

УДК 539.375

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ГИДРОРАЗРЫВ В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

АЛЕКСЕЕНКО О. П., ВАЙСМАН А. М.

Получено точное решение задачи о равновесном развитии прямолинейной трещины гидроразрыва в упругой плоскости. Предполагается, что расход источника жидкости и скорость изменения расхода являются малыми величинами; тогда скорость роста трещины и ускорение жидкости также невелики, что позволяет пренебречь динамическими эффектами в упругой среде и обеспечивает ламинарность и безынерционность течения. При этих предположениях весь процесс гидроразрыва оказывается равновесным, т. е. в каждый момент он однозначно определен параметрами состояния независимо от предыстории.

Задачи механики трещин гидроразрыва рассматривались в [1, 2]. Некоторые автономные решения задачи о гидроразрыве в непроницаемой упругой плоскости получены в [3].

1. Пусть невесомая и непроницаемая среда с упругими константами E, ν и критическим значением K_0 коэффициента интенсивности напряжений занимает плоскость с прямолинейным разрезом (трещиной) переменной длины, направленным вдоль оси X . Трещина симметрично развивается вследствие нагнетания в нее жидкости с вязкостью μ из источника производительностью Q_0 , расположенного в начале координат в центре трещины. В момент времени T в части $[-L_s, L_s]$ трещины, заполненной жидкостью, на ее берега действует давление $P(X)$, вследствие чего трещина приобретает раскрытие $2W(X)$ и длину $2L$, соответствующую критической концентрации напряжений.

Течение жидкости описывается уравнением движения в гидравлическом приближении [1, 3] ($Q(X)$ — расход жидкости в сечении X):

$$\frac{dP}{dX} = -\frac{3}{2}\mu QW^{-3}, \quad Q(X) = \frac{1}{2}Q_0 \left(1 - 4Q_0^{-1} \int_0^X \frac{dW}{dT} dX \right) \quad (1.1)$$

Связь раскрытия трещины с приложенным давлением и выражение коэффициента интенсивности напряжений через асимптотику раскрытия даются известными формулами [4] механики трещин

$$W(X) = \frac{1}{\pi D} \int_{-L_s}^{L_s} P(X') \ln \left| \frac{\sqrt{L+X'}\sqrt{L-X} + \sqrt{L-X'}\sqrt{L+X}}{\sqrt{L+X'}\sqrt{L-X} - \sqrt{L-X'}\sqrt{L+X}} \right| dX' \quad (1.2)$$

$$K_0 = (\pi/2)^{1/2} D \lim_{X \rightarrow L} [W(X) (L-X)^{-1/2}], \quad D = \frac{1}{2} E (1 - \nu^2)^{-1}$$

Замыкающим уравнением является интегральная связь объема Ω жидкости в трещине и раскрытия W :

$$\Omega = 4 \int_0^{L_s} W dX \quad (1.3)$$

Обезразмеривание системы уравнений (1.1)–(1.3) проводится следующим образом. В качестве характерных масштабов для переменных вво-

дятся величины

$$P_* = (\pi L)^{-1/2} K_0, \quad W_* = P_* L / D, \quad \Omega_* = 4 W_* L \quad (1.4)$$

характеризующие гидроразрыв идеальной жидкостью, а безразмерные переменные, которые будут обозначаться соответствующими строчными буквами, вводятся соотношениями $P = P_* p$, $W = W_* w$, $\Omega = \Omega_* \omega$, $Q = 1/2 Q_0 q$. Вместо линейных координат X , L_s вводятся соответствующие угловые переменные φ , φ_s по формулам $X = L \sin \varphi$, $L_s = L \sin \varphi_s$.

Можно несколько упростить вид уравнений, если от переменных p и w перейти к переменным u и v при помощи соотношений $p = q_0^{1/4} u$, $w = q_0^{1/4} v \cos \varphi$, $q_0 = Q_0 / (2Q_*)$, $Q_* = 2/3 K_0^4 / (\mu \pi^2 D^3)$.

Преобразуем (1.1) и (1.2) к более удобной форме. С этой целью формально проинтегрируем (1.1), затем подставим результат в (1.2), поменяем порядок интегрирования и вычислим внутренний интеграл. Переходя к безразмерным переменным, после некоторых несложных преобразований приведем систему (1.1) — (1.3) к виду

$$u(\varphi) = \int_{\varphi}^{\varphi_s} q(\psi) v^{-3}(\psi) \cos^{-2} \psi d\psi \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_s) \quad (1.5)$$

$$v(\varphi) = \int_0^{\varphi_s} B(\varphi, \psi) q(\psi) v^{-3}(\psi) d\psi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$q_0 = v^{-4}(\pi/2, \varphi_s), \quad \omega = q_0^{1/4} \int_0^{\varphi_s} v \cos^2 \psi d\psi \quad (1.6)$$

Здесь введены обозначения

$$B(\varphi, \psi) = (\pi \cos^2 \psi)^{-1} \left\{ 2\psi + \cos^{-1} \varphi \left[(\sin \psi) \ln \frac{\cos \varphi + \cos \psi}{\cos \varphi - \cos \psi} - (\sin \varphi) \ln \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin(\varphi - \psi)} \right] \right\} \\ q(\varphi) = q_i(\varphi) + r(\varphi) \\ q_i = \left(\int_0^{\varphi_s} v \cos^2 \psi d\psi \right)^{-1} \left(\int_{\varphi}^{\varphi_s} v \cos^2 \psi d\psi + 1/3 v \sin 2\varphi \right) \\ r = \Omega_* Q_0^{-1} [2\omega' (1 - q_i) - \omega q_i' + 1/3 w_0' \sin 2\varphi] \quad (1.7)$$

Разбиение q проведено так, чтобы выделить основное слагаемое q_i , которое не зависит явно от времени. Остаточный член r содержит производные по T от медленно меняющихся величин (дифференцирование по T , как обычно, обозначено точкой над функцией).

Решение сформулированной системы существенно упрощается, если в уравнениях (1.5) можно заменить q на q_i , т. е. пренебречь остаточным членом r . Действительно, из уравнений при этом исчезают операторы по времени, а вся система зависит только от одного определяющего параметра — степени заполнения φ_s . Однако для самосогласованности необходимо, чтобы величина остаточного члена, которую можно оценить в этом приближении, оказалась бы малой по сравнению с q_i .

Приведем соответствующие оценки. Нетрудно показать, что q_i порядка единицы на большей части зоны заполнения. Чтобы оценить r , учтем, что ω , q_i и w_0 в данном приближении — однопараметрические функции φ_s . Тогда последнюю формулу (1.7) можно переписать следующим образом (штрих означает дифференцирование по φ_s):

$$r = \frac{\Omega_*}{2Q_*} \frac{d \ln Q_0}{dT} \frac{2\omega' (1 - q_i) - \omega q_i' + 1/3 w_0' \sin 2\varphi}{q_0'} \quad (1.8)$$

Видно, что величина r пропорциональна скорости изменения логарифма расхода и, следовательно, в предположении плавности режима нагнетания является малой величиной.

В следующем приближении можно учесть поправку, зависящую от скорости изменения расхода в данный момент. Однако это вряд ли целесообразно делать при сохранении других упрощений, связанных с плавностью режима: постоянства критического значения коэффициента интенсивности напряжений, пренебрежения динамическими эффектами в упругой среде и жидкости и т. д.

Таким образом, после пренебрежения $r(\varphi)$ пространственно-временная задача сводится к рассмотрению последовательности статических задач, т. е. гидроразрыв оказывается равновесным процессом. Может вызвать недоумение однопараметричность рассматриваемой схемы. Действительно, гидроразрыв должен определяться большим числом независимых параметров. Например, сопротивление жидкости в трещине зависит от величины расхода и размера трещины. Однако противоречия нет, поскольку зависимость размерных переменных задачи от L уже определена из соображений размерности и выписана явно при выборе масштабных параметров (1.4).

Параметры L и φ_s с математической точки зрения наиболее естественно выбрать в качестве определяющих параметров. Однако на практике удобнее измерять параметры режима нагнетания и объем закачанной жидкости, например Q_0 и Ω или P_0 и Ω и т. п. Поэтому вначале рассчитываются зависимости от φ_s безразмерных переменных, а затем осуществляется переход к измеряемым определяющим параметрам.

2. Из структуры уравнений (1.5)–(1.6) видно, что задача по существу сводится к нахождению решения $v(\varphi, \varphi_s)$ нелинейного интегрального уравнения

$$v(\varphi) = \int_0^{\varphi_s} B(\varphi, \psi) q_i(\psi) v^{-3}(\psi) d\psi \quad (2.1)$$

на нагруженном участке трещины, т. е. на интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi_s$. После этого определение $v(\varphi)$ на интервале $\varphi_s < \varphi \leq \pi/2$ и нахождение других переменных сводится к алгебраическим операциям и интегрированию.

Стандартный метод последовательных приближений для построения решения уравнения (2.1) неприменим, так как приводит к расходящейся итерационной схеме. Природа расходимости обусловлена степенной нелинейностью уравнения и можно ожидать, что схема последовательных приближений окажется эффективной для эквивалентного уравнения

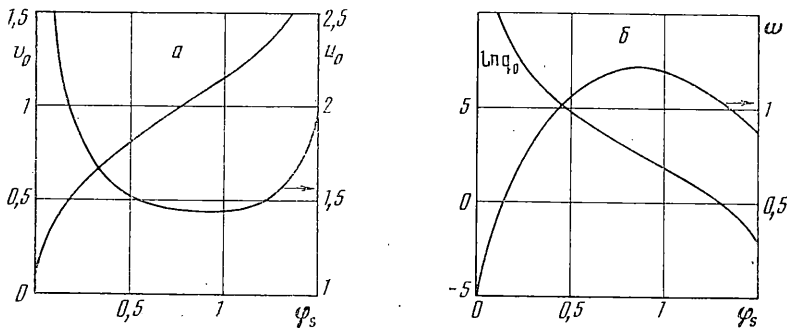
$$v(\varphi) = \left\{ v^3(\varphi) \int_0^{\varphi_s} B(\varphi, \psi) q_i(\psi) v^{-3}(\psi) d\psi \right\}^{1/4} \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_s) \quad (2.2)$$

Как показали расчеты, для уравнения (2.2) итерации быстро сходятся. При $\varphi_s \rightarrow 0$, численное решение (2.2) становится затруднительным, однако несложно найти приближенное решение в аналитическом виде. Можно показать, что в этом случае с точностью до членов следующего порядка малости v не зависит от φ и имеет вид

$$v = (7/18\pi)^{1/4} (\varphi_s^2 \ln \varphi_s^{-2})^{1/4}. \quad (2.3)$$

После получения решения уравнения (2.2) рассчитывается $v(\varphi)$ на интервале $(\varphi_s, \pi/2]$, в частности, в точке $\varphi = \pi/2$. Уравнения (1.6) позволяют затем легко найти значения q_0 и ω , соответствующие заданному φ_s . На фиг. 1 представлены зависимости $u_0 = u(0, \varphi_s)$, $v_0 = v(0, \varphi_s)$, $q_0 = q_0(\varphi_s)$ и $\omega = \omega(\varphi_s)$. На фиг. 2 для некоторых значений φ_s изображены безразмерные профили давления $p(\varphi)$ и раскрытия $w(\varphi)$ трещины (кривые 1–3 соответствуют $\varphi_s = 0,5; 0,9; 1,5$). Полученное решение универсально, так как не зависит от параметров среды или жидкости и от режима нагнетания.

Приведем для наглядности формулы, связывающие размерные переменные с безразмерным решением, которыми удобно пользоваться, если



Фиг. 1

в качестве определяющих параметров выбраны Q_0 и Ω

$$P = \left(\frac{4K_0^4 \omega}{\pi^2 D \Omega} \right)^{1/3} q_0^{1/3} u, \quad W = \left(\frac{K_0^2 \Omega}{4\pi D^2 \omega} \right)^{1/6} q_0^{1/6} v \cos \varphi$$

$$L^{1/2} = \frac{\pi^{1/2} D \Omega}{4K_0 \omega}, \quad v \left(\frac{\pi}{2}, \varphi_s \right) = \sqrt{2K_0 (3\pi^2 \mu D^3 Q_0)^{-1/4}} \quad (2.4)$$

Последнее уравнение определяет значение φ_s , соответствующее Q_0 .

Рассмотрим зависимость от времени в случае режима с постоянным расходом Q_0 . Так как количество нагнетаемой в трещину жидкости в этом случае растет пропорционально времени, а степень заполнения трещины, определяемая Q_0 , остается неизменной, то степенные зависимости от Ω в (2.4) определяют аналогичные зависимости от T .

Определенный интерес представляет анализ режима, при котором жидкость поступает из источника под постоянным давлением P_0 , являющимся критическим для начальной длины $2L_0$ трещины. В этот момент течение отсутствует и справедливо соотношение Гриффитса [4] $P_0 (\pi L_0)^{1/2} = K_0$.

Используя L_0 и P_0 , введем масштабные множители $W_0 = P_0 L_0 / D$, $\Omega_0 = 4W_0 L_0$, $T_0 = \Omega_0 / (2Q_0)$, которые не будут меняться со временем. Кроме того, введем безразмерные переменные l и t при помощи соотношений $L = L_0 l$, $T = T_0 t$.

Условие постоянства давления $P_0 = P_* p_0 = \text{const}$, $p_0 = p(0, \varphi_s)$ после обезразмеривания с помощью новых масштабов приводится к виду $l = p_0^2$. Поскольку p_0 — функция только φ_s , этим соотношением определяется зависимость $l = l(\varphi_s)$, а значит, и зависимость от φ_s масштабных множителей L , P_* , W_* и Ω_* . Таким образом можно определить зависимость размерных переменных от параметра φ_s . Остается, следовательно, найти вид функции $\varphi_s(t)$.

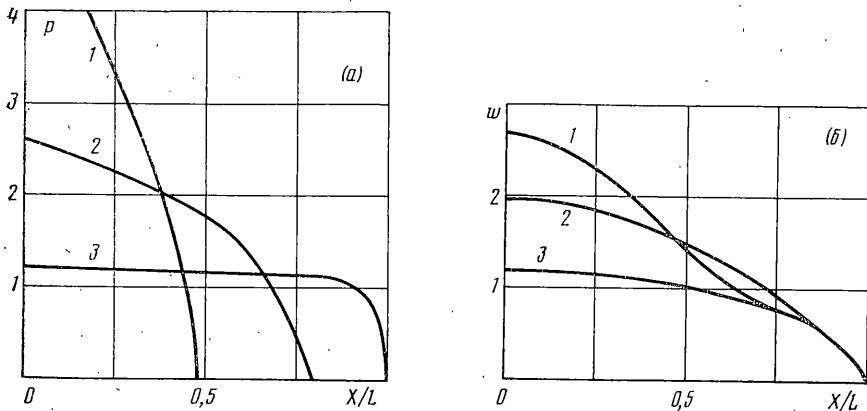
По определению $d\Omega/dT = Q_0$. После обезразмеривания с учетом условия $l = p_0^2$ перепишем уравнение в дифференциальной форме в виде (штрихом обозначено дифференцирование по φ_s):

$$dt = q_0^{-1} d(\omega l^{1/2}) = (\omega p_0^3)' q_0^{-1} d\varphi_s$$

Интегрируя, получим

$$t = - \int_{\varphi_s}^{\pi/2} (\omega p_0^3)' q_0^{-1} d\varphi_s \quad (2.5)$$

Как следует из вида кривых, изображенных на фиг. 1 подинтегральная функция не имеет особенностей при любом конечном φ_s . Поэтому в соответствии с (2.5) трещина за конечное время приходит из начального состояния с полным заполнением в состояние с конечным значением φ_s . Более того, можно показать, что в рассматриваемой постановке время полного разрыва плоскости также конечно. Для этого следует воспользо-



Фиг. 2

ваться тем, что неограниченное возрастание l соответствует стремлению Φ_s к нулю, и оценить интервал времени δt , в течение которого степень заполнения будет меняться от некоторого малого значения $\delta\Phi_s$ до нуля:

$$\delta t = - \int_0^{\delta\Phi_s} q_0^{-1} d(\omega p_0^3)$$

Пользуясь (2.3), можно получить вид функций, входящих в этот интеграл и вычислить его. В результате получим $\delta t = -a/\ln \delta\Phi_s$, $a = 15(5\pi/14)^2 \approx 18,9$. Величину l , соответствующую $\delta\Phi_s$, можно выразить через δt : $l \approx 11,33 \exp(37,80/\delta t)$. Таким образом, на заключительной стадии скорость разрыва должна быстро возрастать, так что рассматриваемой схемой можно пользоваться только до тех пор, пока не будут нарушены условия квазистатики.

Отметим, что предложенную модель можно обобщить на случай зависимости критического коэффициента интенсивности напряжений K от скорости распространения разрыва L . Пусть K можно представить в виде $K = K_0 f(\xi)$, $f(0) = 1$, $\xi = L/C$, где $f(\xi)$ — заданная функция, C — скорость волны Релея. Можно показать, что в случае справедливости (2.5) в системе (1.5), (1.6) изменится только первое уравнение (1.6), которое примет вид $q_0^{-1/2} v(\pi/2, \Phi_s) = f(\xi)$, $\xi = b \rho^{1/2} D^{1/6} Q_0 K_0^{-2/3} (\omega^2 \Omega)^{-1/3}$, $b = 0,51$, где ρ — плотность упругого материала, а величина b , слабо зависящая от ν , подсчитана в предположении $\nu = 0,33$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтяного пласта // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтяного пласта // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 4. С. 475–486.
3. Заговский А. Ф., Одишария М. Г., Песляк Ю. А. Автомодельные решения задачи о распространении трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 92–100.
4. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
6.X.1987