

УДК 624.07:534.1

ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ БАЛОК,
СОВЕРШАЮЩИХ ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ
И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ

БРОВМАН М. Я., ВОЛКОВ И. Б., БЕЛКИН Л. М.

В [1, 2] показано, что упругопластическая деформация изгиба подвижных балок существенно отличается от деформации неподвижных балок. Движение балки вдоль оси и ее вращение качественно изменяют процесс деформации. Для практических задач представляет интерес случай, когда балка цилиндрической формы совершает одновременно и поступательное движение вдоль своей оси, и вращение вокруг этой же оси. Такая схема деформации применяется при правке труб на ролико-правильных машинах, поэтому изучение деформации трубы важно для настройки роликов этих машин и выбора их скоростных режимов.

В данной работе рассмотрен изгиб трубы круглого сечения на двух опорах, нагруженной усилием в середине пролета. Труба совершает при этом поступательное движение вдоль оси и вращение вокруг этой оси. Материал трубы считается идеально пластическим, упрочнение и эффект Баушингера не учитываются.

Круглая балка радиусом r с толщиной стенки h движется со скоростью v , вращается с угловой скоростью ω и нагружена в сечении $x=l/2$ силой P . При этом вблизи левой опоры имеет место зона упругой деформации, где напряжение равно $\sigma = Ew''r \sin \varphi$, где E — модуль упругости материала балки; φ — угол наклона произвольного сечения трубы к оси y ; $w(x)$ — прогиб трубы в направлении оси z ; штрихами обозначаются производные по x . Изгибающий момент равен $M_y = \pi Ew''r^3h = 1/2 Px$.

Вводя безразмерные параметры $a = \sigma_s l / Er$, $m = Pl / (4\pi \sigma_s r^2 h)$, получим уравнение изгиба

$$w'' = 2amx/l^2, \quad 0 \leq x \leq x_1 = l/(2m)$$

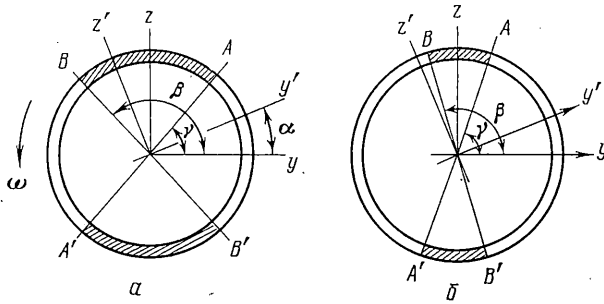
Видно, что w'' возрастает с увеличением x , и если существует сечение с координатой $x_1 \leq l/2$, в котором $\sigma = \sigma_s$ при $\varphi = \pi/2$, то имеет место пластическая деформация. При $x > x_1$ в зоне упругопластической деформации поступательное движение и вращение трубы оказывает существенное влияние на процесс деформации. Пластическая деформация начинается в точке A (фиг. 1, a) с угловой координатой γ , а в точке B с координатой β происходит разгрузка (аналогично в точках A' и B'). Из гипотезы плоских сечений следует, что $\varepsilon = w''r \sin(\varphi - \alpha)$, где α — угол, определяющий положение нейтральной оси, которая необязательно совпадает с осью y . Прогиб данного сечения направлен вдоль оси z' . В сечении, где начинается разгрузка, имеем (точками обозначаются производные по времени):

$$\varepsilon = w'''rx \sin(\varphi - \alpha) + w''r \cos(\varphi - \alpha) (\varphi' - x' \alpha') = 0$$

Учитывая, что $x' = v$, $\varphi' = \omega$, определяем угол $\beta = \alpha + \arctg[(\alpha' - \omega/v)w''/w''']$. Здесь $\alpha = 0$ при $\omega = 0$; $v \neq 0$ и $\alpha = \beta - \pi/2$ при $\omega \neq 0$, $v = 0$. В сечении имеется четыре зоны: в двух зонах пластической деформации (на фиг. 1 заштрихованы) $\sigma = \pm \sigma_s$, а в двух зонах разгрузки

$$\sigma = \sigma_s - Ew''r [\sin(\beta - \alpha) - \sin(\varphi - \alpha)], \quad \beta \leq \varphi \leq \pi + \gamma$$

$$\sigma = -\sigma_s + Ew''r [\sin(\beta - \alpha) + \sin(\varphi - \alpha)], \quad \pi + \beta \leq \varphi \leq 2\pi + \gamma$$



Фиг. 1

Условия непрерывности напряжений в точках A и A' определяют угол

$$\gamma = \beta - 2 \arccos \mu, \quad \mu = a / (w'' l \cos \alpha) \quad (1)$$

Условие равновесия $M_z(x) = 0$ (пластические зоны AB и $A'B'$ должны быть симметричными относительно оси z) определяет соотношение между углами γ и β : $\beta + \gamma = \pi$. Второе уравнение равновесия имеет вид

$$M_y(x) = \int_0^{2\pi} \sigma r^2 h \sin \varphi d\varphi = \int_{\gamma}^{\beta} \sigma_s r^2 h \sin \varphi d\varphi + \int_{\beta}^{\pi+\gamma} \{ \sigma_s - E w'' r [\sin(\beta - \alpha) - \sin(\varphi - \alpha)] \} r^2 h \sin \varphi d\varphi - \int_{\pi+\gamma}^{\pi+\beta} \sigma_s r^2 h \sin \varphi d\varphi + \int_{\pi+\beta}^{2\pi+\gamma} \{ -\sigma_s + E w'' r [\sin(\beta - \alpha) + \sin(\varphi - \alpha)] \} r^2 h \sin \varphi d\varphi$$

Отсюда

$$M_y(x) = \frac{1}{2} P x = \sigma_s r^2 h \{ 4 \cos \gamma + [\pi + \gamma - \beta + \sin(\gamma - \beta)] [\cos(\beta - \gamma) / 2]^{-1} \}$$

Из приведенных выше соотношений между углами γ и β следует $\gamma = \pi/2 - \arccos \mu$, $\beta = \pi/2 + \arccos \mu$, и тогда получаем уравнение изгиба

$$2mx/l = f(\alpha, w''), \quad x_1 \leq x \leq l/2 \quad (2)$$

$$f(\alpha, w'') = (\pi\mu)^{-1} [2\mu(1-\mu^2)^{1/2} + \pi - 2 \arccos \mu] \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) совместно с уравнением

$$\pi/2 + \arccos \mu = \alpha + \arctg[(\alpha' - \omega/v)w''/w'''] \quad (4)$$

составляют систему для определения трех неизвестных функций: $w(x)$, $\alpha(x)$, $f(\alpha, w'')$.

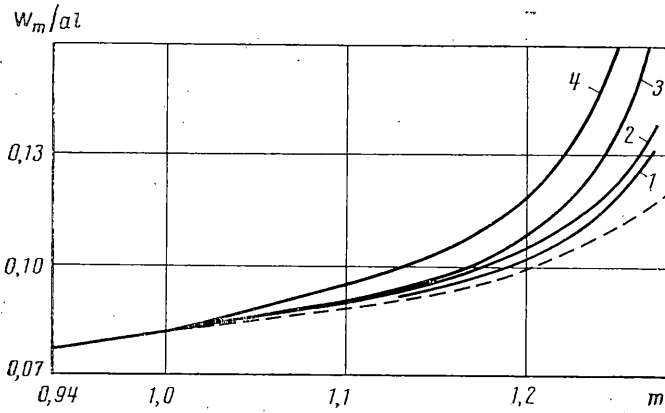
Расположение зон пластической деформации справа от точки приложения силы, т. е. при $l/2 < x \leq l - x_1$, изображено на фиг. 1, б. Система уравнений для определения неизвестных функций $w(x)$ и $\alpha(x)$ в этом случае состоит из уравнений (3), (4) и уравнения $2m(1-x/l) = f(\alpha, w'')$. Вблизи опоры B имеется зона, где всюду $\sigma < \sigma_s$, и пластическая деформация не развивается. Здесь $w'' = 2am(l-x)/l^2$.

Одновременное вращение и поступательное движение балки вносит новые особенности, в частности процесс деформации описывается дифференциальным уравнением третьего порядка, а не второго, как для неподвижных балок, либо совершающих только поступательное или только вращательное движение [4, 2].

Введем переменную $u = \ln(w''l)$ и координату $x^* = x/l$, тогда $du/dx^* = w'''/w''$. Обозначив $c = \omega l/v$, $\varphi_0 = \arccos \mu = \arccos[a/(e^u \cos \alpha)]$, получим систему дифференциальных уравнений для упругопластической зоны (здесь штрихи означают производные по x^*):

$$2mx^* = (\sin 2\varphi_0 + \pi - 2\varphi_0) / (\pi \cos \varphi_0)$$

$$u' = (\alpha' - c) \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_0)$$



Фиг. 2

решение которой относительно производных u' и α' имеет вид

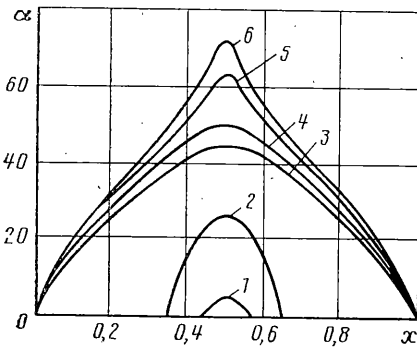
$$\alpha' = [1 + Ac \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_0)] \{A [\operatorname{tg}(\alpha - \varphi_0) - \operatorname{tg} \alpha]\}^{-1}$$

$$u' = (1 + Ac \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_0) \{A [\operatorname{tg}(\alpha - \varphi_0) - \operatorname{tg} \alpha]\}^{-1}$$

$$A = (\pi - \sin 2\varphi_0 - 2\varphi_0) (2\pi m \cos \varphi_0)^{-1}$$

Полученные дифференциальные уравнения решались численно методом Рунге — Кутты. Значения параметра φ_0 определялись в зависимости от x^* . Получена зависимость максимальных значений прогиба балки w_m

от параметров m и c (фиг. 2). Кривая 1 ($c=0$) соответствует поступательному движению балки без вращения, а кривая 4 ($c \rightarrow \infty$) — вращению при скорости поступательного движения, равной нулю. Эти кривые согласуются с данными работ [1, 2]. Штриховой линией показан прогиб неподвижной балки. Кривые 2 и 3 соответствуют значениям $c=100$ и 600 . Видно, что поступательное движение снижает «жесткость» балки, а вращение в еще большей степени увеличивает прогиб, что надо учитывать при расчетах трубоправильных машин. Зависимость $w_m(m)$ можно описать формулой $w_m = al(m_* - m_0)^{\psi} \times$



Фиг. 3

$\times (m_* - m)^{-\psi/12}$, где m_0 — предельный момент при упругой деформации, а m_* — предельный момент, соответствующий потере несущей способности, равный для трубы $m_* = 4m_0/\pi = 1,273m_0$.

Величина ψ является функцией параметра c , некоторые значения которой приведены ниже:

c	0	100	600	∞
ψ	0,136	0,155	0,190	0,273

Результаты расчетов свидетельствуют также, что при малых значениях параметра c , когда труба вращается относительно медленно, поворота оси нейтрального сечения не наблюдается. С увеличением c параметр α_m возрастает тем больше, чем больше m ; и при $m \rightarrow 4/\pi$ $\alpha_m \rightarrow \pi/2$. На фиг. 3 показаны графики величины угла поворота нейтрального сечения α . Здесь кривые 1—6 соответствуют значениям параметра c : 25, 50, 100, 150, 600 и 1600. Видно, что при $c > 65$ α является положительной величиной всюду в упругопластической зоне. Неравенство $\alpha > 0$ имеет место при $20 \leq c \leq 65$ только на части длины упругопластической зоны, и $\alpha = 0$ при $c < 20$, при этом влиянием вращения трубы можно пренебречь.

Таким образом, деформация изгиба балок, совершающих поступательное и вращательное движения, существенно отличается от деформации балок, совершающих только поступательное или только вращательное движения. Асимметрия процесса деформации зависит от нагрузки и от параметра c , характеризующего соотношение скоростей вращения и поступательного движения. Изменение прогиба описывается дифференциальным уравнением не второго, а третьего порядка, при этом максимальный прогиб возрастает с увеличением относительной скорости вращения, которое существенно уменьшает жесткость балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бровман М. Я. Об упругопластическом изгибе балок в процессе движения // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 155–160.
2. Бровман М. Я. О влиянии вращения круглых балок на процесс их упругопластической деформации при изгибе // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 167–173.

Краматорск

Поступила в редакцию
8.XII.1986