

УДК 539.389

НАРАЩИВАНИЕ СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ ОБЪЕМНОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ

ДРОЗДОВ А. Д.

Рассматривается задача наращивания вязкоупругих тел, подверженных старению, в условиях объемного отверждения, возникающая при анализе полей напряжений и перемещений в растущих телах из композиционных материалов, когда в процессе изготовления к телам присоединяются элементы как матрицы, так и наполнителя, причем одновременно с наращиванием происходит затвердевание связующего. Численно и аналитически исследовано влияние скорости наращивания на напряжения в растущем теле. Напряженно-деформированное состояние в телах при фронтальном отверждении изучалось, например, в [1, 2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим в качестве примера представляющий интерес для приложений процесс намотки цилиндрической оболочки [3]. Пусть оправка представляет собой полый круговой цилиндр из изотропного упругого материала. До деформации внутренний радиус цилиндра равен a_0 , а внешний a_1 . В момент времени $t=0$ на внешней поверхности цилиндра начинается наращивание материала, внутренняя поверхность свободна от усилий. Торцы цилиндра закреплены относительно продольных смещений.

При осесимметричном непрерывном наращивании к цилиндру за время dt присоединяется цилиндрическая оболочка, толщина которой пропорциональна dt . Процесс наращивания осуществляется на отрезке времени $[0, T]$. Внешний радиус растущего цилиндра изменяется по закону $a = a(t)$, $a(T) = a_2$.

Присоединяемый материал представляет собой двухфазную сплошную среду, состоящую из вязкоупругой матрицы и вязкого наполнителя. Объемная концентрация наполнителя в момент присоединения элемента к растущему телу равна c_0 . После присоединения наращиваемого элемента в нем начинается процесс затвердевания (полимеризации) связующего. При этом часть вещества наполнителя переходит из жидкого в твердое агрегатное состояние.

Требуется по заданным законам наращивания и затвердевания определить напряженно-деформированное состояние в растущем цилиндре. Задача исследуется в квазистатической постановке при малых деформациях.

2. Уравнения состояния. Для упрощения анализа будем пренебрегать фильтрацией наполнителя через матрицу. При этом поля перемещений в твердой и жидкой фазах совпадают.

Введем цилиндрическую систему координат (r, ϑ, z) , ось z которой совпадает с осью цилиндра. Под действием внешней нагрузки в цилиндре реализуется плоская осесимметричная деформация. Вектор перемещения имеет вид $u(t, r)e_r$, где e_r, e_ϑ, e_z — единичные векторы цилиндрической системы координат, а $u(t, r)$ — подлежащая определению функция.

Предположим, что вещества матрицы и наполнителя являются несжимаемыми, причем усадкой наполнителя в процессе отверждения можно пренебречь. Из условия несжимаемости $\varepsilon = u' + ur^{-1} = 0$ найдем

$$u = Dr^{-1} \quad (2.1)$$

Здесь $D = D(t)$ — подлежащая определению функция времени, ε — ша-

ровая составляющая тензора деформаций, $u' = \partial u / \partial r$. Согласно (2.1) ненулевые компоненты девиатора тензора деформаций e_{ij} равны

$$e_{11} = -Dr^{-2}, \quad e_{22} = D \quad (2.2)$$

Обозначим через σ_{ij} компоненты тензора напряжений, а через σ и s_{ij} — шаровую составляющую и компоненты девиатора этого тензора. Следуя основным положениям механики пористых сред [4], положим

$$\sigma = -3p, \quad s_{ij} = (1 - c_0) s_{mij} + c_0 s_{nij} \quad (2.3)$$

Здесь $p = p(t, r)$ — давление, s_{mij}, s_{nij} — компоненты девиатора тензора напряжений в матрице и в отвердевшей части наполнителя.

Обозначим через $u^*(r)e_r$ вектор перемещения точек твердой фазы композита при переходе из начального в естественное состояние, а через ε^*, e_{ij}^* — шаровую составляющую и компоненты девиатора тензора деформаций при этом преобразовании [5]. Пусть при переходе из начального в естественное состояние реализуется плоская осесимметричная деформация без изменения объема. Тогда величины u^* и e_{ij}^* определяются по формулам (2.1) и (2.2), в которых функцию $D(t)$ следует заменить на $D^* = D^*(r)$. Величина D^* характеризует деформацию натяга при наращивании.

Примем следующие уравнения состояния матрицы композита

$$s_{mij} = 2G_m(I - Q_m)(e_{ij} - e_{ij}^*) \quad (2.4)$$

Здесь $G_m = G_m(t - \tau^*)$ — модуль сдвига, I — единичный оператор, Q_m — оператор релаксации с ядром $Q_m^\circ(t, \tau)$. Для любой функции $e(t, r)$ имеем

$$Ie = e(t, r), \quad Q_m e = \int_{\tau^*(r)}^t Q_m^\circ(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) e(\tau, r) d\tau$$

Величина $\tau^* = \tau^*(r)$ определяет момент зарождения элемента матрицы в окрестности точки с полярным радиусом r и совпадает с моментом присоединения этого элемента к растущему цилиндру. Функция $t = \tau^*(r)$ является обратной к функции $r = a(t)$. Параметры $G_m(t)$ и $Q_m^\circ(t, \tau)$ характеризуют сплошной (без пор) материал матрицы.

Обозначим через $\eta = \eta(t, r)$ степень полимеризации наполнителя, равную удельному объему вещества наполнителя в точке с радиусом r , перешедшего к моменту времени t из жидкого в твердое агрегатное состояние. При постоянной температуре функция η удовлетворяет кинетическому уравнению [6, 7] ($\eta' = \partial \eta / \partial t$);

$$\eta' = f(t - \tau^*(r), \eta), \quad \eta(\tau^*(r), r) = 0 \quad (2.5)$$

После присоединения элемента к растущему цилиндру за время dt его относительный объем, равный ηdt , переходит из жидкого в твердое состояние. Считаем, что для наполнителя в твердой фазе естественное состояние совпадает с тем актуальным состоянием, в котором находился элемент наполнителя в момент затвердевания. Примем следующие уравнения состояния наполнителя в твердой фазе [8]

$$s_{nij} = 2 \int_{\tau^*(r)}^t G_n(I - Q_n)(e_{ij} - e_{ij}(\tau, r)) \eta'(\tau, r) d\tau \quad (2.6)$$

Здесь $G_n = G_n(t - \tau)$ — модуль сдвига, Q_n — оператор релаксации с ядром $Q_n^\circ(t, \tau)$. Для любой функции $e(t, r)$ имеем

$$Q_n e = \int_{\tau}^t Q_n^\circ(t - \tau, \xi - \tau) e(\xi, r) d\xi$$

Величины $G_n(t)$ и $Q_n^\circ(t, \tau)$ характеризуют сплошной (без матрицы) материал наполнителя в твердой фазе.

Подставляя выражения (2.4) и (2.6) в соотношения (2.3), получим уравнения состояния растущего вязкоупругого тела в условиях объемного отверждения

$$\begin{aligned} \sigma = & -3p(t, r), \quad s_{ij} = 2(1 - c_0(r)) G_m(t - \tau^*(r)) \left[(e_{ij}(t, r) - e_{ij}^*(r)) - \right. \\ & \left. - \int_{\tau^*(r)}^t Q_m^\circ(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (e_{ij}(\tau, r) - e_{ij}^*(r)) d\tau \right] + \\ & + 2c_0(r) \int_{\tau^*(r)}^t G_n(t - \xi) \left[(e_{ij}(t, r) - e_{ij}(\xi, r)) - \right. \\ & \left. - \int_{\xi}^t Q_n^\circ(t - \xi, \tau - \xi) (e_{ij}(\tau, r) - e_{ij}(\xi, r)) d\tau \right] \eta'(\xi, r) d\xi \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Основные соотношения. Подставим выражения (2.2) в (2.7) и найдем ненулевые физические компоненты тензора напряжений

$$\sigma_r = -p - 2\Gamma r^{-2}, \quad \sigma_\theta = -p + 2\Gamma r^{-2}, \quad \sigma_z = -p \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Gamma = & (1 - c_0(r)) G_m(t - \tau^*(r)) \left[(D(t) - D^*(r)) - \right. \\ & \left. - \int_{\tau^*(r)}^t Q_m^\circ(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (D(\tau) - D^*(r)) d\tau \right] + \\ & + c_0(r) \int_{\tau^*(r)}^t G_n(t - \xi) \left[D(t) - D(\xi) - \right. \\ & \left. - \int_{\xi}^t Q_n^\circ(t - \xi, \tau - \xi) (D(\tau) - D(\xi)) d\tau \right] \eta'(\xi, r) d\xi \end{aligned}$$

Проинтегрируем по r в пределах от a_1 до $a(t)$ уравнение равновесия элемента тела

$$\sigma_r' + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (3.2)$$

Учитывая (3.1) и граничное условие $\sigma_r(t, a(t)) = 0$, получим

$$\sigma_r(t, a_1) = -4 \int_{a_1}^{a(t)} \Gamma(t, r) r^{-3} dr \quad (3.3)$$

При заданных функциях $\sigma_r(t, a_1)$, $D^*(r)$ и $\eta(t, r)$ соотношение (3.3) представляет собой интегральное уравнение для определения функции $D(t)$.

4. Учет влияния оправки. Для определения функции $\sigma_r(t, a_1)$ рассмотрим равновесие цилиндра ($a_0 \leq r \leq a_1$). Для простоты считаем его материал несжимаемым с модулем сдвига G_0 . При этом перемещения точек оправки и ненулевые компоненты дивергента тензора деформаций имеют вид (2.1), (2.2), а ненулевые физические компоненты тензора напряжений определяются по формулам (3.1), в которых следует положить $\Gamma = G_0 D(t)$. Проинтегрируем равенство (3.2) по r в пределах от a_0 до a_1 . Учитывая (3.1) и граничное условие $\sigma_r(t, a_0) = 0$, найдем

$$\sigma_r(t, a_1) = 2G_0 D(t) (a_0^{-2} - a_1^{-2}) \quad (4.1)$$

5. Определение деформации натяга. При непрерывном наращивании на интервале времени $[\tau^*, \tau^* + dt]$ к цилиндру присоединяется оболочка

($a(\tau^*) \leq r \leq a(\tau^*) + da$). Процесс присоединения можно условно разбить на три стадии. Сначала оболочка мгновенно раздувается внутренним давлением так, чтобы ее внутренний радиус совпал с внешним радиусом растущего цилиндра в актуальном состоянии. Затем имеющиеся в ней поры заполняются жидким связующим. Наконец, оболочка «одевается» на растущий цилиндр. В приложениях характеристикой натяга выступает окружное усиление σ_ϕ^* , возникающее в оболочке после ее раздувания [9]. Выразим величину D^* через этот параметр.

Физические компоненты тензора напряжений в наращиваемом элементе определяются по формулам (3.1), в которых следует опустить все интегральные члены при $t = \tau^*$. Согласно (3.1) имеем

$$\sigma_\phi^* = \sigma_r + 4(1 - c_0(r))G_m(0)[D(\tau^*(r)) - D^*(r)]r^{-2} \quad (5.1)$$

Из (5.1) и соотношений $\sigma_r(\tau^*, a(\tau^*)) \ll \sigma_\phi^*$, $\sigma_r(\tau^*, a(\tau^*) + da) = 0$ следует, что можно приближенно положить

$$D^*(r) = D(\tau^*(r)) - \sigma_\phi^*(r)r^2[4G_m(0)(1 - c_0(r))]^{-1} \quad (5.2)$$

При переходе к пределу при $dt \rightarrow 0$ равенство (5.2) становится точным.

6. Определяющее уравнение. Подставим выражения (4.1) и (5.2) в соотношение (3.3). Учитывая (3.1), получим уравнение Вольтерра первого рода для определения функции $D(t)$

$$H(t)D(t) - \int_0^t H_0(t, \tau)D(\tau)d\tau = F(t) \quad (6.1)$$

Входящая в это соотношение функция $H(t)$ равна

$$H(t) = \int_0^t \left[(1 - c_0(a(\xi)))G_m(t - \xi) + c_0(a(\xi)) \int_\xi^t G_n(t - \tau)\eta^*(\tau, a(\xi))d\tau \right] \times \\ \times a^{-3}(\xi)a'(\xi)d\xi + \frac{1}{2}G_0(a_0^{-2} - a_1^{-2})$$

Ядро интегрального оператора определяется по формуле

$$H_0(t, \tau) = (1 - c_0(a(\tau)))G_m(t - \tau)a^{-3}(\tau)a'(\tau) \left[1 - \int_0^{t-\tau} Q_m^\circ(t - \tau, \xi)d\xi \right] + \\ + \int_0^\tau \left\{ (1 - c_0(a(\xi)))G_m(t - \xi)Q_m^\circ(t - \xi, \tau - \xi) + \right. \\ \left. + c_0(a(\xi)) \left[G_n(t - \tau)\eta^*(\tau, a(\xi)) \left(1 - \int_0^{t-\tau} Q_n^\circ(t - \tau, \xi)d\xi \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_\xi^\tau G_n(t - \tau_1)Q_n^\circ(t - \tau_1, \tau - \tau_1)\eta^*(\tau_1, a(\xi))d\tau_1 \right] \right\} a^{-3}(\xi)a'(\xi)d\xi$$

Правая часть уравнения (6.1) имеет вид

$$F(t) = -\frac{1}{4G_m(0)} \int_0^t G_m(t - \xi)\sigma_\phi^*(a(\xi)) \left[1 - \int_0^{t-\xi} Q_m^\circ(t - \xi, \tau)d\tau \right] a^{-1}(\xi)a'(\xi)d\xi$$

После того, как функция $D(t)$ найдена, напряжения и перемещения в растущем цилиндре определяются по формулам (3.1) и (2.1).

Простейший способ учета кинетики затвердевания состоит в описании степени полимеризации η дифференциальным уравнением первого по-

рядка

$$\dot{\eta} = b(1-\eta), \quad \eta(\tau^*(r), r) = 0 \quad (6.2)$$

Входящий в это соотношение параметр b характеризует скорость затвердевания. Другие подходы к определению величины η приведены в [10, 11].

Предположим, что материалы матрицы и наполнителя являются упругими ($Q_m^\circ(t, \tau) = Q_n^\circ(t, \tau) = 0$) с постоянными модулями сдвига ($G_m(t) = G_m$, $G_n(t) = G_n$), а начальная концентрация наполнителя постоянна ($c_0(r) = c_0$). Продифференцируем равенство (6.1) по времени. Имеем

$$D' = -\frac{1}{2} \sigma_0^*(a(t)) a^{-1}(t) a'(t) \left\{ G_0 (a_0^{-2} - a_1^{-2}) + \right. \\ \left. + 2 \int_0^t [(1-c_0) G_m + c_0 G_n \eta(t, a(\xi))] a^{-3}(\xi) a'(\xi) d\xi \right\}^{-1}, \quad D(0) = 0$$

Из этого соотношения и (6.2) получим

$$D(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_0^*(a(\xi)) \left\{ G_0 (a_0^{-2} - a_1^{-2}) + \right. \\ \left. + 2 \int_0^\xi [(1-c_0) G_m + c_0 (1 - \exp(-b(\xi-\tau))) G_n] a^{-3}(\tau) a'(\tau) d\tau \right\}^{-1} a^{-1}(\xi) a'(\xi) d\xi$$

Подставим найденное выражение в (4.1) и определим давление q , действующее на оправку со стороны растущего цилиндра

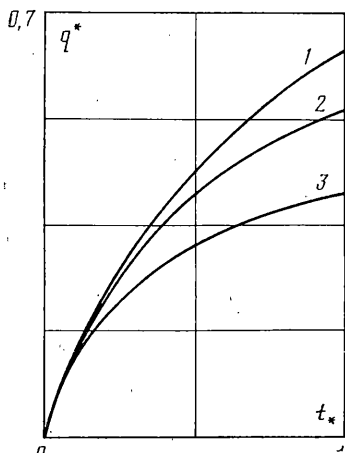
$$q(t) = \int_0^t \sigma_0^*(a(\xi)) \left\{ 1 + \frac{2}{a_0^{-2} - a_1^{-2}} \int_0^\xi [(1-c_0) \frac{G_m}{G_0} + \right. \\ \left. + c_0 (1 - \exp(-b(\xi-\tau))) \frac{G_n}{G_0}] \frac{a'(\tau)}{a^3(\tau)} d\tau \right\}^{-1} \frac{a'(\xi)}{a(\xi)} d\xi$$

7. Численный пример. Для исследования влияния скорости затвердевания связующего и начальной концентрации наполнителя вычислим безразмерное давление на оправку при постоянном окружном усилии $\sigma_0^* = \text{const}$ и постоянной скорости наращивания материала $v = 2\pi a(t) a'(t) l = \text{const}$ (l — длина растущего цилиндра). Введем безразмерные параметры $t_* = t/T$, $q_* = q/\sigma_0^*$, $b_* = bT$. Численный анализ проведем при следующих значениях параметров: $a_0 = 0,9a_1$, $a_2 = 2,0a_1$, $G_m = 0,2G_0$, $G_n = 0,7G_0$. Графики зависимости $q_* = q_*(t_*)$ представлены на фиг. 1, 2.

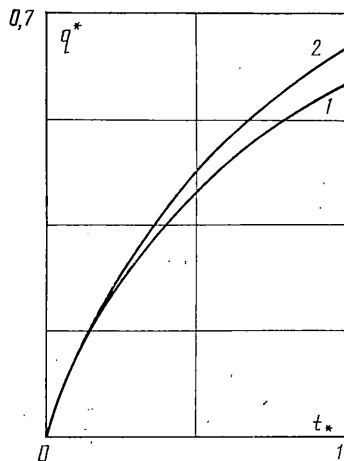
На фиг. 1 представлены графики зависимости $q_* = q_*(t_*)$ при $c_0 = 0,8$. Кривая 1 соответствует значению $b_* = 0,1$, кривая 2 — значению $b_* = 1,0$, а кривая 3 — значению $b_* = 10,0$. Результаты расчетов показывают, что при уменьшении скорости затвердевания давление на оправку возрастает. В момент окончания наращивания $t_* = 1$ безразмерное значение давления составляет 0,40 при $b_* = 10,0$ и 0,64 при $b_* = 0,1$. Увеличение давления составляет 60%.

На фиг. 2 представлены графики зависимости $q_* = q_*(t_*)$ при $b_* = 0,1$. Кривая 1 соответствует значению $c_0 = 0,5$, а кривая 2 — значению $c_0 = 0,8$. Результаты расчетов показывают, что увеличение концентрации наполнителя приводит к увеличению давления на оправку. В момент окончания наращивания значение q_* составляет 0,58 при $c_0 = 0,5$ и 0,64 при $c_0 = 0,8$. Увеличение безразмерного давления составляет 10%.

При увеличении скорости затвердевания характер зависимости давления на оправку от концентрации наполнителя изменяется. При $b_* = 10,0$ в момент времени $t_* = 1$ значение q_* составляет 0,43 при $c_0 = 0,5$ и 0,40 при $c_0 = 0,8$. Таким образом, увеличение концентрации связующего приводит к



Фиг. 1



Фиг. 2

возрастанию давления на оправку при малых скоростях затвердевания и приводит к убыванию давления при больших скоростях полимеризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турусов Р. А., Давтян С. П., Шкадинский К. Г., Розенберг Б. А., Андреевская Г. Д., Ениколопян Н. С. Механические явления в условиях распространения фронта отверждения // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 1. С. 97–99.
2. Турусов Р. А., Метлов В. В. Формирование напряжений при фронтальном отверждении композитов // Механика композитных материалов. 1985. № 6. С. 1079–1085.
3. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
4. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
5. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д. Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 4. С. 821–825.
6. Эмануэль Н. М., Кнорре Д. Г. Курс химической кинетики. М.: Высш. шк., 1969. 431 с.
7. Берлин А. А., Вольфсон С. А. Кинетический метод в синтезе полимеров. М.: Химия, 1973. 341 с.
8. Быковцев Г. И., Чирко М. С. О напряженном состоянии в полимеризующихся средах // Инж. ж. МГТ. 1968. № 5. С. 91–93.
9. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
10. Болотина К. С., Мурашов В. А., Тарасов В. Г. О кинетике отверждения полимерных связующих // Механика композитных материалов. 1980. № 4. С. 749–752.
11. Томашевский В. Т. Оптимизация технологических процессов создания конструкций из композиционных материалов // Научные основы прогрессивной техники и технологии. М.: Машиностроение, 1986. С. 73–87.

Москва

Поступила в редакцию
18.V.1987