С.* Контактные задачи теории оболочек // Контактная прочность пространственных конструкций. Киев: Наук. думка. 1976. С. 3–40.
3. *Лукасевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М.: Мир. 1982. 542 с.
4. *Нерубайло Б. В.* Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение. 1983. 248 с.
5. *Даревский В. М.* Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках // Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение. 1964. Вып. 1. С. 23–83.
6. *Даревский В. М.* Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 2. С. 159–194.
7. *Величко П. М., Шевляков Ю. А., Шевченко В. П.* Напряженно-деформированное состояние пластин и оболочек при сосредоточенных нагрузках // Тр. 7-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С. 142–145.
8. *Чернышев Г. Н.* О контактных задачах в теории оболочек // Тр. 7-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука. 1970. С. 898–903.
9. *Ольшанский В. П.* Фундаментальные решения уравнений пологих оболочек // Изв. вузов. Математика. 1980. № 6. С. 52–56.
10. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В.* О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 1. С. 54–56.
11. *Ольшанский В. П.* К расчету оболочек на действие локальных нагрузок моментного типа // Строительная механика и расчет сооружений. 1984. № 6. С. 30–32.
12. *Величко П. М., Хижняк В. К., Шевченко В. П.* Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизн // Тр. 10-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Тбилиси: Мецниереба. 1975. Т. 1. С. 31–41.
13. *Гармаш Л. И., Ольшанский В. П.* Изгиб оболочек двоякой кривизны моментом, распределенным в круге // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будівельник, 1984. Вып. 45. С. 78–81.
14. *Ольшанский В. П.* Антисимметричный изгиб оболочки в зоне эллиптической площади нагружения // Проблемы машиностроения. Киев: Наук. думка. 1985. Вып. 23. С. 65–68.

Москва, Харьков

Поступила в редакцию
3.XII.1986