

УДК 539.376

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЖЕСТКОЙ УСИЛИВАЮЩЕЙ ВТУЛКИ С НЕОДНОРОДНОЙ СТАРЕЮЩЕЙ ТРУБОЙ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

МАНЖИРОВ А. В., ЧЕРНЫШ В. А.

Рассматривается задача, возникающая при расчете конструкций высокого давления, усиленных втулками. Условия работы таких конструкций (наличие агрессивной среды, требования безопасности конструкций при разрушении и т. д.) предполагают создание слоистых стенок, различные слои которых изготовлены из неодинаковых материалов, обладающих сложными свойствами. Дается постановка и строится решение задачи о взаимодействии изолированной жесткой втулки с двухслойной неоднородной стареющей трубой, находящейся под действием внутреннего давления. Проводится численный анализ ряда конкретных задач и обсуждаются качественные и количественные эффекты.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Исследуем контактное взаимодействие жесткой втулки с двухслойной вязкоупругой стареющей трубой высокого давления, слои которой изготовлены из разных материалов. Внутренний слой трубы внутреннего радиуса a , толщины H изготовлен в момент времени τ_1 , внешний слой толщины h — в момент τ_2 , причем h гораздо меньше характерного размера области контакта $2l$ и внешнего радиуса толстостенной трубы $b = a + H$. Между слоями осуществляется гладкий контакт. В момент времени t_0 на трубу насаживается без трения с натягом δ_0 жесткая втулка и подается внутреннее давление $P_0(t)$. Профиль внутренней поверхности втулки описывается функцией $g(z)$, а сама втулка находится на достаточном расстоянии от торцев трубы, чтобы можно было пренебречь их влиянием на напряженное состояние под ней. Торцы закрыты жесткими заглушками, устраняющими их осевое перемещение (фиг. 1). В цилиндрической системе координат имеем следующие уравнения состояния [1-3]:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(i)} &= E_i(t - \tau_i) [(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)]^{-1} (I + N_i) [(1 - \nu_i)\epsilon_r^{(i)} + \nu_i(\epsilon_\theta^{(i)} + \epsilon_z^{(i)})] \\ \sigma_\theta^{(i)} &= E_i(t - \tau_i) [(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)]^{-1} (I + N_i) [(1 - \nu_i)\epsilon_\theta^{(i)} + \nu_i(\epsilon_r^{(i)} + \epsilon_z^{(i)})] \\ \sigma_z^{(i)} &= E_i(t - \tau_i) [(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)]^{-1} (I + N_i) [(1 - \nu_i)\epsilon_z^{(i)} + \nu_i(\epsilon_r^{(i)} + \epsilon_\theta^{(i)})]\end{aligned}\quad (1.1)$$

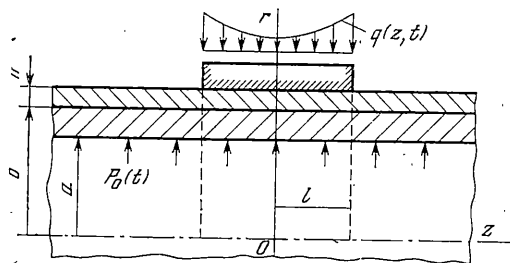
$$\tau_{rz}^{(i)} = E_i(t - \tau_i) (1 + \nu_i)^{-1} (I + N_i) \epsilon_{rz}^{(i)}$$

$$(I + N_i)^{-1} = (I - L_i)$$

$$(I + N_i) \omega(t) = \omega(t) + \int_{\tau_0}^t \omega(\tau) R_i(t - \tau_i, \tau - \tau_i) d\tau$$

$$(I - L_i) \frac{\omega(t)}{E_i(t - \tau_i)} = \frac{\omega(t)}{E_i(t - \tau_i)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\omega(\tau)}{E_i(\tau - \tau_i)} K_i(t - \tau_i, \tau - \tau_i) d\tau$$

$$K_i(t, \tau) = E_i(\tau) \partial [E_i^{-1}(\tau) + C_i(t, \tau)] / \partial \tau$$



Фиг. 1

где индексом $i=1, 2$ обозначены характеристики внутреннего и внешнего слоев трубы соответственно, $\sigma_r^{(i)} = \sigma_r^{(i)}(r, z, t)$ и т. д. — компоненты тензоров напряжений, $\varepsilon_r^{(i)} = \varepsilon_r^{(i)}(r, z, t)$ и т. д. — компоненты тензоров деформаций, $E_i(t - \tau_i)$ — упругомгновенные модули деформации, ν_i — постоянные коэффициенты Пуассона, $C_i(t, \tau)$ — меры ползучести, $K_i(t - \tau_i, \tau - \tau_i)$ — ядра ползучести, $R_i(t - \tau_i, \tau - \tau_i)$ — их резольвенты, r и z — радиальная и осевая координаты соответственно, t — текущий момент времени.

Кроме того, справедливы следующие уравнения равновесия и соотношения между деформациями и перемещениями ($u_i = u_i(r, z, t)$, $w_i = w_i(r, z, t)$ — радиальное и осевое перемещения соответственно):

$$\partial \sigma_r^{(i)} / \partial r + \partial \tau_{rz}^{(i)} / \partial z + (\sigma_r^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}) / r = 0$$

$$\partial \tau_{rz}^{(i)} / \partial r + \partial \sigma_z^{(i)} / \partial z + \tau_{rz}^{(i)} / r = 0 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_r^{(i)} = \partial u_i / \partial r, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = u_i / r \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_z^{(i)} = \partial w_i / \partial z, \quad \varepsilon_{rz}^{(i)} = 1/2 (\partial u_i / \partial z + \partial w_i / \partial r)$$

2. Вывод разрешающего уравнения. Для получения основного интегрального уравнения контактной задачи решим вспомогательную задачу, заменив жесткое кольцо некоторой распределенной нагрузкой $-q(z, t)$, действующей на участке $|z| \leq l$. Определим радиальное перемещение внешней поверхности двухслойной трубы, представив решение вспомогательной задачи как результат суперпозиции решений двух независимых.

1. О действии нагрузки на бесконечную двухслойную трубу при отсутствии внутреннего давления.

2. О плоской деформации двухслойной трубы, находящейся под равномерным внутренним давлением.

Решим задачу 1. К соотношениям (1.1)–(1.3) добавим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} r=b+h: \sigma_r^{(2)} &= -q(z, t) \quad (|z| \leq l), \quad \sigma_r^{(2)} = 0 \quad (|z| > l), \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0 \\ r=b: \sigma_r^{(1)} &= \sigma_r^{(2)}, \quad u_1 = u_2, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0 \\ r=a: \sigma_r^{(1)} &= 0, \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Воспользовавшись относительной малостью толщины верхнего слоя ($h \ll l$), разложим касательное напряжение $\tau_{rz}^{(2)}$ в ряд Тейлора и ограничимся только линейными членами [3] $\tau_{rz}^{(2)} = \omega^1(z, t) + (r-b)\omega^2(z, t)$.

Используя граничные условия (2.1), получим $\tau_{rz}^{(2)} = 0$. Из второго уравнения равновесия (1.2) будем иметь $\sigma_z^{(2)} = f(r, t)$. Так как $\sigma_z^{(2)} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то $\sigma_z^{(2)} = 0$. Тогда, используя соотношения (1.1) для $\sigma_z^{(2)}$, придем к выражению

$$\varepsilon_z^{(2)} = -\nu_2(1-\nu_2)^{-1}(\varepsilon_r^{(2)} + \varepsilon_\theta^{(2)}) \quad (2.2)$$

Первое уравнение равновесия (1.2) с учетом (1.1), (2.2) и $\tau_{rz}^{(2)} = 0$

принимает вид (штрих означает производную по r)

$$(\varepsilon_r^{(2)'} + \nu_2 \varepsilon_\theta^{(2)'}) (1 - \nu_2)^{-1} + (\varepsilon_r^{(2)} - \varepsilon_\theta^{(2)}) r^{-1} = 0$$

Откуда с учетом соотношения (1.3):

$$u_2(r, z, t) = r\Psi(z, t) + \Phi(z, t)/r \quad (2.3)$$

Сравнивая радиальные перемещения по поверхности сопряжения слоев (см. (2.1)), получим

$$\Phi(z, t) = u_1(b, z, t)b - \Psi(z, t)b^2 \quad (2.4)$$

Воспользовавшись первым граничным условием (2.1), с учетом соотношений (1.1) для $\sigma_r^{(2)}$ и равенством (2.2) будем иметь при $r = b + h$:

$$-q(z, t) = E_2(t - \tau_2)(1 - \nu_2^2)^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{N}_2)[\varepsilon_r^{(2)} + \nu_2 \varepsilon_\theta^{(2)}] \quad (2.5)$$

Подставляя (1.3), (2.3), (2.4) в (2.5), определим

$$\begin{aligned} \Psi(z, t) &= (\psi(b+h))^{-1}[(1 - \nu_2)u_1(b, z, t)b(b+h)^{-2} - \\ &\quad - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)(1 - \nu_2^2)q(z, t)E_2^{-1}(t - \tau_2)] \\ \psi(r) &= 1 + \nu_2 + (1 - \nu_2)b^2r^{-2} \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1.1), (2.2) — (2.4), пренебрегая слагаемыми порядка hb^{-1} , получим

$$\begin{aligned} u_2(r, z, t) &= -(1 - \nu_2^2)(r - b^2r^{-1})(\psi(b+h))^{-1} \times \\ &\times (\mathbf{I} - \mathbf{L}_2)q(z, t)E_2^{-1}(t - \tau_2) + [br^{-1} + (1 - \nu_2)b \times \\ &\times (b+h)^{-2}(\psi(b+h))^{-1}(r - b^2r^{-1})]u_1(b, z, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sigma_r^{(2)}(r, z, t) = -\psi(r)(\psi(b+h))^{-1}q(z, t) \quad (2.7)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния внутренней трубы воспользуемся представлением Галеркина [4] ($I_0(\alpha r)$, $I_1(\alpha r)$, $K_0(\alpha r)$, $K_1(\alpha r)$ — функции Бесселя мнимого аргумента):

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [A(\alpha, t)I_0(\alpha r) + B(\alpha, t)\alpha r I_1(\alpha r) + C(\alpha, t)K_0(\alpha r) + \\ &\quad + D(\alpha, t)\alpha r K_1(\alpha r)] e^{i\alpha z} d\alpha \end{aligned}$$

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_1 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_z^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu_1) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_1 \Delta \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad \tau_{rz}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu_1) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]$$

$$u_1 = -\frac{1 + \nu_1}{E_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad w_1 = \frac{1 + \nu_1}{E_1} \left[2(1 - \nu_1) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]$$

Тогда, удовлетворяя граничным условиям (2.1), с учетом (2.7) получим следующее выражение для радиальных перемещений толстостенной трубы при $r = b$:

$$u_1(b, z, t) = -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{\pi \psi(b+h)} (\mathbf{I} - \mathbf{L}_1) \int_{-1}^1 \frac{q(\xi, t)}{E_1(t - \tau_1)} k(\xi, z) d\xi$$

$$k(\xi, z) = \int_0^\infty \frac{L(\alpha)}{\alpha} \cos \alpha(z - \xi) d\alpha$$

$$L(\alpha) = \alpha(\alpha^2 a B_1^2 - a^0 D_1^2 - a^{-1}) S^{-1}(\alpha) \quad (2.8)$$

$$S(\alpha) = a^\circ b^{-1} + b^\circ a^{-1} + a^\circ b^\circ D_1^2 - b^\circ \alpha^2 a B_1^2 + \alpha^4 a b A_1^2 - a^\circ b \alpha^2 C_1^2$$

$$A_1(\alpha) = I_0(\alpha a) K_0(\alpha b) - I_0(\alpha b) K_0(\alpha a)$$

$$B_1(\alpha) = I_0(\alpha a) K_1(\alpha b) + I_1(\alpha b) K_0(\alpha a)$$

$$C_1(\alpha) = I_0(\alpha b) K_1(\alpha a) + I_1(\alpha a) K_0(\alpha b)$$

$$D_1(\alpha) = I_1(\alpha a) K_1(\alpha b) - I_1(\alpha b) K_1(\alpha a)$$

$$a^\circ = 2(1 - \nu_1) a^{-1} + \alpha^2, \quad b^\circ = 2(1 - \nu_1) b^{-1} + b \alpha^2$$

Таким образом, радиальное перемещение внешней поверхности двухслойной трубы в задаче 1 имеет вид (см. (2.6))

$$\begin{aligned} u_2(b+h, z, t) &= b(b+h)^{-1} [1 + (1 - \nu_2) v(b+h)^{-1} \times \\ &\times (\psi(b+h))^{-1}] u_1(b, z, t) - (1 - \nu_2^2) v(\psi(b+h))^{-1} \times \\ &\times (I - L_2) q(z, t) E_2^{-1}(t - \tau_2) \\ v &= b + h - b^2(b+h)^{-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Рассмотрим задачу 2. В этом случае в уравнениях равновесия (1.2) $\tau_{rz}^{(i)} = 0$, $\sigma_z^{(i)} = \nu_i(\sigma_r^{(i)} + \sigma_\theta^{(i)})$, а граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} r=b+h: \sigma_r^{(2)} &= 0 \\ r=b: \sigma_r^{(2)} &= \sigma_r^{(1)}, \quad u_1 = u_2 \\ r=a: \sigma_r^{(1)} &= -P_0(t) \end{aligned}$$

Не останавливаясь на решении подробно, выпишем окончательный результат для радиального перемещения точек внешней поверхности трубы

$$u_2(b+h, z, t) = (I - L_2)(I + N_3)\Theta_1(t)(I - L_1)P_0(t)E_1^{-1}(t - \tau_1) \quad (2.10)$$

$$\Theta_1(t) = a_1\Theta(t)$$

$$\Theta(t) = [a_2 E_2(t - \tau_2) E_1^{-1}(t - \tau_1) - a_3]^{-1}$$

$$a_1 = 2(1 - \nu_2)(b+h)^{-1} \{ (1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1)b - (1 + \nu_1)a^2 b^2 (b^2 - a^2)^{-1} [(1 - 2\nu_1)ba^{-2} + b^{-1}] \}$$

$$a_2 = (1 + \nu_2)^{-1} [(b+h)^{-2} - b^{-2}] (1 + \nu_1) a^2 b^2 (b^2 - a^2)^{-1} [(1 - 2\nu_1)ba^{-2} + b^{-1}]$$

$$a_3 = (1 - 2\nu_2)(b+h)^{-2} b + b^{-1}$$

$$(I + N_3)\omega(t) = \omega(t) + \int_{\tau_0}^t \omega(\tau) R_3(t, \tau) d\tau$$

где $R_3(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_3(t, \tau) = [a_2 K_1(t - \tau_1, \tau - \tau_1) E_2(\tau - \tau_2) \times \times E_1^{-1}(\tau - \tau_1) - a_3 K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2)] \Theta(t)$.

Таким образом, искомое перемещение в задаче о действии нормальной распределенной нагрузки $-q(z, t)$ на двухслойную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления $-P_0(t)$, отыскивается как результат суперпозиции решений (2.9) и (2.10).

Интегральное уравнение задачи для отыскания неизвестных контактных напряжений $q(z, t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} b_2(I - L_2)q(z, t)E_2^{-1}(t - \tau_2) + b_1\pi^{-1}(I - L_1) \int_{-1}^1 \frac{q(\xi, t)}{E_1(t - \tau_1)} k(\xi, z) d\xi = \\ = (I - L_2)(I + N_3)\Theta_1(t)(I - L_1)P_0(t)E_1^{-1}(t - \tau_1) + \delta_0 - g(z) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$b_1 = 4b(b+h)^{-1}(\psi(b+h))^{-1} [1 + (1 - \nu_2)v((b+h)\psi(b+h))^{-1}] (1 - \nu_1^2)$$

$$b_2 = (1 - \nu_2^2)v(\psi(b+h))^{-1}$$

3. Решение интегрального уравнения. Проведем замену переменных в уравнении (2.11) по формулам

$$\begin{aligned} z^* &= z l^{-1}, \quad \zeta^* = \zeta l^{-1}, \quad t^* = t \tau_0^{-1}, \quad \tau^* = \tau \tau_0^{-1} \\ \tau_1^* &= \tau_1 \tau_0^{-1}, \quad \tau_2^* = \tau_2 \tau_0^{-1}, \quad k^*(\zeta^*, z^*) = \pi^{-1} k(\zeta, z) \\ q^*(z^*, t^*) &= b_1 q(z, t) E_1^{-1}(t - \tau_1), \quad g^*(z^*) = g(z) l^{-1} \\ P_0^*(t) &= P_0(t) E_1^{-1}(t - \tau_1) b_1, \quad \Theta_1^*(t^*) = \Theta_1(t) l^{-1} b_1^{-1} \\ c^*(t) &= b_2 E_2^{-1}(t - \tau_2) E_1(t - \tau_1) b_1^{-1} l^{-1} \\ R_3^*(t^*, \tau^*) &= R_3(t, \tau) \tau_0, \quad \delta_0^* = \delta_0 l^{-1} \\ K_i^*(t^* - \tau_i^*, \tau^* - \tau_i^*) &= K_i(t - \tau_i, \tau - \tau_i) \tau_0 \quad (i=1, 2) \\ K_2^\circ(t^* - \tau_2^*, \tau^* - \tau_2^*) &= E_2(t - \tau_2) E_1(\tau - \tau_1) \times \\ &\times E_1^{-1}(t - \tau_1) E_2^{-1}(\tau - \tau_2) K_2(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0 \\ f^*(z^*, t^*) &= (I - L_2^{-1})(I + N_3^{-1}) \Theta_1^*(t^*) (I - L_1^{-1}) P_0^*(t^*) - g^*(z^*) + \delta_0^* \end{aligned}$$

и, опуская звездочки, запишем

$$(I - L_1^{-1}) A q(z, t) + c(t) (I - L_2^\circ) q(z, t) = f(z, t)$$

$$A q(z, t) = \int_{-1}^1 q(\zeta, t) k(\zeta, z) d\zeta \quad (3.1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k^2(\zeta, z) d\zeta dz < \infty$$

$$(I + N_3^{-1}) \omega(t) = \omega(t) + \int_1^t \omega(\tau) R_3(t, \tau) d\tau$$

$$(I - L_2^\circ) \omega(t) = \omega(t) - \int_1^t \omega(\tau) K_2^\circ(t - \tau_2, \tau - \tau_2) d\tau$$

$$(I - L_i^{-1}) \omega(t) = \omega(t) - \int_1^t \omega(\tau) K_i(t - \tau_i, \tau - \tau_i) d\tau \quad (i=1, 2)$$

где оператор A вполне непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный из $L_2[-1, 1]$ в $L_2[-1, 1]$, причем система его собственных функций $\varphi_j(z)$, соответствующих собственным числам α_j ($j=0, 1, 2, \dots$), составляет базис в $L_2[-1, 1]$, $c(t) > 0$ непрерывна по t , $f(z, t)$ непрерывна по t в $L_2[-1, 1]$.

Будем искать решение (3.1) в классе функций, непрерывных по t в $L_2[-1, 1]$, и представим его в виде [5, 6]:

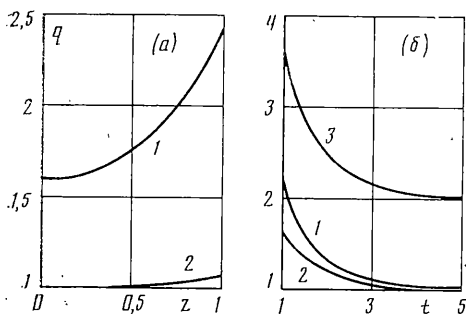
$$q(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(t) \varphi_i(z), \quad f(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t) \varphi_i(z) \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим

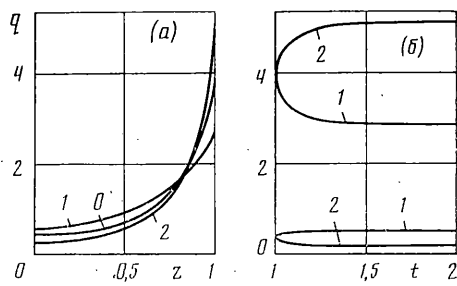
$$\omega_i(t) = \frac{f_i(t)}{c(t) + \alpha_i} + \int_1^t \frac{f_i(\tau)}{c(\tau) + \alpha_i} R^i(t, \tau) d\tau$$

где $R^i(t, \tau)$ — резольвента ядра

$$K^i(t, \tau) = [c(t) K_2^\circ(t - \tau_2, \tau - \tau_2) + \alpha_i K_1(t - \tau_1, \tau - \tau_1)] [c(t) + \alpha_i]^{-1}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Собственные функции $\varphi_i(z)$ можно найти, например, следующим образом. Представим собственные функции и ядро оператора A в виде $(P_k^*(z))$, $k=0, 1, 2, \dots$ — базис $L_2[-1, 1]$:

$$\varphi_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i P_k^*(z), \quad k(\xi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{mn} P_m^*(z) P_n^*(\xi)$$

Тогда спектральная задача приводит к решению системы алгебраических уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_{mn} a_n^i = \alpha_i a_m^i \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

Ограничиваясь N членами базиса $P_k^*(z)$, будем получать N -е приближение метода Бубнова — Галеркина [7].

Отметим, что если слои трубы изготовлены из одного и того же стареющего вязкоупругого материала в один и тот же момент времени, предварительный натяг втулки $\delta_0=0$ и профиль основания описывается функцией $g(z)=0$, то ползучесть не оказывает влияния на напряженное состояние конструкции и оно совпадает с упругим.

4. Примеры. Рассмотрим двухслойную трубу, внутренний слой которой изготовлен из упругого материала, а внешний — из вязкоупругого стареющего. Упругие характеристики обоих материалов E_i , $\nu_i (i=1, 2)$ постоянны. Мера ползучести материала внешнего слоя представим в виде [8]:

$$C_2(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\beta\tau}) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (4.1)$$

Зададимся значениями параметров для конструкции высокого давления, представляющей из себя стальную трубу, покрытую слоем бетона [6, 8] или полимера [9], тогда $E_2/E_1=0,025$, $\nu_1=0,3$, $\nu_2=0,4$, $C_0 E_2=0,5522$, $A_0 E_2=4$, $a/b=0,8$, $\tau_0=15$ сут., $\beta=0,031$ сут.⁻¹, $\gamma=0,06$ сут.⁻¹, $h/l=0,1$, $b/l=10$. Для оставшихся функций и параметров уравнения (3.1) в соответствии с заменой переменных (см. п. 3) возьмем $c(t)=2,17$, $\theta_1(t)=28,52$, $\tau_2=0$, $P_0(t)=1$, $g(z)=0$, $\delta_0=0$.

На фиг. 2, а показано распределение контактных давлений под втулкой в момент приложения внутреннего давления ($t=1$, кривая 1) и в момент времени $t=5$ (2). На фиг. 2, б представлены изменения максимальных (1) и минимальных (2) напряжений под втулкой, а также полной контактной нагрузки (интеграл от контактного давления по отрезку $[-1, 1]$) по времени (кривая 3). Видно, что с течением времени распределение напряжений существенно сглаживается, а сами напряжения сильно релаксируют.

Рассмотрим теперь двухслойную вязкоупругую неоднородную стареющую трубу, изготовленную из полимера или бетона. Неоднородность конструкции проявляется только за счет неодновременности изготовления слоев. Таким образом, $\nu_1=\nu_2=\nu$, $E_1(t-\tau_1)=E_2(t-\tau_2)=E$, $C_1(t, \tau)=C_2(t, \tau)=C(t, \tau)$, где мера ползучести $C(t, \tau)$ берется в виде (4.1).

Возьмем (значения γ и β прежние) $C_0 E=0,5522$, $A_0 E=4$, $\nu=0,1$, $h/l=0,3$, $b/l=10$, $P_0(t)=1$, $a/b=0,8$, $g(z)=0$, $\delta_0=0$, $c(t)=0,148$, $\theta_1(t)=14,2$.

Пусть внутренний слой изготовлен в момент нуля, а внешний — в момент 50 сут. Внутреннее давление прикладывается в момент 65 сут. Тогда для безразмерных величин $\tau_1=0$, $\tau_2=0,77$ (этому случаю на фиг. 3 соответствуют кривые 1).

Исследуем также вариант, когда момент приложения давления такой же, как и в первом случае, а моменты изготовления внешнего и внутреннего слоев 50 сут. и нуля соответственно, т. е. $\tau_2=0$, $\tau_1=0,77$ (кривые 2).

На фиг. 3, а показаны распределения контактных давлений под втулкой для двух рассматриваемых случаев в различные моменты времени. Кривая 0 описывает распределение в момент приложения внутреннего давления в обоих случаях, так как в этот момент они совпадают. Отметим также, что при одновременном изготовлении слоев трубы указанная кривая, согласно принципу соответствия, описывает распределение напряжений в любой момент времени.

Кривые 1 и 2 задают распределение контактных давлений для двух рассматриваемых вариантов в момент времени $t=2$.

На фиг. 3, б даны изменения максимальных (верхние кривые) и минимальных (нижние) контактных напряжений по времени для двух случаев. Видно, что в зависимости от характера возрастной неоднородности распределения напряжений претерпевают качественно различные изменения. Если возраст внешнего слоя меньше возраста внутреннего, напряженное состояние под втулкой с течением времени сглаживается, в противном случае его неравномерность усиливается. Релаксация напряжений в рассматриваемых примерах для трубы из полимера или бетона проявляется слабо, полная контактная нагрузка с достаточной для инженерных расчетов степенью точности может быть принята равной ее начальному значению. Основным здесь является эффект перераспределения контактных давлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 153—164.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука. 1983. 336 с.
3. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ. 1983. № 5. С. 153—158.
4. Шапиро Г. С. О сжатии бесконечного полого и кругового цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. № 5. С. 379—382.
5. Александров В. М., Манжиров А. В. О двумерных интегральных уравнениях в прикладной механике деформируемых твердых тел // ПМТФ. 1987. № 5. С. 146—152.
6. Манжиров А. В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1019—1025.
7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. 1970. 512 с.
8. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат. 1952. 324 с.
9. Struik L. C. E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier. 1978. 229 p.

Москва

Поступила в редакцию
1.VI.1987