

УДК 539.375

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕНЗОРА УПРУГОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ТРЕЩИН

ЗОРИН И. С., МОВЧАН А. Б., НАЗАРОВ С. А.

На основе представлений приращения потенциальной энергии и суммарного раскрытия берегов трещины через тензор упругой поляризации исследуются вопросы о направлении образования в упругом пространстве круговой микротрещины нормального отрыва и о наиболее опасном расположении эллиптической в плане трещины в условиях сложного напряженного состояния.

**1. Матрица поляризации.** Пусть  $\Omega$  — внешность замкнутого ограниченного тела  $G$  в  $R^3$ . Рассмотрим задачу о деформации упругой области  $\Omega$

$$\mu \Delta \mathbf{u}(x) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}; x) = \mathbf{p}(x), \quad x \in \partial G \quad (1.1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{n}$  — вектор единичной внешней нормали к  $\partial G$ . Следующее утверждение о решениях задачи (1.1) известно (см., например, [1–3]).

*Предложение 1.* Если нагрузка  $\mathbf{p}$  самоуравновешена на контуре  $\partial G$ , то существует единственное решение  $\mathbf{u}$  задачи (1.1), исчезающее на бесконечности, и справедлива асимптотическая формула

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{j=1}^6 c_j \mathbf{V}^{(j)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{T}(x) + O(|x|^{-3}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x) = (x_1, 0, 0), \quad \mathbf{V}^{(2)}(x) = (0, x_2, 0), \quad \mathbf{V}^{(3)}(x) = (0, 0, x_3),$$

$$\mathbf{V}^{(4)}(x) = 2^{-1/2}(x_2, x_1, 0), \quad \mathbf{V}^{(5)}(x) = 2^{-1/2}(0, x_3, x_2),$$

$$\mathbf{V}^{(6)}(x) = 2^{-1/2}(x_3, 0, x_1) \quad (1.3)$$

$$c_j = \int_{\partial G} \mathbf{p}(x) \boldsymbol{\xi}^{(j)}(x) dx \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  — тензор Кельвина — Сомильяны,  $\boldsymbol{\xi}^{(j)}$  — решения однородной задачи (1.1) с асимптотиками  $\boldsymbol{\xi}^{(j)}(x) = \mathbf{V}^{(j)}(x) + O(|x|^{-2})$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим специальные векторные поля  $\mathbf{W}^{(j)} = \boldsymbol{\xi}^{(j)} - \mathbf{V}^{(j)}$ , являющиеся решениями задачи (1.1) при  $\mathbf{p}(x) = -\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{V}^{(j)}; x)$ ,  $j=1, \dots, 6$ . Так как

$$\int_{\partial G} \mathbf{l}(x) \cdot \mathbf{p}(x) ds = \int_{\Omega} \left[ \mathbf{l}(x) \cdot \mathbf{L} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{V}^{(j)}(x) - \mathbf{V}^{(j)}(x) \cdot \mathbf{L} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{l}(x) \right] dx = 0$$

где  $\mathbf{l}$  — произвольное жесткое смещение  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{L}$  — оператор системы Ламе, то согласно (1.2) для  $\mathbf{W}^{(j)}$  справедливы асимптотические формулы

$$\mathbf{W}^{(j)}(x) = \sum_{h=1}^6 P_{jh} \mathbf{V}^{(h)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{T}(x) + O(|x|^{-3}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Матрицу  $P$  размером  $6 \times 6$ , состоящую из элементов  $P_{jh}$ , назовем матрицей упругой поляризации для полости  $G$ . (Эта матрица связана с тен-

зором упругой поляризации; см. предложение 3.) Вычисляя значения напряжений  $\sigma^{(n)}$  для полей (1.3) и используя формулы (1.4) для коэффициентов  $P_{jk}$ , находим, что

$$P = -D - A \operatorname{mes}_3 G, \quad D = 2 \|U(W^{(j)}, W^{(k)}; R^3 \setminus G)\|_{j, k=1}^6 \quad (1.6)$$

$$U(v, w; R^3 \setminus G) = \frac{1}{2} \int_{R^3 \setminus G} \sigma_{jk}(v; x) \varepsilon_{jk}(w; x) dx$$

где  $\sigma_{jk}$  и  $\varepsilon_{jk}$  — компоненты тензоров напряжений и деформаций,  $A$  — блочно-диагональная матрица  $\operatorname{diag}\{2\mu 1 + \lambda E, 2\mu 1\}$ ,  $1$  — единичная  $3 \times 3$  матрица,  $E$  —  $3 \times 3$ -матрица, все элементы которой равны единице. Из (1.6) вытекает, во-первых, что матрица  $D$  (матрица энергии присоединенной деформации) неотрицательно определена, а матрица  $P$  — неположительно определена (если  $G$  — множество ненулевого объема  $\operatorname{mes}_3 G$ , то  $P$  — отрицательно определенная матрица). Во-вторых,  $P$  и  $D$  — симметрические матрицы.

Пусть  $G$  — плоская трещина, т. е.  $G = \{x : x_3 = 0, (x_1, x_2) \in g\}$ , где  $g$  — множество в  $R^2$ , ограниченное гладким простым замкнутым контуром  $\partial g$ . Согласно (1.6),  $P = -D$ . Так как  $\sigma^{(n)}(V^{(k)}; x) = 0$  на  $\partial G$  и  $W^{(k)} = 0$ , то, используя симметрию относительно плоскости  $x_3 = 0$  полей  $W^{(j)}$ , заключаем, что матрица поляризации для трещины состоит из двух блоков размером  $3 \times 3$  и  $2 \times 2$ , расположенных по диагонали (остальные элементы — нули). В случае эллиптической в плане трещины  $G = \{x : x_3 = 0, x_1^2 a^{-2} + x_2^2 b^{-2} \leq 1\}$  специальные решения  $W^{(j)}$  по существу найдены в [4]; соответствующая матрица поляризации образована следующими блоками:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 m & \lambda^2 m & \lambda(\lambda + 2\mu)m \\ \lambda^2 m & \lambda^2 m & \lambda(\lambda + 2\mu)m \\ \lambda(\lambda + 2\mu)m & \lambda(\lambda + 2\mu)m & (\lambda + 2\mu)^2 m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} m &= q\mu^{-2} E(k)^{-1}, \quad n = 2qk^2 (k^2 (E(k) - \nu K(k)) + \nu (K(k) - E(k)))^{-1} \\ p &= 2qk^2 [(1 - \nu)E(k) + \nu K(k)] k^2 + \nu (E(k) - K(k))^{-1} \\ q &= -^2/3\pi ab^2 (\lambda + \mu)^{-1} \mu (\lambda + 2\mu), \quad k = (1 - b^2 a^{-2})^{1/2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона.  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

**2. Упругое пространство с трещиной.** Рассмотрим упругое пространство со свободной от нагрузок трещиной  $G$  при условии, что на бесконечности задано постоянное поле деформаций  $\varepsilon_{jk}^\infty$ . Решение  $u$  этой задачи имеет вид

$$u(x) = \sum_{j=1}^6 l_j^\infty \xi^{(j)}(x) = \sum_{j=1}^6 l_j^\infty V^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^6 l_j^\infty W^{(j)}(x) \quad (2.1)$$

где  $l$  — шестимерный вектор деформаций ( $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2^{1/2}\varepsilon_{12}, 2^{1/2}\varepsilon_{23}, 2^{1/2}\varepsilon_{13}$ ). Отметим, что  $l_j(V^{(k)}) = \delta_{jk}$ .

*Предложение 2.* Суммарное раскрытие  $\rho(u)$  берегов  $G^\pm$  трещины  $G$  вычисляется по формуле

$$\rho(u) = \sum_{\pm} \int_{G^\pm} u(x) \cdot n(x) ds = - \frac{2}{2\mu + 3\lambda} \sum_{j, k=1}^3 l_k^\infty P_{jk} \quad (2.2)$$

*Доказательство.* В силу (1.3)  $n = (2\mu + 3\lambda)^{-1} \sigma^{(n)}(V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)}) = -(2\mu + 3\lambda)^{-1} \sigma^{(n)}(W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(3)})$ , значит

$$\rho(u) = \sum_{k=1}^6 l_k^\infty \sum_{\pm} \left\{ \int_{G^\pm} V^{(k)}(x) \cdot n(x) ds - (2\mu + 3\lambda)^{-1} \sum_{j=1}^3 \int_{G^\pm} W^{(k)}(x) \sigma^{(n)}(W^{(j)}; x) ds \right\}$$

Первый интеграл из фигурных скобок равен нулю, а второй, согласно формуле Бетти и соотношениям (1.6), выражается через компоненты матрицы присоединенной деформации. Учитывая равенство  $P = -D$ , получаем (2.2).

Известно (см., например, [4, 5] и далее п. 6), что приращение  $\Delta\Pi$  потенциальной энергии упругого пространства при появлении в нем трещины  $G$  равна  $-\mathbf{U}(\mathbf{w}, \mathbf{w}; R^2 \setminus G)$ , где  $w$  — последняя сумма в (2.1). Поэтому еще одним следствием соотношений (1.6) является

*Предположение 3.* Справедливо равенство

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{I}^\infty \mathbf{P} \mathbf{I}^\infty \quad (2.3)$$

*Следствие 1.* В силу определения столбца  $\mathbf{I}$  и равенства (2.3) квадратичная форма

$$\Delta\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}^\infty, \boldsymbol{\varepsilon}^\infty) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\infty \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}^\infty \quad (2.4)$$

задает симметричный тензор  $\mathbf{P}$  упругой поляризации.

*Следствие 2.* Пусть  $\boldsymbol{\sigma}^\infty$  — напряжения, отвечающие деформациям  $\boldsymbol{\varepsilon}^\infty$ . В силу (1.7) равенства (2.2) и (2.3) для эллиптической в плане трещины приобретают вид

$$\rho(\mathbf{u}) = -2\mu q \sigma_{33}^\infty, \quad \Delta\Pi = -m(\sigma_{33}^\infty)^2 - (4\mu^2)^{-1}(n(\sigma_{13}^\infty)^2 + p(\sigma_{23}^\infty)^2)$$

**3. Плоская задача.** Все сказанное в пп. 1, 2 с очевидными изменениями переносится на случай плоской деформации. Матрица поляризации  $P = \|\|P_{jk}\|\|_{j,k=1}^3$  состоит из коэффициентов в асимптотике

$$\mathbf{W}^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^3 P_{jk} \mathbf{V}^{(k)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{S}(x) + O(|x|^{-2})$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x) = (x_1, 0), \quad \mathbf{V}^{(2)}(x) = (0, x_2), \quad \mathbf{V}^{(3)}(x) = 2^{-1/2}(x_2, x_1)$$

решений двумерной системы Ламе в  $R^2 \setminus G$  с условиями  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{W}^{(j)}; x) = -\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{V}^{(j)}; x)$  на  $\partial G$ ; здесь  $\mathbf{S}$  — матрица Буссинеска.

Справедливо равенство (2.3), а двумерный вариант формулы (2.2) получается заменой верхнего предела суммирования на двойку. Используя известные решения ([6], с. 517) плоской задачи о трещине-разреze  $\{(x_1, x_2): x_2=0, |x_1| < a\}$ , находим, что матрица поляризации в этом случае имеет вид

$$P = -\frac{a^2 \pi (\lambda + 2\mu)}{2\mu (\lambda + \mu)} \begin{vmatrix} \lambda^2 & (2\mu + \lambda)\lambda & 0 \\ (2\mu + \lambda)\lambda & (2\mu + \lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu^2 \end{vmatrix}$$

Поэтому приращение потенциальной энергии при появлении в теле трещины вычисляется по формуле

$$\Delta\Pi = -\frac{a^2 \pi (\lambda + 2\mu)}{4\mu (\lambda + \mu)} ((\sigma_{12}^\infty)^2 + (\sigma_{22}^\infty)^2) \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) позволяет решить вопрос о расположении трещины длины  $2a$ , которому соответствует экстремальное значение  $\Delta\Pi$ . Пусть система декартовых координат выбрана так, что оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  совпадают с главными осями тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ , а трещина располагается под углом  $\alpha$  к оси  $Ox_1$ . Тогда формула (3.1) преобразуется к виду

$$\Delta\Pi = -\frac{a^2 \pi (\lambda + 2\mu)}{4\mu (\lambda + \mu)} ((\sigma_{11}^\infty \sin \alpha)^2 + (\sigma_{22}^\infty \cos \alpha)^2) \quad (3.2)$$

Таким образом, если  $|\sigma_{11}^\infty| > |\sigma_{22}^\infty|$ , то максимальное значение правая часть (3.2) достигает при  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ , а минимальное — при  $\alpha = 0$ .

**4. Экстремальное значение  $\Delta\Pi$  для эллиптической трещины.** Вернемся к рассмотрению трехмерной задачи и будем считать, что трещина — эллиптическая в плане с полуосями  $a$  и  $b$ ,  $a \geq b$ . В отличие от двумерной ситуации здесь неверно естественное предположение о том, что экстремальное значение  $\Delta\Pi$  достигается при расположении трещины по одной из главных площадок напряжений. Результатам расчетов на ЭВМ предположим строгое математическое доказательство указанного факта.

*Предложение 4. 1°.* Пусть главные оси тензора напряжений совпадают с осями координат и  $|\sigma_{33}^\infty| \leq |\sigma_{22}^\infty| \leq |\sigma_{11}^\infty|$ . Тогда среди всех эллиптических трещин, имеющих фиксированную площадь  $S$  и лежащих в плоскостях главных осей напряжений, наибольшее по модулю приращение потенциальной энергии  $\Delta\Pi$  имеет круговая трещина, перпендикулярная оси  $Ox_1$ :

$$\Delta\Pi = -\frac{3}{8}(\pi^{-1}S)^{1/2}(1-\nu)\mu^{-1}(\sigma_{11}^\infty)^2 \quad (4.1)$$

2°. Предположим, что  $0 \leq |\sigma_{33}| \leq |\sigma_{22}| < |\sigma_{11}|$ , а круговая трещина площади  $S$  лежит в плоскости, содержащей ось  $Ox_3$ , и повернута на угол  $\varphi \in [0, \frac{1}{2}\pi]$  относительно оси  $Ox_1$ . Если  $\tau = \sigma_{22}^\infty/\sigma_{11}^\infty > (\nu-1)$ , то максимальное значение  $|\Delta\Pi(\varphi)|$  совпадает с (4.1) и достигается при  $\varphi = \varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ . Если же  $\tau < (\nu-1)$ , то приращение потенциальной энергии принимает максимальное по модулю значение при  $\varphi = \varphi_0 = \frac{1}{2} \arccos \varphi$ :

$$\varphi = (\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty)(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty)^{-1}(1-\beta)^{-1} \in [-1, 0), \quad \beta = 2(2-\nu)^{-1} \in [1, \frac{4}{3}) \quad (4.2)$$

$$\Delta\Pi(\varphi_0) = -\frac{4}{3}(\pi^{-1}S)^{1/2}(1-\nu)\mu^{-1}[\nu^{-1}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty)^2 + (2-\nu)^{-1}(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty)^2] \quad (4.3)$$

*Доказательство. 1°.* Ясно, что трещину следует поместить в плоскость, перпендикулярную оси  $Ox_1$ . Тогда по формуле (2.4)  $\Delta\Pi = m(\sigma_{11}^\infty)^2$ . Остается найти максимальное значение множителя  $m$ , зависящего от длины полуоси  $b \in (0, b_0]$ ,  $b_0 = \pi^{-1/2}S^{1/2}$ . В силу (1.8)  $m(b) = -m_0 b (E([1-\pi^2 S^{-2} b^4]^{1/2}))^{-1}$ , где величина  $m_0$  положительна и выражается через  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $S$ . Используя свойства монотонности эллиптических интегралов, заключаем, что функция  $dm/db = -m_0((S^2 + \pi^2 b^4)E - 2\pi^2 b^4 K)(S^2 - \pi^2 b^4)^{-1} E^{-2}$  неположительна и обращается в нуль лишь при  $b = b_0$ . Поэтому  $\max |m(b)| = -m(b_0) = \frac{1}{2}\pi m_0 b_0$ . Формула (4.1) и утверждение 1° установлены.

2°. Согласно следствию 1 и формуле (2.4), зависимость приращения потенциальной энергии  $\Delta\Pi$  от угла  $\varphi$  выражается равенствами

$$\Delta\Pi(\varphi) = m[(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty) \sin^2 \varphi + \sigma_{22}^\infty]^2 + \beta(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$\Delta\Pi'(\varphi) = m(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty) \sin(2\varphi) \{ \sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + (\beta-1)(\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty) \cos(2\varphi) \}$$

Если  $\tau > \nu-1$ , то выражение из фигурных скобок отлично от нуля при  $\varphi \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ , а максимальное значение величина  $|\Delta\Pi(\varphi)|$  имеет при  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ . Если же  $\tau < (\nu-1)$ , то указанное выражение есть нуль для  $\varphi = \varphi_0$ . Кроме того, непосредственные вычисления приводят к следующим соотношениям, доказывающим утверждение 2°):

$$|\Delta\Pi(\varphi_0)| = -\frac{1}{4}m\beta[(\beta-1)^{-1}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty)^2 + (\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty)^2] \geq -m(\sigma_{11}^\infty)^2 = |\Delta\Pi(\frac{1}{2}\pi)|$$

*Замечание 1.* На первый взгляд кажется, что выражение (4.3) неограниченно убывает, если коэффициент Пуассона  $\nu$  стремится к нулю. Однако вспоминая условия  $\tau < (\nu-1)$  и  $|\tau| < 1$ , находим, что  $\nu^{-1}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty)^2 < \nu(\sigma_{11}^\infty)^2$ .

Пусть  $0 < \sigma_{33}^\infty \leq |\sigma_{22}^\infty| < \sigma_{11}^\infty$ , а круговая трещина площади  $S$  расположена как указано в пункте 2° предложения 4. На фиг. 1 и 2 изображены зависимости величины  $\varphi_0$  и  $-\frac{3}{8}(\pi S^{-1})^{1/2} \times \mu(1-\nu)^{-1}(\sigma_{11}^\infty)^{-2} \Delta\Pi(\varphi_0)$  от отношения  $\tau = \sigma_{22}^\infty/\sigma_{11}^\infty \in [-1, 1)$  главных напряжений; римскими цифрами отмечены соответственно значения коэффициента Пуассона 0,2, 0,3 и 0,4. (Подчеркнем, что функции на фиг. 1 и 2 не являются гладкими.)

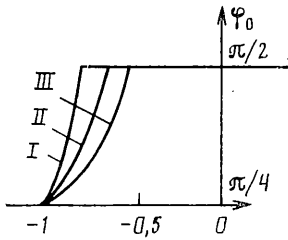
*Замечание 2.* Если  $\tau < (\nu-1)$  и  $0 < \sigma_{33} < -\sigma_{22} < \sigma_{11}$ , то на круговую трещину, повернутую относительно оси  $Ox_1$  на угол  $\varphi_0$ , действует на бесконечности растягивающее нормальное напряжение  $p$ . В самом деле, согласно (4.2)  $p = \sigma_{11}^\infty \sin^2 \varphi_0 + \sigma_{22}^\infty \cos^2 \varphi_0 = \nu^{-1}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty) > 0$ . Кроме того,  $p < \sigma_{11}^\infty$  (см. замечание 1).

Как показывают предложение 4 и фиг. 1, при уменьшении коэффициента Пуассона отклонение от угла  $\frac{1}{2}\pi$  для экстремального значения  $\Delta\Pi(\varphi)$  происходит в более узком диапазоне изменения нагрузок; при  $\nu=0$  оно невозможно. В любом случае для упомянутого отклонения необходимо, чтобы одно из главных напряжений было растягивающим, а второе — сжимающим.

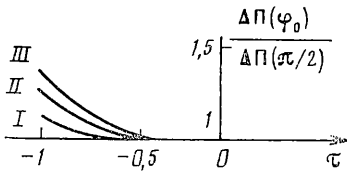
**5. Распространение трещины при подобном изменении ее формы.** Пусть  $G$  и  $G_1$  — две плоские в плане трещины, причем  $G_1$  получается из  $G$  преобразованием подобия с коэффициентом  $1+h$ . Из (1.5) следует, что матрицы поляризации  $P$  и  $P_1$  для трещин  $G$  и  $G_1$  связаны соотношением  $P_1 = (1+h)^3 P$ . Поэтому из предложения 2 вытекает

*Предложение 5.* Пусть трещина  $G$  находится в поле, порожденном действующими на бесконечности напряжениями  $\sigma^\infty$  (или деформациями  $\varepsilon^\infty$ ). Тогда приращение  $\Delta\Pi$  потенциальной энергии при подобном увеличении трещины с коэффициентом  $1+h$  вычисляется по формуле

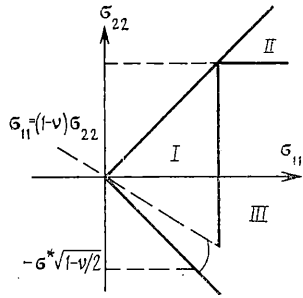
$$\Delta\Pi = \frac{3}{2}h(1+h + \frac{1}{3}h^2)\varepsilon^\infty P \varepsilon^\infty = \frac{3}{2}h\varepsilon^\infty P \varepsilon^\infty + O(h^2) \quad (5.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть  $h$  — малый параметр, а  $S$  — площадь трещины  $G$ . Поскольку приращение площади равно  $2hS + O(h^2)$ , то в силу (5.1) условие энергетического баланса приводит при  $h \rightarrow 0$  к соотношению

$$3\epsilon \approx P\epsilon + 4S\gamma = 0 \quad (5.2)$$

где  $\gamma$  — плотность поверхностной энергии [5]. Так как при подобном изменении площадь поверхности, занимаемой трещиной, растет пропорционально  $(1+h)^2$ , а элементы матрицы поляризации — пропорционально  $(1+h)^3$ , то согласно (5.2) критическая нагрузка при росте трещины уменьшается, а сама трещина является неустойчивой.

Исходя из (5.2) можно построить диаграмму критических нагрузок, представленную для случая круговой трещины на фиг. 3 ( $\sigma^* = [\pi E \gamma / [4 \cdot (1-\nu^2)]] \sqrt{\pi/S}$ ; выполнены условия предложения 4(2°)). Если значения  $\sigma_{11}^\infty$  и  $\sigma_{22}^\infty$  попадают в область I или II, то при любом расположении трещины не растет или растет соответственно. В области III возможна и та, и другая ситуация. Используя (5.2) с учетом предложения 4(2°), заключаем, что наиболее опасное для разрушения расположение круговой трещины отвечает повороту ее на угол  $\varphi_0$  относительно оси  $Ox_1$ , а наименее опасное расположение — в плоскости  $Ox_1x_2$  (см. (4.2)).

*Следствие 3.* Обозначим через  $K_q^{(j)}(s)$ ,  $q=1, 2, 3$  коэффициенты интенсивности напряжений на краю  $\partial g$  трещины  $G$ , отвечающие специальным полям смещений  $\mathbf{W}^{(j)}$ ,  $j=1, \dots, 6$ . Пусть еще  $(N_1(s), N_2(s))$  — внешняя нормаль к границе плоской области  $g$ . Известная формула Гриффитса ([5], с. 145) о приращении потенциальной энергии при продвижении трещины и соотношения (5.1) дают следующую связь элементов матрицы поляризации и коэффициентов  $K_q^{(j)}$  (не указанные в (5.3) величины равны нулю):

$$\begin{aligned} (1-\nu) \langle K_1^{(q)} K_1^{(p)} \rangle + \langle K_3^{(q)} K_3^{(p)} \rangle &= -3P_{pq} \quad (p, q=1, 2, 3) \\ (1-\nu) \langle K_2^{(l)} K_2^{(m)} \rangle &= -3P_{lm} \quad (l, m=5, 6) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\langle K \rangle = \frac{\mu}{2} \int_{\partial g} (N_1(s) x_1 + N_2(s) x_2) K(s) ds$$

**6. О приращении потенциальной энергии при появлении в теле малой трещины.** Пусть  $\Omega$  — ограниченное тело, а  $G$  — плоская трещина (их характерные размеры имеют одинаковый порядок). Поместим начало координат в  $\Omega$  и введем зависящие от малого безразмерного положительного параметра  $h$  множества  $\bar{G}_h = \{x : h^{-1}x \in \bar{G}\}$ ,  $\Omega_h = \Omega \setminus G_h$ . Рассмотрим задачу о деформации упругого тела с малой трещиной под действием самоуравновешенной нагрузки  $\mathbf{P}$ :

$$\mu \Delta \mathbf{u}(h, x) + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u}(h, x) = 0, \quad x \in \Omega_h; \quad (6.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}; h, x) = \mathbf{p}(x), \quad x \in \partial\Omega; \quad \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}; h, x) = 0, \quad x \in G_\pm \quad (6.2)$$

Задачу (6.1), (6.2) следует интерпретировать как эллиптическую краевую задачу в области с малым сингулярным возмущением границы. Следуя [7], найдем асимптотику вектора  $\mathbf{u}(h, x)$ . В качестве основного приближения возьмем поле  $\mathbf{v}$  смещений в теле  $\Omega$  (без трещины), вызванное действием нагрузки  $\mathbf{p}$ . Оно оставляет невязку в краевом условии (6.2) на  $G_{\pm}$ , главный член которой, как можно показать компенсируется решением типа пограничного слоя

$$\mathbf{w}(h, x) = h \sum_{j=1}^6 l_j(\mathbf{v}, 0) \mathbf{W}^{(j)}(h^{-1}x) \quad (6.3)$$

где  $l_j$  и  $\mathbf{W}^{(j)}$  введены соответственно в пп. 2 и 1. Сумма  $\mathbf{v}(x) + \mathbf{w}(h, x)$  в свою очередь не удовлетворяет равенству (6.2) на  $\partial\Omega$ . Для уничтожения главного члена погрешности определим новое решение задачи в области  $\Omega$ , имеющее согласно (6.3) и (1.5) следующий вид:

$$\mathbf{z}(h, x) = -h^3 \sum_{j,h=1}^6 l_j(\mathbf{v}; 0) P_{jh} \left( \mathbf{z}^{(h)}(x) + \mathbf{V}^{(h)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{T}(x) \right) \quad (6.4)$$

$$\mu \Delta \mathbf{z}^{(h)}(x) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{z}^{(h)}(x) + \mathbf{V}^{(h)}(\partial/\partial x) \delta(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{z}^{(h)}; x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

$\delta$  — функция Дирака. Из результатов [7] вытекает  
Предложение 5. Справедливо неравенство

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |\mathbf{u}(h, x) - \mathbf{v}(x) - \mathbf{w}(h, x) - \mathbf{z}(h, x)| < ch^4(h^2 + |x|^2)^{-1} \quad (6.6)$$

Найдем асимптотику потенциальной энергии. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}; \Omega_h) &= U(\mathbf{u}, \mathbf{u}; \Omega_h) - A(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \partial\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{u}(h, x) ds = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{v}(x) ds + \frac{1}{2} h^3 \sum_{j,h=1}^6 l_j(\mathbf{v}; 0) P_{jh} \int_{\partial\Omega} \mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{z}^{(h)}(x) ds + O(h^4) = \\ &= U(\mathbf{v}, \mathbf{v}; \Omega) - A(\mathbf{v}, \mathbf{p}, \partial\Omega) - \frac{1}{2} h^3 \sum_{j,h=1}^6 l_j(\mathbf{v}, 0) P_{jh} \int_{\Omega} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{V}^{(h)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x) dx + \\ &+ O(h^4) = \Pi(\mathbf{v}; \Omega) + \frac{1}{2} h^3 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}, 0) \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}, 0) + O(h^4) \end{aligned} \quad (6.7)$$

(воспользовались оценкой (6.6), равенствами (6.3)–(6.5) и формулой Бетти). В (6.7)  $U$  и  $\Pi$  — упругая и потенциальная энергии,  $A$  — работа внешних сил,  $\mathbf{P}$  — тензор упругой поляризации трещины  $G$  (растянутой в  $h^{-1}$  раз малой трещины  $G_h$ ). Таким образом, установлено

Предложение 6. Приращение  $\Delta\Pi$  потенциальной энергии при появлении в упругом теле  $\Omega$  трещины малого относительного размера  $h$  вычисляется по асимптотической формуле

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} h^3 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}; 0) \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}; 0) + O(h^4) \quad (6.8)$$

7. Об ориентации микротрещины нормального отрыва. Попытка учесть баланс энергии при появлении в теле микротрещины на основе использованного в п. 5 предположения о приращении поверхностной энергии  $2\gamma S_h$  не приводит к успеху. Действительно, согласно (6.8)  $\Delta\Pi = O(h^3)$ , а  $S_h = O(h^2)$ ; равенство таких величин при малом  $h$  невозможно. Это противоречие можно устранить, если учесть взаимодействие берегов трещины. Именно следуя [8, 9], предположим, что вблизи ее ребра действуют силы сцепления. При вычислении поверхностной энергии  $\Delta\Pi$ , высвобождающейся вследствие появления макротрещины, работой этих сил можно было пренебречь. Однако при рассмотрении микротрещин вклад последних в энергетический баланс имеет тот же порядок, что и  $\Delta\Pi$ . В рамках такой концепции можно качественно охарактеризовать явление зарождения в теле микротрещины заданной конфигурации. Следуя [8, 9], будем считать, что график зависимости сил сцепления от раскрытия берегов (в точке  $(x_1, x_2) \in g$ ) является ступенчатым; ширину и высоту «ступеньки» обозначим  $d$  и  $\eta$ . Если устремить  $d$  к нулю, оставляя постоянным произведение  $\eta d = 2\gamma$ , то в пределе получится функция Дирака  $\delta$ . Именно на представлении упомянутых сил в виде  $\delta$ -функции и основывается гипотеза Гриффитса: при

малейшем раскрытии берегов их взаимодействие прекращается и  $\Delta\Pi=2\gamma S$ . В рассматриваемом случае  $1 \gg d > 0$  связи в материале нарушаются не по всей поверхности трещины. Появлению микротрещины предшествует образование зоны ослабленных связей, а работа против сил сцепления достигает максимального значения при наибольшем из возможных суммарном раскрытии берегов.

*Следствие 4.* Пусть  $u$  – решение задачи (6.1), (6.2). Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\rho(u) = -\frac{2h^3}{2\mu + 3\lambda} \sum_{j,h=1}^3 l_h(v; 0) P_{jh} + O(h^4) \quad (7.1)$$

Формула (7.1) позволяет определить возможное направление образования микротрещины в предположении, что главные напряжения растягивающие. Для этого необходимо найти ориентацию плоскости трещины, доставляющую максимальное значение модулю суммы из правой части (7.1). В частности, для круговой в плане трещины такая плоскость перпендикулярна направлению большего из главных напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
2. Pazy A. Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1967. V. 24. No. 3. P. 193–218.
3. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
4. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 83–203.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения М.: Наука, 1974. 640 с.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
7. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы математического анализа Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. Вып. 8. С. 72–153.
8. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика, 1959. Т. 5. № 4. С. 391–401.
9. Новожилов В. В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797–812.

Ленинград

Поступила в редакцию  
5.V.1987