

УДК 539.3

РАСТЯЖЕНИЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ, АРМИРОВАННОЙ
ДВОЙКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

КОБЛИК С. Г.

Задача о напряженном состоянии упругой плоскости, усиленной периодической и двойкопериодической системой жестких одномерных включений, исследовалась в [1-3]. Родственные задачи о растяжении плоскости, ослабленной периодической системой трещин, изучены в [4-6]. Однако в случае сильного взаимодействия между включениями решение получено только для параллельной системы дефектов при наличии только одного дефекта в полосе периода. В публикуемой работе изучен случай сильного взаимодействия включений, образующих двойкопериодическую систему.

1. Рассмотрим напряженное состояние упругой ортотропной пластинки, усиленной двойкопериодической системой нерастяжимых одномерных включений, расположенных вдоль прямых $y = \pm mH$ ($m = 0, 1, \dots$), и растягиваемой в направлении x . Полагаем, что на концах включений усилия отсутствуют. Изучим два варианта расположения включений, представленные на фиг. 1. Будем считать, что деформирование производится таким образом, что точки, расположенные на прямых $x = \pm na$ ($n = 0, 1, \dots$) имеют перемещение $\pm nu_x$.

Вследствие симметрии задачи достаточно рассмотреть напряженное состояние прямоугольника ($|x| \leq a, 0 \leq y \leq H$) (на фиг. 1 заштрихован), на границах которого имеем следующие условия

$$u_{,x} = 0 \text{ (на } L'), \quad u_{,y} = 0 \text{ (на } L''), \quad v_{,x} = 0 \text{ (на } L) \quad (1.1)$$

Здесь L — граница прямоугольника ($|x| \leq a, 0 \leq y \leq H$)
 $L' = \{|x| \leq l, y = 0\}$ для первого варианта армирования и
 $L' = \{|x| \leq l, y = 0\} \cup \{a - l \leq |x| \leq a, y = H\}$ для второго,
 $L'' = L - L'$, u и v — компоненты вектора перемещений в направлениях x и y соответственно.

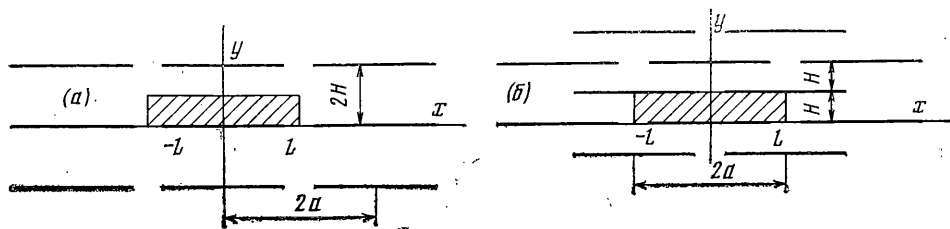
Таким образом, задача сводится к решению уравнений равновесия ортотропной среды (индексы после запятой означают частные производные по соответствующим координатам):

$$\begin{aligned} B_1 u_{,xx} + G u_{,yy} + (B_1 \mu_2 + G) v_{,xy} &= 0 \\ G v_{,xx} + B_2 v_{,yy} + (B_2 \mu_1 + G) u_{,xy} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

при граничных условиях (1.1) и учете условий статики для включения и прямоугольника

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \tau|_{y=0} dx &= 0, & \int_{-a}^a \sigma_y|_{y=0} dx &= 0 \\ \int_0^H \sigma_x|_{x=a} dy + \delta N(0)/2 &= \langle \sigma_x \rangle H \end{aligned}$$

Здесь $B_1 = E_1 / (1 - \mu_1 \mu_2)$ и $B_2 = E_2 / (1 - \mu_1 \mu_2)$ — жесткости на растяжение — сжатие в направлениях x и y соответственно, G — жесткость на



Фиг. 1

сдвиг, μ_1 и μ_2 — коэффициенты Пуассона, $\langle \sigma_x \rangle$ — среднее напряжение, растягивающее армированную пластинку, τ — касательные усилия на верхней стороне включения, $N(0)$ — растягивающее усилие в середине включения, $\delta=0$ для первого варианта армирования, а для второго $\delta=1$.

Вследствие симметрии, усилия $N(x)$ в любом включении идентичны и определяются по формуле

$$N(x) = -2 \int_{-l}^x \tau|_{y=0} dx$$

2. Для построения решения применен асимптотический метод, развитый в [7], и заключающийся в разложении решения в ряды по дробным степеням параметра $\varepsilon = G^2/B_1B_2$. Суть этого метода состоит в использовании того факта, что поля напряжений и перемещений в плоской ортотропной среде представляют собой суперпозицию напряженно-деформированных состояний двух типов: первого, сравнительно медленно изменяющегося вдоль оси x по сравнению с изменчивостью в направлении оси y , и второго, относительно быстро меняющегося в направлении x . Для выделения этих состояний вводятся два типа преобразований координат и искомых функций

$$x_1 = \pi \varepsilon^{1/4} q^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha_k x / H, \quad y_1 = \pi y / H$$

$$u = U^1, \quad v = \varepsilon^{3/4} q^{1/4} V^1 \quad (2.1)$$

$$x_2 = \pi \varepsilon^{-1/4} q^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \beta_k x / H, \quad y_2 = \pi y / H$$

$$u = \varepsilon q^{1/4} U^2, \quad v = \varepsilon^{1/4} V^2, \quad q = B_2/B_1 \quad (2.2)$$

Функции U^n , V^n ($n=1, 2$) разыскиваются в виде рядов по параметру $\varepsilon^{1/2}$

$$U^n = \sum_{k=0}^{\infty} U^{n,k} \varepsilon^{k/2}, \quad V^n = \sum_{k=0}^{\infty} V^{n,k} \varepsilon^{k/2} \quad (2.3)$$

а за счет соответствующего выбора коэффициентов α_k , β_k упрощаются уравнения высших приближений.

Подставив формулы (2.1)–(2.3) в систему (1.2) и граничные условия (1.1) и расцепив полученные соотношения по параметру $\varepsilon^{1/2}$, получим следующие краевые задачи для состояний первого и второго типов соответственно

$$U_{,xx}^{1,k} + U_{,yy}^{1,k} = 0, \quad V_{,yy}^{1,k} = f^{1,k} \quad (2.4)$$

$$U_{,x}^{1,k} = \psi^{1,k} \quad (\text{на } L_1'), \quad U_{,y}^{1,k} = \varphi^{1,k} \quad (\text{на } L_1'')$$

$$V_{,xx}^{2,k} + V_{,yy}^{2,k} = 0, \quad U_{,xx}^{2,k} = f^{2,k}, \quad V_{,x}^{2,k} = \varphi^{2,k} \quad (\text{на } L_2) \quad (2.5)$$

где L_1' , L_1'' и L_2 — образы границ L' , L'' и L при использовании преобра-

зований (2.1) и (2.2) соответственно, $f^{n,k}, \psi^{n,k}, \varphi^{n,k}$ ($n=1, 2; k=0, 1, \dots$) — известные после построения предыдущих приближений функции. В частности, $\psi^{1,0} = \varphi^{1,0} = \varphi^{2,0} = 0$. Таким образом, функции $U^{1,k}, V^{2,k}$ во всех приближениях определяются из решения уравнения Лапласа, а $V^{1,k}$ и $U^{2,k}$ находятся интегрированием. (Приняты обозначения $U_{,x}^{j,k} = \partial U^{j,k} / \partial x_j, V_{,xy}^{j,k} = \partial^2 V^{j,k} / \partial x_j \partial y_j \dots$).

Вводя аналитические функции $\Phi^{1,k}(z_1) = U_{,x}^{1,k} - iU_{,y}^{1,k}, \Phi^{2,k}(z_2) = V_{,x}^{2,k} - iV_{,y}^{2,k}$ комплексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, получим для $\Phi^{1,k}(z_1)$ смешанную задачу в прямоугольнике

$$\left(|x_1| \leq \pi a \varepsilon^{1/4} q^{1/4} \sum_{s=0}^{\infty} (\varepsilon^s \alpha_s) / H, \quad 0 \leq y_1 \leq \pi \right)$$

а для $\Phi^{2,k}(z_2)$ имеем задачу определения аналитической функции по заданной действительной части на границе прямоугольника

$$\left(|x_2| \leq \pi a \varepsilon^{-1/4} q^{1/4} \sum_{s=0}^{\infty} (\varepsilon^s \beta_s) / H, \quad 0 \leq y_2 \leq \pi \right)$$

Решение этих задач осуществлено путем применения конформного отображения указанных прямоугольников на верхнюю полуплоскость и последующего использования формулы Келдыша — Седова [8]. Разделив действительную и мнимую части, найдем функции $U_{,x}^{n,k}, U_{,y}^{n,k}, V_{,x}^{n,k}, V_{,y}^{n,k}$, а затем и компоненты напряженно-деформированного состояния. Эффективный модуль найдем по формуле

$$\langle E_x \rangle = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}, \quad \langle \varepsilon_x \rangle = \frac{u_a}{a} = \frac{1}{a} \int_0^a u_{,x} |_{y=0} dx$$

Ограничившись одним приближением, получим, что составляющие деформации выражаются через функции $\Phi^{1,0}(z_1)$ и $\Phi^{2,0}(z_2)$ следующим образом

$$\varepsilon_x = \pi \varepsilon^{1/4} q^{1/4} \operatorname{Re} \Phi^{1,0}(z_1) / H, \quad \varepsilon_y = -\pi \varepsilon^{1/4} \operatorname{Im} \Phi^{2,0}(z_2) / H \\ \gamma = \pi (q^{1/4} \operatorname{Re} \Phi^{2,0}(z_2) - \operatorname{Im} \Phi^{1,0}(z_1)) / H$$

а напряжения, усилие во включении N и перемещение u_a определяются формулами

$$\sigma_x = B_1 \varepsilon_x, \quad \sigma_y = B_1 q \varepsilon_y, \quad \tau = B_1 \varepsilon^{1/4} q^{1/2} \gamma \\ N = -2H \varepsilon^{-1/4} q^{1/4} \pi^{-1} \int_{-l_1}^{x_1} \tau |_{y=0} dx, \quad u_a = \int_{l_1}^{a_1} U_{,x}^{1,0}(x_1, 0) dx_1$$

Для функции $\Phi^{2,0}(z_2)$ в обоих вариантах армирования имеем задачу об определении аналитической в прямоугольнике ($|x_2| \leq a_2, 0 \leq y_2 \leq \pi$) функции по заданной на границе действительной части $\operatorname{Re} \Phi^{2,0}(z_2) = 0$ и интегральном условии равновесия

$$\int_{-a_2+i0}^{a_2+i0} \operatorname{Im} \Phi^{2,0}(z_2) dz_2 = 0, \quad a_2 = a \pi \varepsilon^{-1/4} q^{1/4} / H$$

Очевидно $\Phi^{2,0}(z_2) \equiv 0$. Для $\Phi^{1,0}(z_1)$ имеем краевую задачу об отыскании аналитической в прямоугольнике ($|x_1| \leq a_1, 0 \leq y_1 \leq \pi$) функции, удовлетворяющей следующим краевым условиям и интегральным условиям равновесия включения и ячейки периодичности. Для первого варианта арми-

рования:

$$\operatorname{Re} \Phi^{1,0}(z_1) = 0 \quad (z_1 \in L_1');$$

$$\operatorname{Im} \Phi^{1,0}(z_1) = 0 \quad (z_1 \in L_1'')$$

$$\int_{-l_1+i0}^{l_1+i0} \operatorname{Im} \Phi^{1,0}(z_1) dz_1 = 0, \quad \int_{a_1+i0}^{a_1+i\pi} \operatorname{Re} \Phi^{1,0}(z_1) dz_1 = i \frac{\langle \sigma_x \rangle H}{B_1 \varepsilon^{1/4} q^{1/4}}$$

Для второго варианта армирования

$$\operatorname{Re} \Phi^{1,0}(z_1) = 0 \quad (z_1 \in L_1'), \quad \operatorname{Im} \Phi^{1,0}(z_1) = 0 \quad (z_1 \in L_1'')$$

$$\int_{-l_1+i0}^{l_1+i0} \operatorname{Im} \Phi^{1,0}(z_1) dz_1 = 0, \quad \int_{-a_1+i0}^{a_1+i\pi} \operatorname{Re} \Phi^{1,0}(z_1) dz_1 - i \int_{-l_1+i0}^{0+i0} \operatorname{Im} \Phi^{1,0}(z_1) dz_1 = \\ = i \langle \sigma_x \rangle H / B_1 \varepsilon^{1/4} q^{1/4}, \quad a_1 = a \pi \varepsilon^{1/4} q^{1/4} / H, \quad l_1 = l \pi \varepsilon^{1/4} q^{1/4} / H$$

Функция, осуществляющая конформное отображение прямоугольника ($|x_1| \leq a_1, 0 \leq y_1 \leq \pi$) на верхнюю полуплоскость, имеет вид $\xi = \operatorname{sn}(K(k)z_1/a_1, k)$, где $\operatorname{sn}(u, k)$ — эллиптический синус, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, а модуль k определяется из уравнения $K(k)/K((1-k^2)^{1/2}) = a_1/\pi$.

Решение смешанной задачи для верхней полуплоскости, имеющее интегрируемые особенности в точках, соответствующих концам включений, дается формулой Келдыша — Седова. Окончательно, опуская несложные, но громоздкие преобразования, находим, что $\Phi^{1,0}(z_1)$ и касательные контактные напряжения τ имеют следующий вид для первого и второго вариантов армирования соответственно:

$$\Phi^{1,0}(z_1(\xi)) = A \xi / (\xi^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

$$\tau = AB_1 \varepsilon^{1/2} q^{1/2} \pi H^{-1} t / (\lambda^2 - t^2)^{1/2}$$

$$\Phi^{1,0}(z_1(\xi)) = A \xi [(\xi^2 - k^{-2}) / (\xi^2 - \lambda^2) (\xi^2 - \beta^{-2})]^{1/2} \quad (2.7)$$

$$\tau = AB_1 \varepsilon^{1/2} q^{1/2} \pi H^{-1} \beta k^{-1} t [(1 - k^2 t^2) / (\lambda^2 - t^2) (1 - \beta^2 t^2)]^{1/2}$$

Коэффициент A , усилия во включении N , коэффициент интенсивности напряжений K_{II} и эффективный модуль $\langle E_x \rangle$ будут такими ($s = k$ для первого варианта армирования и $s = \beta$ для второго):

$$A = \langle \sigma_x \rangle H k (1 - \lambda^2 k^2)^{1/2} K(k) / B_1 a_1 \varepsilon^{1/4} q^{1/4} s K(r_s)$$

$$N = 2 \langle \sigma_x \rangle H F(\varphi, r_s) / K(r_s)$$

$$K_{II} = \langle \sigma_x \rangle H [\pi k \lambda K(k) / a \beta]^{1/2} / K(r_s)$$

$$\langle E_x \rangle = B_1 \varepsilon^{1/4} q^{1/4} a K(r_s) / H K'(r_s) \quad (2.8)$$

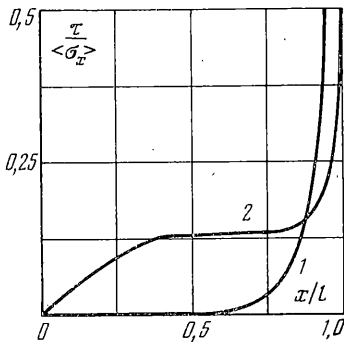
$$t = \operatorname{sn}(K(k)x/a, k), \quad \lambda = \operatorname{sn}(K(k)l/a, k)$$

$$\varphi = \arcsin [(\lambda^2 - t^2) / (1 - t^2)]^{1/2},$$

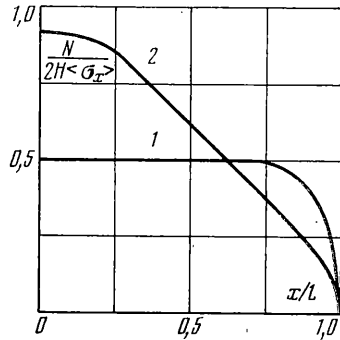
$$\beta = k (1 - \lambda^2)^{1/2} (1 - \lambda^2 k^2)^{-1/2}$$

$$r_s = (1 - s^2)^{1/2} (1 - \lambda^2 s^2)^{-1/2}, \quad K'(r_s) = K((1 - r_s^2)^{1/2})$$

Переходя в формулах (2.6) — (2.8) к пределу при $a \rightarrow \infty$ (или $H \rightarrow \infty$), получим решение для параллельной периодической (или коллинеарной периодической) системы включений, а при $a \rightarrow \infty, H \rightarrow \infty$ получим приближенное решение для одного включения в плоскости. Сравнение последнего с точным показывает, что они совпадают по форме и отличаются только постоянным множителем, зависящим от упругих характеристик пластинки. При этом даже в худшем (с точки зрения асимптотического метода) случае изотропной среды ошибка не превышает 7%.



Фиг. 2



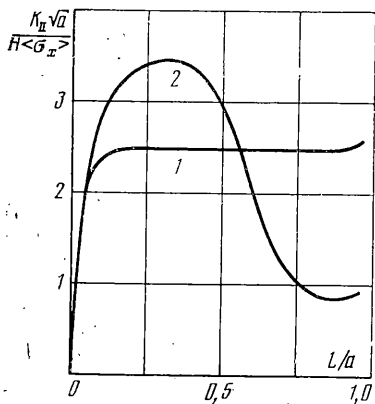
Фиг. 3

Нетрудно видеть, что при неизменных размерах ячеек периодичности и включений содержание последних в первом варианте армирования вдвое меньше, чем во втором. Поэтому сравнение эффективности армирования проведено в предположении, что плотность размещения включений (по координате y) для первого варианта вдвое больше, чем для второго. В частности, на фиг. 2–5 кривые 1, соответствующие первому варианту армирования, построены при $a/H=20$, а кривые 2, соответствующие второму, при $a/H=10$.

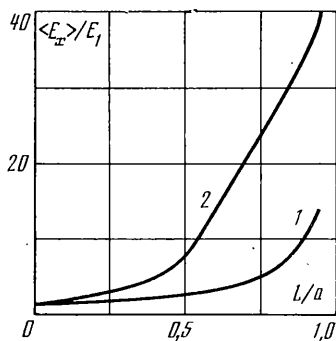
На фиг. 2 и 3 показано распределение контактных касательных напряжений и растягивающих усилий во включении для изотропной пластинки ($\mu=0,5$) при $l/a=0,8$. Видно, что в первом случае касательные напряжения практически отсутствуют в средней части включения и быстро возрастают при приближении к краю. Усилия N постоянно на средней части включения и убывает на краях. Во втором случае армирования на участке «перекрытия» включений касательные напряжения практически постоянны, растягивающие усилия изменяются линейно. Максимальное значение растягивающего усилия во втором случае почти вдвое больше.

На фиг. 4 и 5 представлены зависимости коэффициента интенсивности напряжений и эффективности армирования от отношения длины включения к длине ячейки l/a . Из фиг. 4 видно, что коэффициент интенсивности напряжений во втором случае больше, чем в первом при $l/a \leq 0,5$, т.е. пока нет «перекрытия» включений. После того как участок «перекрытия» появился ($l/a \geq 0,5$), коэффициент интенсивности напряжений во втором случае быстро уменьшается и становится значительно меньше, чем в первом. Рост коэффициента интенсивности при $l/a \rightarrow 1$ в обоих случаях объясняется сближением включений, расположенных на одной линии.

Из фиг. 5 видно, что при $l/a < 0,4$ различие в эффективности первого и второго способов армирования невелико, но при $0,5 \leq l/a < 1$ эффективность второго существенно выше, что объясняется сменой схемы передачи усилия на армирующие включения. При $l/a < 1$ для первого способа армирования и $l/a < 0,5$ для второго роль волокон сводится в основном к образованию «жестких» полос шириной $2l$, причем во втором варианте армирования таких «жестких» полос вдвое больше, чем в первом. В пределе при $H \rightarrow 0$, $\langle E_x \rangle = B_1 / (1 - l/a)$ для первого варианта армирования и $\langle E_x \rangle = B_1 / (1 - 2l/a)$ для второго. Эти «предельные» формулы являются хорошим приближением к более сложной формуле для $\langle E_x \rangle$ в (2.8) при не слишком малом расстоянии между «жесткими» полосами. Если же это расстояние мало, то погрешность «предельных» формул значительна, что объясняется заметным взаимодействием концов включений, образующих соседние «жесткие» полосы. При $1 > l/a > 0,5$ материал пластинки (связующего), заключенный между «перекрывающимися» участками включения на этих участках практически постоянны (горизонтальный участок кривой 2 на фиг. 2). При этом эффективный модуль растет пропорционально длине налегающих участков (кривая 2 при $0,5 < l/a < 1$ на фиг. 5). В пределе при $H \rightarrow 0$: $\langle E_x \rangle = G(a/H)^2(2l/a - 1)$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Таким образом, при $0,5 < l/a < 1$ эффективность второго способа армирования значительно выше.

При $l/a \rightarrow 1$ различие между двумя способами армирования исчезает, так как в обоих случаях армирующие включения сливаются в непрерывные нити.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Об одной модели регулярной кусочно-однородной среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 158–164.
2. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
3. Стащук Н. Г., Сенюк М. Н. Об оптимальном расположении периодической и двоякопериодической системы жестких армирующих элементов в композитах // Механика композит. материалов 1984. № 6. С. 980–985.
4. Александров В. М., Сметанин Б. И. Равновесная трещина в слое малой толщины // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 782–785.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
6. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
7. Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г. Асимптотические методы в теории упругости ортогонного тела. Киев; Донецк: Вища шк., 1982. 153 с.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
6.X.1987