

УДК 539.375

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ  
ЗАДАЧ О ТРЕЩИНАХ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

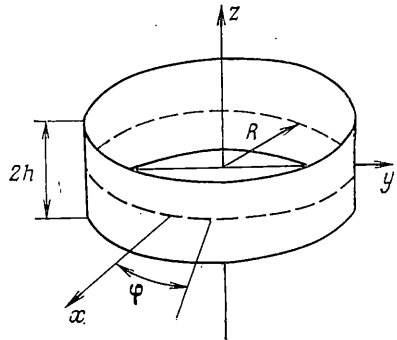
КОРЕЛЬШТЕЙН Л. Б.

Осесимметричные задачи о трещинах по цилиндрической поверхности в безграничной однородной упругой среде сведены к системе одномерных сингулярных интегральных уравнений относительно производных скачков смещений. Получены численные решения системы для ряда типичных видов нагрузок. Исследована зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от вида нагрузки, отношения полуширины трещины  $h$  к радиусу кривизны ее поверхности  $R$ , коэффициента Пуассона среды. Для предельных случаев трещин приведены асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений. Построены численные решения с учетом налегания поверхностей трещины, обусловленного взаимодействием нормальной и сдвиговой мод. Рассмотрены задачи о взаимодействии нескольких трещин по цилиндрической поверхности. Определено характерное расстояние начала взаимодействия трещин в зависимости от кривизны их поверхности.

Задачи об узких пространственных неоднородностях, аналогичные задаче о трещине в виде узкого пояса, рассматривались в работах [1-3]. Исследование влияния кривизны поверхности на узкие трещины общего вида на основе двучленной асимптотики проведено в [4].

1. Постановка и уравнения задачи. Рассмотрим трещину (фиг. 1), занимающую в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  область  $|z| \leq h, r=R$ . К поверхностям трещины приложены усилия  $\mathbf{p}^+(\mathbf{x}) = -\mathbf{p}^-(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) = p_r(z)\mathbf{e}_r + p_z(z)\mathbf{e}_z + p_\varphi(z)\mathbf{e}_\varphi$ , знаки плюс и минус относятся к «внешней» и «внутренней» поверхностям; на бесконечности нагрузка отсутствует.

Сингулярные интегральные уравнения относительно производных по  $z$  компонент скачка смещений  $\kappa$  можно получить, проведя интегрирование по  $\varphi$  в получаемых из формулы Соммиери выражениях для напряжений в произвольной точке пространства, содержащего трещину по криволинейной поверхности ([4], (1.8)), и перейдя в полученных соотношениях к пределу при  $r \rightarrow R$ . Описанные громоздкие вычисления проделаны с использованием ЭВМ при помощи алгоритмического языка REDUCE-3, позволяющего проводить алгебраические преобразования в символьном виде. В результате получены следующие уравнения [4] (индексы 1, 2, 3 соответствуют  $z, r$  и  $\varphi$ -компонентам векторов  $\kappa, p$ ):



Фиг. 1

$$\int_{-1}^1 K_{ij}(m-m') \kappa_j'(m') dm' = 4\pi(1-\nu) \mu^{-1} p_i(m, \varepsilon) \quad (i, j=1, 2) \quad (1.1)$$

$$\int_{-1}^1 K_{33}(m-m') \kappa_3'(m') dm' = 4\pi \mu^{-1} p_3(m, \varepsilon)$$

$$K_{11}(m) = \varepsilon [(\xi^{-1} - \xi) E + \xi K] \xi_1$$

$$\begin{aligned}
K_{33}(m) &= \varepsilon [ (\xi^{-1} + 16\xi)E - 8\xi K + 16\xi^3(E - K) ] \xi_1^3 \\
K_{22}(m) &= \varepsilon \{ [\xi^{-1} + (11 - 16\nu)\xi + (28 - 32\nu)\xi^3]E + \\
&+ [(1 + 8\nu)\xi - (16 - 24\nu)\xi^3]K + 16(1 - \nu)\xi^5(E - K) \} \xi_1^3 \\
K_{21}(m) &= -K_{12}(m) = \varepsilon \{ [4 - 8\nu + (14 - 16\nu)\xi^2]E - \\
&- [1 - 4\nu + (10 - 12\nu)\xi^2]K + 8(1 - \nu)\xi^4(E - K) \} \xi_1^3
\end{aligned}$$

где  $\varepsilon = h/R$  — безразмерный параметр, характеризующий форму трещины,  $m = z/h$ ,  $\xi = \frac{1}{2}z/R = \varepsilon m/2$ ,  $\xi_1 = 1/\sqrt{1 + \xi^2}$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона среды,  $K = K(\xi_1)$ ,  $E = E(\xi_1)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Таким образом, задачи для нагрузок по  $z$ ,  $r$  и  $\varphi$  (как и должно быть из соображений симметрии) разделяются. При  $m' \rightarrow m$  ядра (1.1) имеют порядок

$$\begin{aligned}
K_{11}(m - m') &\approx K_{22}(m - m') \approx K_{33}(m - m') = 2/(m - m') + o(1) \\
K_{21}(m - m') &= -K_{12}(m - m') = \varepsilon [ (1 - 4\nu) \ln(1/\varepsilon |m - m'|) + \\
&+ 4(1 - 2\nu) ] + o(m - m')
\end{aligned} \quad (1.2)$$

т. е. уравнения (1.1) — сингулярные, интегралы в них понимаются в смысле главного значения. Соотношения (1.2) полностью согласуются с асимптотическими уравнениями для узких трещин [4]. С уменьшением кривизны поверхности трещины ( $R \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) уравнения (1.1) переходят в уравнения плоской и антиплоской задачи о прямолинейном разрезе.

**2. Методы численного и асимптотического решения.** Уравнения (1.1) решались численно методом механических квадратур [5]. Функции  $\kappa_i'(m)$  искались в виде

$$\kappa_i'(m) = U_i^N / \sqrt{1 - m^2} \quad (2.1)$$

где  $U_i^N$  — интерполяционный многочлен степени  $N-1$  в точках  $\eta_n = \cos[\pi(2n-1)/2N]$  ( $n=1, N$ ), определяемый формулой

$$U_i^N(\cos \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\cos N\theta \sin \theta_n}{\cos \theta - \cos \theta_n} U_i^N(\eta_n), \quad \theta_n = \frac{2n-1}{2N} \pi \quad (2.2)$$

Записывая уравнения (1.1) при  $m = \xi_k = \cos(\pi k/N)$  ( $k=1, N-1$ ), когда сингулярные интегралы могут быть (см. [5]) вычислены по квадратурной формуле Гаусса, получим

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N K_{33}(\xi_k - \eta_n) U_3^N(\eta_n) = 4p_3(\xi_k, \varepsilon) / \mu \quad (k=1, N-1)$$

и аналогичные  $2(N-1)$  уравнений для  $U_1^N(\eta_n)$ ,  $U_2^N(\eta_n)$ . Недостающие три уравнения для определения  $3N$  неизвестных  $U_i^N(\eta_n)$  получаются из условий непрерывности смещений

$$\int_{-1}^1 \kappa_i'(m) dm = \kappa_i(1) - \kappa_i(-1) = \int_0^\pi U_i^N(\cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N U_i^N(\eta_n) = 0$$

После решения системы  $N$  уравнений для  $U_3^N(\eta_n)$  и  $2N$  уравнений для  $U_1^N(\eta_n)$ ,  $U_2^N(\eta_n)$  по формулам (2.1), (2.2) находятся скачки смещений, а также коэффициенты интенсивности напряжений, совпадающие с точностью до числового множителя с  $U_i(\pm 1)$ .

Численные расчеты, проведенные для различных нагрузок в широком диапазоне значений геометрического параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 0 \div 10$ ), показали, что результаты с возрастанием  $N$  быстро стабилизируются, выходя на точное решение задачи. Практически для получения решения с погрешностью не более 1% достаточно 20 точек ( $N=20$ ). Исключение составляет лишь случай сильно вытянутых трещин ( $\varepsilon = 7 \div 10$ ), когда для получения достаточно точного решения требовалось увеличить  $N$  до 50–100 точек. Это связано с возникновением в этом случае у концов трещины малых

(по сравнению с длиной трещины) пограничных слоев, в зону которых должно попасть достаточное количество точек аппроксимации  $\eta_n$ .

Для изучения аналитического характера зависимости решения от нагрузки и параметров  $\varepsilon$ ,  $\nu$ , а также с целью дополнительной проверки правильности численного решения были получены асимптотические формулы для скачков смещений и коэффициентов интенсивности напряжений при малых и больших  $\varepsilon$ .

Асимптотические формулы при малых  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) выводились непосредственно из уравнений (1.1). С использованием асимптотических формул для  $K(\xi_1)$ ,  $E(\xi_1)$  при  $\xi_1 \rightarrow 1$  определялись асимптотики при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ядер уравнений (1.1), имеющие вид

$$K_{ii}(m) \sim \frac{2}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} [K_{ii}^n(m, \nu) + K_{ii}^{n*}(m, \nu) \ln \varepsilon] \varepsilon^{2n} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

$$K_{21}(m) = -K_{12}(m) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [K_{21}^n(m, \nu) + K_{21}^{n*}(m, \nu) \ln \varepsilon] \varepsilon^{2n-1}$$

В предположении, что нагрузки  $p_i$  имеют степенную асимптотику по  $\varepsilon$ :

$$p_i(m, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} p_i^n(m) \varepsilon^n \quad (2.4)$$

асимптотику  $\varkappa_i$  естественно искать в виде

$$\varkappa_i \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa_i^n(m, \ln \varepsilon) \varepsilon^n \quad (2.5)$$

Подставляя (2.3)–(2.5) в (1.1) и приравнявая члены одинакового порядка по  $\varepsilon$ , получаем для  $\varkappa_i^n$  сингулярное интегральное уравнение плоской задачи о трещине с зависящей от  $\varkappa_j^k$ ,  $k < n$  правой частью. Решая эти уравнения последовательно при  $n=1, 2$  и т. д., найдем асимптотику  $\varkappa$  любого порядка. Указанная асимптотика в общем случае имеет вид

$$\varkappa_i \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{[n/2]} \varkappa_i^{nh}(m) \varepsilon^n (\ln \varepsilon)^h \quad (2.6)$$

Из асимптотик (2.6) для  $\varkappa_i$  находятся аналогичные асимптотики коэффициентов интенсивности напряжений.

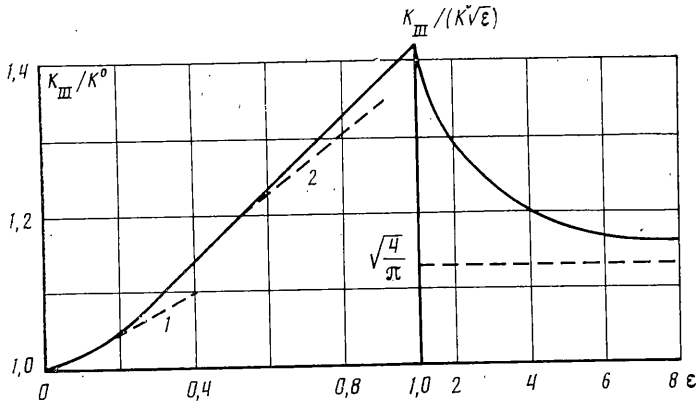
Заметим, что при  $p_i^{nk}(m)$  — многочленах по  $m$   $\varkappa_i^{nk}$  имеет вид

$$\varkappa_i^{nh}(m) = 2(1-\nu + \nu \delta_{is}) \mu^{-1} h \sqrt{1-m^2} Q_i^{nh}(m)$$

где  $Q_i^{nh}$  — многочлен от  $m$  (и, возможно, от  $\nu$ ).

Посредством описанных вычислений, выполнявшихся на ЭВМ с использованием REDUCE-3, найдены несколько начальных членов асимптотики  $\varkappa$  и коэффициентов интенсивности напряжений при малых  $\varepsilon$  (до  $\varepsilon^4 \div \varepsilon^8$  порядков включительно) для ряда типичных нагрузок.

Асимптотические соотношения для коэффициентов интенсивности напряжений при больших  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \gg 1$ ) могут быть выведены из механических соображений. Действительно, при  $\varepsilon \gg 1$  получаем как бы стержень, вклеенный по концам в цилиндрическую полость в среде. Скачки смещений в средней части трещины в этом случае можно приближенно определить либо (при нормальной нагрузке) из решения соответствующих плоских задач об упругом диске и упругой плоскости с круговой полостью, либо (при сдвиговой нагрузке) — из соответствующего балочного решения для защемленного по концам кругового стержня длины  $2h$ . После этого определяется главный член асимптотики упругой энергии среды с трещиной, откуда с помощью формулы Ирвина, связывающей коэффициенты интен-



Фиг. 2

сивности напряжений и изменение упругой энергии при продвижении контура трещины, получаются соотношения для коэффициентов интенсивности напряжений. В частности, для однородных нормальной и сдвиговых нагрузок такие соотношения имеют вид

$$p_\varphi = \text{const}, \quad K_{III} \approx (4\varepsilon/\pi)^{1/2} K^0 \quad (2.7)$$

$$p_r = \text{const}, \quad K_I^2 + K_{II}^2 \approx (K^0)^2 / \pi \varepsilon = p_r^2 R \quad (2.8)$$

$$p_z = \text{const}, \quad K_I^2 + K_{II}^2 \approx \varepsilon (K^0)^2 / [(1-\nu^2)\pi] \quad (2.9)$$

где  $K^0 = p(\pi h)^{1/2}$  — коэффициент интенсивности напряжений соответствующей плоской задачи о прямолинейном разрезе.

Для пояснения вышеизложенного приведем более подробно вывод соотношения (2.8). Смещения внешней и внутренней поверхности трещины в ее средней части (вдали от концов) определяются как решения соответствующих плоских задач о пластине с вырезом и об упругом диске  $u_r^+ = 1/2 p_r R \mu^{-1}$ ,  $u_r^- = -1/2 (1-2\nu) p_r R \mu^{-1}$ .

Для скачка смещений  $\kappa_r$  получаем  $\kappa_r \approx u_r^+ - u_r^- = (1-\nu) \mu^{-1} p_r R$ , откуда для упругой энергии среды с трещиной  $W$  получаем

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \kappa_r p_r ds = \frac{1-\nu}{2\mu} p_r R p_r 2\pi l R^2 = \frac{1-\nu}{\mu} \pi p_r^2 R^2 l \quad (2.10)$$

где  $S$  — поверхность трещины,  $l = 2h$  — ее длина.

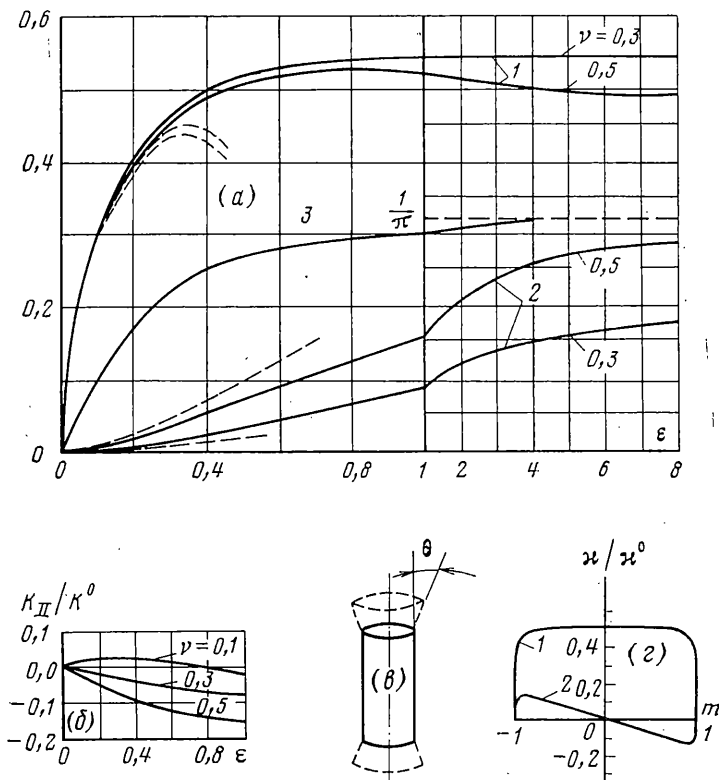
Далее, при действии однородной нормальной нагрузки коэффициенты интенсивности напряжений ограничены и стремятся при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  к соответствующим значениям для полубесконечной трещины по цилиндрической поверхности:  $K_I = K_I^\infty + o(1)$ ,  $K_{II} = K_{II}^\infty + o(1)$ . Поэтому из формулы Ирвина получаем (при  $l \rightarrow \infty$ )

$$W(l) = \frac{1-\nu}{2\mu} 2\pi R \int_0^l [K_I^2(l') + K_{II}^2(l')] dl' = \frac{1-\nu}{\mu} \pi R l [(K_I^\infty)^2 + (K_{II}^\infty)^2 + o(1)]$$

откуда с учетом (2.10) имеем  $(K_I^\infty)^2 + (K_{II}^\infty)^2 = p_r^2 R$ , что тождественно (2.8).

**3. Результаты расчетов.** Рассмотрим результаты численных и асимптотических расчетов для различных видов нагрузок.

1.  $p_\varphi = \text{const}$ . На фиг. 2 показана зависимость безразмерного коэффициента интенсивности напряжений от  $\varepsilon$  по результатам численных расчетов (сплошная кривая). Штриховые кривые 1 и 2 соответствуют асимптотической формуле  $K_{III}/K^0 \approx 1 + (15/16 \lambda - 94/32) \varepsilon^2$ ,  $\lambda = \ln(16/\varepsilon)$  и более точной асимптотической формуле до членов порядка  $\varepsilon^8$  включительно. С ростом  $\varepsilon$  монотонно возрастает  $K_{III}/K^0$ . На участке  $\varepsilon = 0,2 \div 1$  график  $K_{III}/K^0$  с погрешностью не более 0,2% аппроксимируется прямой  $K_{III}/K^0 = 0,452\varepsilon +$



Фиг. 3

+0,966. Асимптотика при больших  $\varepsilon$  дает удовлетворительную точность (4÷5%) при  $\varepsilon > 5$ .

2.  $p_r = \text{const}$ . Первые члены асимптотики при малых  $\varepsilon$  имеют вид

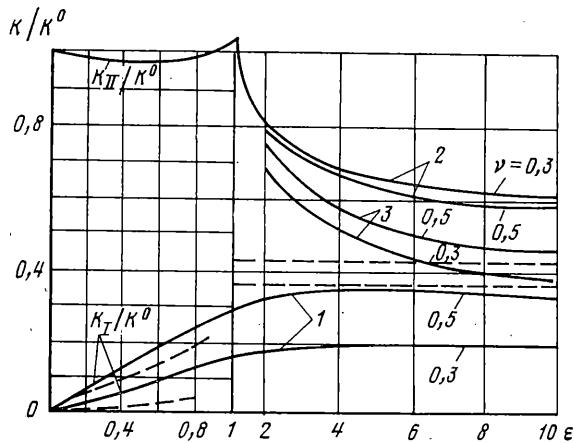
$$K_I/K^0 \approx 1 - \varepsilon^2 \left[ \left( \frac{3}{16} + \nu \right) \lambda + \frac{31}{32} - 3\nu \right] \quad (3.1)$$

$$K_{II}/K^0 \approx 0,25(1 - 4\nu)\varepsilon + \left[ \left( \nu^2 + \frac{1}{8}\nu - \frac{15}{32} \right) \lambda + \left( -\frac{1}{2}\nu^3 - \frac{19}{8}\nu^2 + \frac{87}{64}\nu + \frac{177}{256} \right) \right] \varepsilon^3$$

Как показывают формулы (3.1) и численные расчеты,  $K_I/K^0$  с возрастанием  $\varepsilon$  убывает, быстро выходя на асимптотику при больших  $\varepsilon$ . На фиг. 3, а изображены коэффициенты интенсивности напряжений, обезразмеренные на  $K^0 \sqrt{\varepsilon} = p_r \sqrt{\pi R}$ . Кривые 1, 2 соответствуют безразмерным коэффициентам  $K_I$ ,  $K_{II}$  при различных значениях  $\nu$ , кривая 3 — сумме квадратов этих величин (от  $\nu$  практически не зависящей); сплошные кривые — численный расчет, штриховые — асимптотика; кривые согласуются со значениями, приведенными в [6]. Безразмерный коэффициент  $K_I$ , как видно из графика, очень быстро (практически уже при  $\varepsilon = 0,5$ ) достигает величины, соответствующей полубесконечной трещине.

Поведение коэффициента  $K_{II}$  (фиг. 3, б) отличают следующие особенности: его величина и знак существенно зависят от коэффициента Пуассона  $\nu$ ; при малых  $\varepsilon$  (порядка 0,2 и менее)  $K_{II}$  пренебрежимо мал по сравнению с  $K_I$  и лишь при достаточно больших  $\varepsilon$  становится сопоставим с ним.

При малых  $\varepsilon$  коэффициент  $K_{II}$  зависит от  $\nu$  практически линейно. При  $\nu > 0,25$  (и  $p_r > 0$ )  $K_{II} < 0$ , при  $\nu < 0,25$   $K_{II}$  положителен. При больших  $\varepsilon$  и  $0 < \nu \leq 0,5$  коэффициент  $K_{II}/K^0 \sqrt{\varepsilon} < 0$  и также изменяется в зависимости от  $\nu$  почти линейно — от нуля при  $\nu = 0$  до максимального по абсолютной величине значения (0,27) при  $\nu = 0,5$ . В связи с этим рост трещин рассматриваемой формы (в виде вытянутого цилиндра) в случае изотропной по прочностным свойствам среды должен происходить с отклонением от по-



Фиг. 4

верхности цилиндра во внешнюю область (фиг. 3, в). Угол отклонения  $\theta$ , который может быть определен по формуле [7]:

$$\theta = -2 \operatorname{arctg} [2K_{II} / (K_I + \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2})]$$

меняется почти линейно по  $\nu$  от  $\theta=0$  ( $\nu=0$ ) до  $\theta=21^\circ$  ( $\nu=0,5$ ).

На фиг. 3, г приведены графики обезразмеренных на  $K^0=2(1-\nu)\mu^{-1}p_rR$  скачков смещений  $\kappa_r$ ,  $\kappa_z$  (кривые 1, 2) для вытянутой трещины ( $\epsilon=10$ ) при  $\nu=0,3$ . Вблизи контуров  $m=\pm 1$  имеют место краевые слои (соответствующие решению для полубесконечной трещины), затухающие (как видно из фиг. 3, г) на расстояниях порядка  $2R$  от контуров.

3.  $p_z=\text{const}$ . Асимптотические формулы при малых  $\epsilon$  для данной нагрузки имеют вид

$$\begin{aligned} \kappa_r &\approx 2(1-\nu)\mu^{-1}p_z\sqrt{h^2-z^2}[-1/4(1-4\nu)m\epsilon] \\ K_{II}/K^0 &\approx 1-\epsilon^2(3/16\lambda^{-17/32}), \quad K_I/K^0 \approx \mp 0,25(1-4\nu)\epsilon \end{aligned} \quad (3.2)$$

где знаки минус и плюс в последней формуле соответствуют значениям  $K_I$  на контурах  $z=\pm h$ . Результаты численных расчетов приведены на фиг. 4, где изображены коэффициенты интенсивности напряжений, обезразмеренные на  $K^0$  (при  $\epsilon \leq 1$ ) и  $K^0\sqrt{\epsilon}$  (при  $\epsilon \geq 1$ ); нумерация кривых аналогична фиг. 3. Интересной особенностью решения является слабое изменение (менее 3%) коэффициента  $K_{II}/K^0$  на интервале  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , в котором практически можно полагать  $K_I$  равным  $K^0$ .

Из соображений симметрии очевидно, что скачок смещений  $\kappa_r$  — нечетная функция по  $z$  и в некоторых зонах поверхности трещины должен быть отрицательным. Поэтому приведенное решение имеет смысл, только если трещина была предварительно раскрыта или нагружена дополнительными раскрывающими нагрузками. В противном случае необходимо учитывать налегание поверхностей.

4.  $p_z=\text{const}$ . Решение с учетом налегания поверхностей без трения.

Асимптотическое решение при малых  $\epsilon$  приведено в [4]. Положение области налегания зависит от знака выражения  $(1-4\nu)$ . Для практически важного случая, когда  $(1-4\nu) < 0$  ( $\nu > 0,25$ ) и, для определенности,  $p_z > 0$  зона налегания занимает  $1/3$  трещины (область  $-1 \leq m \leq m^*$ , где  $m^* = -1/3$ ). Для уточнения поведения коэффициентов интенсивности напряжений и области налегания в зависимости от  $\epsilon$  получено численное решение задачи с учетом налегания. При этом область налегания предполагалась имеющей вид  $-1 \leq m \leq m^*$ .

Метод численного решения в целом аналогичен изложенному в п. 2 с той разницей, что нормальная компонента производной скачка смещений  $\kappa_r'$  (ненулевая только при  $m \in (m^*, 1)$ ) в отличие от  $\kappa_r'$  находится в виде  $\kappa_r'(m) = U_r^N(m) [(1-m) \cdot (m-m^*)]^{-1/2}$ , а точки дискретизации  $\eta_n$ ,  $\xi_k$  для  $\kappa_r'$ ,  $p_r$  заменяются аналогично расположенными точками  $\eta_n^*$ ,  $\xi_k^*$  на  $[m^*, 1]$ :

$$\eta_n^* = 0,5[1+m^*+(1-m^*)\eta_n], \quad \xi_k^* = 0,5[1+m^*+(1-m^*)\xi_k]$$

Граница области налегания  $m^*$  определяется из условия плавного смыкания берегов трещины  $U_r^N(m^*)=0$ .

Результаты расчетов показывают, что с увеличением  $\varepsilon$  зона налегания постепенно расширяется до половины трещины (фиг. 5), а  $m^*$  (при  $\nu > 0,25$ ) практически не зависит от  $\nu$ . Величины коэффициентов интенсивности напряжений мало отличаются от соответствующих величин, полученных без учета налегания (фиг. 4), за исключением равного нулю  $K_I$  на контуре  $z=-h$ . Учет налегания приводит к небольшому (до 2–3%) увеличению  $K_{II}$  на контуре  $z=-h$  и к уменьшению — на контуре  $z=h$ . Коэффициент  $K_I$  на контуре  $z=h$  при малых  $\varepsilon$  (см. [4]) возрастает на 8–9%, с ростом  $\varepsilon$  влияние налегания на его величину уменьшается.

5.  $p_z = pz/h$ . Асимптотические формулы при малых  $\varepsilon$  имеют вид

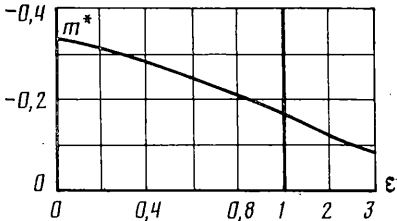
$$\kappa_r \approx \frac{1}{6}(1-\nu)(1-4\nu)\mu^{-1}ph(1-m^2)^{3/2}\varepsilon \quad (3.3)$$

$$K_{II}/K^0 \approx \frac{1}{2} - \left[ \frac{3}{2} - (1-4\nu)^2 \right] \varepsilon^2 / 64$$

$$K_I/K^0 \approx \varepsilon^3 \left[ \left( \frac{1}{4}\nu^2 + \frac{1}{32}\nu - \frac{15}{128} \right) \lambda - \frac{3}{4}\nu^2 - \frac{11}{32}\nu + \frac{13}{64} \right]$$

Графики коэффициентов интенсивности напряжений приведены в [6]. Особенности поведения коэффициента  $K_I$  в этом случае — его очень малая величина при малых  $\varepsilon$  и смена знака, происходящая с возрастанием  $\varepsilon$  (при  $\nu=0,3$  она происходит при  $\varepsilon \approx 0,8$ ).

На фиг. 6 изображен вид  $\kappa_r(z)$  при различных значениях  $\varepsilon$  (при  $\nu=0,3, p < 0$ ). При значении  $\varepsilon$ , соответствующем изменению знака  $K_I$ , у контуров трещины появляются зоны с  $\kappa_r < 0$  (перехлестывание берегов), размер которых с возрастанием  $\varepsilon$  увеличивается. Поэтому для данной нагрузки, как и при  $p_z = \text{const}$ , необходимо учитывать налегание поверхностей трещины (при  $p < 0$  — у контуров трещины, при  $p > 0$  — в ее средней части).

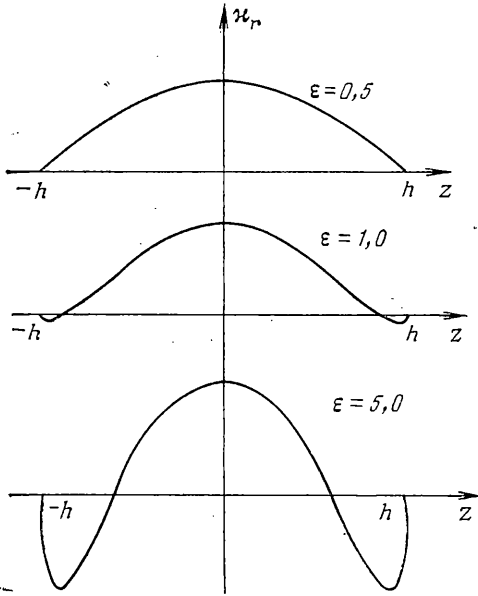


Фиг. 5

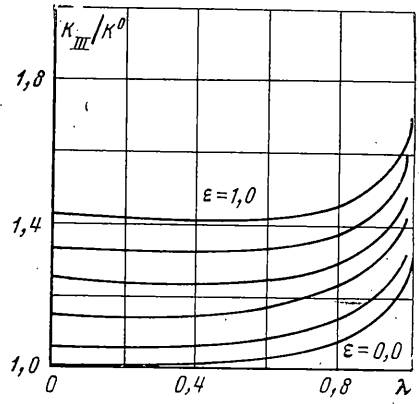
4. **Взаимодействие двух трещин.** Уравнения (1.4) (записанные в переменных  $z, z'$ ) справедливы и для системы нескольких осесимметричных трещин по одной и той же цилиндрической поверхности: интегрирование в них должно проводиться по объединенной поверхности всех трещин. С целью изучения влияния кривизны поверхностей трещин на их взаимодействие проведены численные расчеты для двух одинаковых трещин описанного в п. 1 вида для постоянной сдвиговой ( $p_\phi = \text{const}$ ) и нормальной ( $p_r = \text{const}$ ) нагрузок.

На фиг. 7, 8 показана зависимость безразмерного коэффициента  $K_{III}$  от параметра  $\lambda = 2h/(2h+\delta)$ , характеризующего близость трещин ( $\delta$  — расстояние между ближними контурами трещин), при различных значениях  $\varepsilon$  соответственно для дальних и ближних контуров трещин. На дальних контурах  $K_{III}$  существенно возрастает лишь при  $\varepsilon$  очень близких к единице, стремясь к значению  $K_{III}$  для трещины удвоенной длины. На ближних контурах  $K_{III}$  при слиянии трещин ( $\lambda \rightarrow 1$ ) стремится к бесконечности. Из фиг. 7, 8 видно, что если для плоских трещин ( $\varepsilon=0$ ) взаимодействие становится существенным при  $\lambda \approx 0,5$  (т. е. при  $\delta \approx 2h$  — длине трещины), то при  $\varepsilon=1$  уже при  $\lambda \approx 0,7$ , т. е. при  $\delta \approx h$  — половине длины трещины.

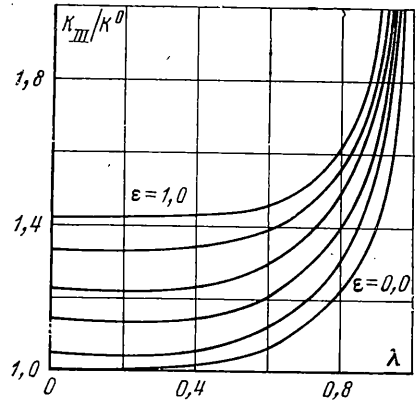
При  $p_r = \text{const}$ , критическое расстояние между трещинами, когда их можно считать практически не взаимодействующими, с увеличением кривизны трещин уменьшается. Для трещин большой кривизны (больших  $\varepsilon$ ) близость трещин определяется отношением  $\lambda_1 = \delta/R$ . Зависимость безразмерных  $K_I, K_{II}$  на ближних контурах от  $\lambda_1$  при  $p_r = \text{const}$  и  $\varepsilon=10$  (т. е. для практически полубесконечных трещин) изображена на фиг. 9, 10. Из них видно, что  $K_{II} \rightarrow 0$  при  $\lambda_1 \rightarrow 0$ , а кривые  $K_I(\lambda_1)$  для разных значений  $\nu$  сливаются. Это, по-видимому, объясняется тем, что при  $\lambda_1 = \delta/R \ll 1$  напряженно-деформированное состояние в окрестности ближних кон-



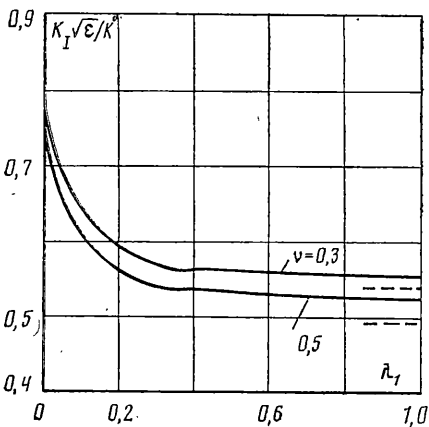
Фиг. 6



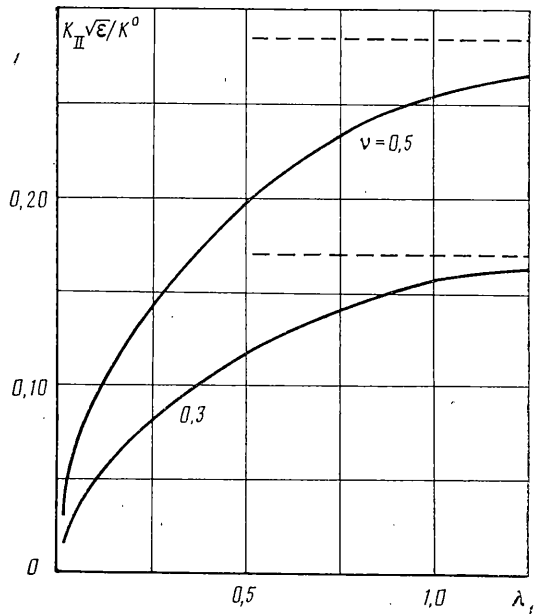
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

туров трещин близко к напряженно-деформированному состоянию в плоской задаче о двух полубесконечных трещинах отрыва (на одной прямой), для которой  $K_{II}=0$ , а  $K_I$  не зависит от  $\nu$ .

Приведенные численные и асимптотические решения для трещин рассматриваемого вида позволяют выделить следующие особенности этих



трещин, характерные, по-видимому, и для трещин по криволинейной поверхности общего вида:

Взаимодействие нормальной и сдвиговой мод и возникновение как следствие этого зон налегания поверхностей.

Существенная зависимость решения от величины коэффициента Пуассона среды.

Уменьшение дальности взаимодействия трещин с ростом кривизны их поверхностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зорин И. С., Назаров С. А. О напряженно-деформированном состоянии упругого пространства с тонким тороидальным включением // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 79–86.
2. Зорин И. С. Тонкая тороидальная полость в полубесконечном упругом теле // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ. 1986. Вып. 15. С. 32–39.
3. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 206 с.
4. Гольдштейн Р. В., Корельштейн Л. Б. Асимптотическое решение задач теории упругости о трещинах, вытянутых вдоль пространственной кривой // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 858–865.
5. Панасюк В. В., Саерук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
6. Kasano H., Matsumoto H., Nakahara I. A torsion-free axisymmetric problem of a cylindrical crack in a transversely isotropic body // Bull. JSME. 1984. V. 27. № 229. P. 1323–1332.
7. Erdogan F., Sih G. S. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // Trans. ASME. ser. D. J. Basic Eng. 1963. V. 85. № 4. P. 519–525.

Москва

Поступила в редакцию  
30.IX.1987