МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1988

УДК 539.375

# ПЛОСКАЯ ТРЕЩИНА НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА, БЕРЕГА КОТОРОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮТ ПО ЛИНЕЙНОМУ ЗАКОНУ

ШИФРИН Е. И.

Рассматривается задача о плоской трещине нормального разрыва в безграничной среде. Предполагается, что между поверхностями трещины имеются связи, вследствие чего усилия, действующие на поверхности трещины, зависят от скачков смещений. Исследуется случай линейных связей (линейной зависимости). Построены численные решения задачи о прямоугольной трещине для различных отношений сторон прямоугольника и значений параметра, определяющего линейные связи. Получены асимптотические решения задачи в случаях, когда указанный параметр мал или велик. Эти результаты позволили установить, что с увеличением жесткости связей происходит выравнивание коэффициентов интенсивности напряжений вдоль контура трещины. Доказано также, что при стремлении радиуса круговой трещины к бесконечности и фиксированной жесткости связей коэффициенты интенсивности напряжений не возрастают безгранично, как это имеет место в случае отсутствия связей, а стремятся к некоторому пределу.

**1. Численное решение задачи о прямоугольной трещине.** Граничные уравнения, отвечающие задаче о трещине, на поверхности которой действуют усилия, произвольным образом зависящие от скачков нормальных смещений, были получены в [1]. Однако ни для какого вида зависимости эти уравнения не были изучены и решены. В [2] для случая линейных связей исследованы качественные свойства решений и построены численные решения задачи о круговой трещине. Примененный способ построения численного решения существенно опирался на особенности, связанные с круговой формой трещины. Здесь для решения используется метод, предложенный в [3], который может быть применен к задачам о трещинах произвольной формы.

Напомним, что в случае линейных связей уравнение относительно нормального перемещения поверхности трещины имеет вид [2]:

$$p_G Au = p_G \Lambda u + ku = \gamma p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad \gamma = 2(1-\nu^2)/E \tag{1.1}$$
$$u(\mathbf{x}) \in H_{1/2}{}^0(G),\ p(\mathbf{x}) \in H_{-1/2}(G),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

Здесь $E$, $\nu$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, $k>0$ — размерный параметр, характеризующий жесткость связей, $\Lambda$ — псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|$, $\sigma_{33}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})$ — напряжения, прикладываемые к поверхностям трещины, $u(\mathbf{x})$ — нормальное перемещение поверхности трещины, $p_G$ — сужение на область трещины $G$.

Оператор, стоящий в левой части уравнения (1.1), удовлетворяет всем требованиям, необходимым для применения численного метода [3]: изоморфно отображает сепарабельное гильбертово пространство $H_{1/2}{}^0(G)$ на сопряженное пространство $H_{-1/2}(G)$, является симметричным и положительно-определенным. Если описывающая прикладываемые усилия функция $p(\mathbf{x})$ лежит в $L_2(G)$, то аналогично [3] показывается, что для решения уравнения (1.1) можно применять вторую разновидность метода. В этом случае решение строится при помощи двух базисов $e_i(\mathbf{x})$ ($i=1, 2, \ldots$) и $\varphi_j(\mathbf{x})$ ($j=1, 2, \ldots$). Базис $e_i(\mathbf{x})$ учитывает краевые условия и особенности решения, а базис $\varphi_j(\mathbf{x})$ ортонормирован в смысле скалярного произведения в $L_2(G)$.

Приближение решения ищется в подпространстве $E_n$, натянутом на $n$ элементов первого базиса, и имеет вид $u_n(\mathbf{x})=\Sigma c_i e_i(\mathbf{x})$ $(i=1,\ldots,n)$. Неизвестные коэффициенты $c_i$ определяются из условия минимизации на подпространстве $E_n$ следующего функционала [3] $((\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(G)$):

$$S_N^2(u_n)=\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n}c_i(e_i, A\varphi_k)-(f, \varphi_k)\right]^2$$

Функционал $S_N^2(u_n)$ определяет отклонение между ортогональными (в смысле скалярного произведения в $L_2(G)$) проекциями функций $f(\mathbf{x})$ и $p_G A u_n(\mathbf{x})$ на подпространство, натянутое на $N$ элементов базиса $\varphi_k$. Сходимость достигается за счет увеличения $N$ при фиксированном $n$. Элементы базиса $\varphi_j(\mathbf{x})$ подбираются таким образом, чтобы легко вычислялись функции $A\varphi_j$, входящие в функционал $S_N^2(u_n)$.

Для прямоугольной трещины, занимающей область $((x_1,\ x_2)\colon |x_1|\leqslant Q$, $|x_2|\leqslant 1)$, базис $l_i(\mathbf{x})$ выбирался в виде $l_i(\mathbf{x})=l_0(\mathbf{x})g_i(\mathbf{x})$, где $l_0(\mathbf{x})=[(Q^2-x_1^2)(1-x_2^2)]^{1/2}(r_1r_2r_3r_4)^{-0,184}$, $r_i$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до $i$-го угла прямоугольника, $g_i(\mathbf{x})$ — тригонометрические функции.

Выбранная функция $e_0(\mathbf{x})$ имеет правильный порядок убывания к нулю у границы области, включая угловые точки, где порядок особенности приближенно равен 0,816 [4—6]. Для рассматриваемого ниже случая однородной нагрузки $p(x)=1$ функции $g_i(\mathbf{x})$ брались в виде $\cos(i\pi x_1/Q)\times\cos(j\pi x_2)$, учитывающем симметрию задачи. Базис $\varphi_j(\mathbf{x})$ строился путем ортогонализации в $L_2(G)$ функций

$$\psi_\alpha^2(\mathbf{x})=\begin{cases}[\alpha_3^2-|\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}_M|^2]^2, & |\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}_M|^2<\alpha_3^2\\ 0, & |\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}_M|^2\geqslant\alpha_3^2\end{cases}$$

где $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_M=(\alpha_1,\ \alpha_2)$; круги с центрами в точках $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ и радиусами $\alpha_3$ принадлежат области трещины. Функции $A\psi_\alpha^2(\mathbf{x})$ выражаются через $\psi_\alpha^2(\mathbf{x})$ и гипергеометрическую функцию [3].

Расчеты проводились для трещин прямоугольной в плане формы с отношением сторон $Q=1$, 2, 4 при различных значениях параметра $k$. В случае $Q=1$ количество элементов базиса $e_i$ доводилось до 9, а $\varphi_j$ — до 22. Для $Q=2$ бралось до 20 элементов $l_i$ и до 44 — $\varphi_j$. Для $Q=4$ — до 32 элементов $e_i$ и 71 — $\varphi_j$.

В таблице приведены отношение объема трещины к объему круговой трещины той же площади при отсутствии связей $V_r$ и значения коэффициентов интенсивности напряжений $N_i$ вдоль контура трещины. В каждой паре строк, отвечающих данному значению $k$ (приведенному в первой колонке), верхняя строка дает значения $N_i$ в точках $x_1=0{,}1Q(i-1)$, $x_2=1$ большой стороны прямоугольника, а нижняя строка — в точках $x_1=Q$, $x_2=0{,}1(i-1)$ малой стороны. Для коэффициентов интенсивности напряжений в колонках 3—12 таблицы представлены мантиссы соответствующих чисел. Например, значение 536, расположенное в первой строке и третьей колонке, означает, что $N_1=0{,}536$.

В случае отсутствия связей ($k=0$) величины коэффициентов интенсивности напряжений, представленные в таблице, хорошо согласуются с известными численными результатами (см., например, [7, 8]). В случае квадрата ($|x_1|\leqslant 1$, $|x_2|\leqslant 1$) различие с данными [7, 8] на отрезке от середины стороны (0; 1) до точки (0,5; 1) не превосходит 3%. При приближении к угловой точке отличие от результатов [7] не превосходит 4,5%, отличие же от [8] начинает увеличиваться особенно в малой окрестности угловой точки, достигая в точке (0, 9; 1) приблизительно 14%. Аналогичное различие полученных результатов от [7, 8] имеет место и для прямоугольной трещины. В частности, отличие максимальных вдоль контура трещины значений коэффициентов интенсивности напряжений от [8] составляет 2, 4, 3 и 2,3% для прямоугольников с отношением сторон 1 : 1, 1 : 2 и 1 : 4 соответственно.

Величины $V_r$ хорошо согласуются с результатами [9], где для них построены оценки и приближенные формулы. Одна из формул [9] выра-

| $k$ | $V_r$ | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ | $N_5$ | $N_6$ | $N_7$ | $N_8$ | $N_9$ | $N_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $Q=1$ | | | | | | |
| 0 | 0,952 | 536 | 532 | 425 | 514 | 501 | 481 | 455 | 422 | 378 | 310 |
| | | 536 | 532 | 525 | 514 | 501 | 481 | 455 | 422 | 378 | 310 |
| 0,2 | 0,862 | 492 | 489 | 482 | 473 | 462 | 445 | 423 | 393 | 354 | 293 |
| | | 492 | 489 | 482 | 473 | 462 | 445 | 423 | 393 | 354 | 293 |
| 0,4 | 0,788 | 456 | 453 | 447 | 439 | 430 | 415 | 394 | 368 | 334 | 277 |
| | | 456 | 453 | 447 | 439 | 430 | 415 | 394 | 368 | 334 | 277 |
| 0,8 | 0,673 | 399 | 397 | 392 | 386 | 379 | 367 | 350 | 329 | 302 | 253 |
| | | 399 | 397 | 392 | 386 | 379 | 367 | 350 | 329 | 302 | 253 |
| | | | | | $Q=2$ | | | | | | |
| 0 | 0,880 | 638 | 637 | 636 | 630 | 622 | 608 | 581 | 546 | 487 | 404 |
| | | 564 | 561 | 554 | 544 | 530 | 508 | 479 | 444 | 400 | 330 |
| 0,2 | 0,776 | 570 | 570 | 569 | 564 | 559 | 548 | 525 | 497 | 446 | 375 |
| | | 512 | 510 | 504 | 495 | 483 | 465 | 440 | 409 | 371 | 308 |
| 0,4 | 0,694 | 517 | 517 | 517 | 513 | 509 | 500 | 481 | 458 | 413 | 351 |
| | | 471 | 468 | 462 | 456 | 446 | 430 | 408 | 381 | 347 | 290 |
| 0,8 | 0,574 | 440 | 439 | 440 | 437 | 435 | 429 | 414 | 398 | 362 | 314 |
| | | 407 | 406 | 401 | 396 | 388 | 376 | 358 | 337 | 310 | 262 |
| | | | | | $Q=4$ | | | | | | |
| 0 | 0,717 | 694 | 695 | 697 | 693 | 683 | 673 | 660 | 638 | 590 | 493 |
| | | 571 | 568 | 561 | 549 | 534 | 512 | 483 | 449 | 405 | 334 |
| 0,2 | 0,622 | 612 | 613 | 615 | 612 | 604 | 597 | 588 | 571 | 532 | 450 |
| | | 517 | 514 | 508 | 499 | 486 | 467 | 442 | 413 | 375 | 311 |
| 0,4 | 0,550 | 550 | 551 | 553 | 550 | 544 | 539 | 532 | 518 | 486 | 416 |
| | | 474 | 472 | 466 | 458 | 447 | 431 | 409 | 384 | 350 | 292 |
| 0,8 | 0,446 | 461 | 461 | 463 | 462 | 457 | 454 | 450 | 441 | 417 | 364 |
| | | 409 | 407 | 403 | 398 | 389 | 376 | 359 | 339 | 312 | 263 |

жает объем трещины через площадь области трещины и длину ограничивающего ее контура. Для прямоугольника она дает $V_r \approx 1{,}7725b[S^{1/2}(1+b^2/S)]^{-1}$, где $b$ — длина малой стороны прямоугольника, а $S$ — его площадь. Различие между значениями, определяемыми этой формулой и приведенными в таблице, составляет 6,9, 5 и 1,1% для прямоугольников с отношением сторон 1 : 1, 1 : 2, 1 : 4 соответственно. Другая формула [9] выражает объем трещины через жесткость при кручении стержня, сечение которого совпадает с формой трещины. Известны значения жесткости, полученные для стержня квадратного сечения численно, а для сечения в виде вытянутого прямоугольника асимптотически. Поэтому сравним $V_r$, вычисленное с их помощью в [9], с результатами расчетов для квадрата и прямоугольника с отношением сторон 1 : 4. В первом случае различие составляет 1,3%, а во втором 1%.

Имеющаяся в полученных результатах некоторая немотонность изменения коэффициента интенсивности напряжений при движении от центра большой стороны прямоугольника к вершине в случае $Q=4$ вызвана тем, что для длинных прямоугольников значения коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности середины большой стороны очень близки. Увеличение коэффициента интенсивности напряжений по сравнению со значением в середине большой стороны является следствием погрешностей вычислений и не превосходит 0,5%.

Численные результаты, приведенные в таблице, удовлетворяют доказанным в [2] теоремам сравнения. Для любого $k$ величины коэффициентов интенсивности напряжений на малой стороне прямоугольника увеличиваются с ростом $Q$. Кроме того, если прямоугольники с меньшим $Q$ вписывать в разные места прямоугольников с большим $Q$, то на общей части больших сторон прямоугольников коэффициенты интенсивности напряжений для меньшего $Q$ будут ниже.

Результаты расчетов показывают, что с ростом параметра $k$ эффект увеличения коэффициентов интенсивности напряжений на общей части контуров при расширении области снижается. Действительно, пусть $G_1$ и $G_2$ — какие-нибудь из рассчитанных областей, причем $G_1 \subset G_2$ и ограничивающие их контуры касаются в точке $\mathbf{x}'$. Обозначим $N_1(\mathbf{x}', k)$ и $N_2(\mathbf{x}', k)$ коэффициенты интенсивности напряжений в точке $\mathbf{x}'$ для областей $G_1$ и $G_2$ соответственно при значении параметра $k$. Из данных [2] и таблицы следует, что величины $(N_2(\mathbf{x}', k)-N_1(\mathbf{x}', k))/N_1(\mathbf{x}', k)$ монотонно убывают с ростом $k$. На основании этого можно сделать вывод, что коэффициенты интенсивности напряжений в серединах больших сторон прямоугольников при $Q\to\infty$ быстрее сходятся к решению плоской задачи для больших $k$.

Другим свойством решений является стремление к выравниванию коэффициентов интенсивности напряжений вдоль большей части контура (вне окрестностей угловых точек) при увеличении параметра $k$. Пусть $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ — точки прямоугольного контура, отличные от угловых. Рассмотрим величину $D(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', k)=|N(\mathbf{x}', k)-N(\mathbf{x}'', k)|/N(\mathbf{x}', k)$, где $N(\mathbf{y}', k)$ — коэффициент интенсивности напряжений в точке $\mathbf{y}'$. Результаты, приведенные в таблице, показывают, что $D(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', k)$ монотонно убывает с ростом $k$.

Выявленные с помощью численного анализа качественные свойства решений подтверждаются полученными ниже асимптотическими решениями.

**2. Асимптотика решения задачи при малой жесткости связей.** Для фиксированной области трещины при уменьшении $k$, начиная с некоторого значения, решение (1.1) может быть представлено с помощью сходящегося ряда $u=u_0+ku_1+\ldots+k^nu_n+\ldots$. Подставляя это выражение в (1.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях $k$, получим систему уравнений

$$p_G\Lambda u_0=f(\mathbf{x}),\quad p_G\Lambda u_{n+1}=-u_n,\quad u_k(x)\in H_{1/2}{}^0(G) \tag{2.1}$$

Используя результаты [10], можно доказать сходимость ряда при малых значениях $k$. Для упрощения выкладок примем в качестве нормы в пространстве $H_{1/2}{}^0(G)$ величину $\|u\|_{1/2}=(\Lambda u, u)^{1/2}$. Поскольку $H_{1/2}{}^0(G)\subset L_2(G)$, из (2.1) следует ($\|\cdot\|$ — норма в $L_2(G)$):

$$\|u_{n+1}\|_{1/2}^2=(\Lambda u_{n+1}, u_{n+1})=-(u_n, u_{n+1})\leqslant\|u_n\|\,\|u_{n+1}\| \tag{2.2}$$

Согласно [10], для любой функции $v(\mathbf{x})\in H_{1/2}{}^0(G)$ имеет место оценка

$$(\Lambda v, v)\|v\|^{-2}\geqslant\lambda_1(K_1)\sqrt{\pi/S} \tag{2.3}$$

где $\lambda_1(K_1)$ — минимальное собственное число оператора $p_G\Lambda$ в круге единичного радиуса для краевых условий Дирихле, $S$ — площадь области $G$. Величина $\lambda_1(K_1)$, полученная численно в [10], оказалась равной двум. Этим значением и будем пользоваться в дальнейшем. Из (2.2) и (2.3) получим $\|u_{n+1}\|_{1/2}^2\leqslant\|u_n\|_{1/2}\|u_{n+1}\|_{1/2}/(2\sqrt{\pi/S})$.

Окончательно имеем $\|u_{n+1}\|_{1/2}\leqslant\|u_n\|_{1/2}/(2\sqrt{\pi/S})$.

Таким образом, нормы членов ряда мажорируются членами числового ряда $\|k^nu_n\|_{1/2}$, который является сходящимся, если $\|k^{n+1}u_{n+1}\|_{1/2}<\alpha\|k^nu_n\|_{1/2}$ $(0<\alpha<1)$. Отсюда получим условие сходимости ряда: $k\sqrt{S}/(2\sqrt{\pi})<1$. В случае, когда область $G$ является кругом радиуса $R$, из последнего неравенства следует, что ряд сходится при $kR<2$.

Для примера вычислим первую поправку коэффициента интенсивности напряжений в задаче о круговой трещине единичного радиуса при однородной нагрузке $p=1$. Решение приближенно имеет вид $u\approx u_0+ku_1$. Как известно, $u_0(\mathbf{x})=\gamma\cdot2\pi^{-1}(1-r^2)^{1/2}$, где $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$. Обозначим коэффициенты интенсивности напряжений, соответствующие $u_0$ и $u_1$, через $N_0$ и $N_1$. Очевидно, $N_0=\sqrt{2}/\pi$. Искомый коэффициент интенсивности напряжений приближенно равен $N\approx N_0+kN_1$. Величину $N_1$ получим из (2.1) и формулы, выражающей коэффициент интенсивности напряжений в осесимметричном случае через прикладываемую нагрузку [11]. Эта формула имеет вид ($q(r)$ — приложенные усилия):

$$N_1=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1\frac{rq(r)}{\sqrt{1-r^2}}\,dr$$

В рассматриваемой задаче согласно (2.1) функция, отвечающая приложенной нагрузке, равна $-u_0(\mathrm{x})/\gamma$. Отсюда

$$N_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\int_0^1 \frac{r\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}, \qquad N \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(1-\frac{k}{\pi}\right) \tag{2.4}$$

При сравнении второй формулы (2.4) с численными результатами [2] можно убедиться, что до $k=0{,}6$ разница между ними не превышает 5,7%, а для $k=0{,}8-10$%, причем значения, вычисляемые по формуле (2.4), ниже, чем в [2].

**3. Асимптотика решения задачи при большой жесткости связей.** Получение асимптотики решения задачи для фиксированной области трещины и $k\to\infty$ представляет значительный интерес, поскольку в этом случае трудно построить численное решение с достаточно высокой точностью, а кроме того, наличие аналитического выражения позволяет исследовать некоторые качественные свойства решений.

Построение асимптотики коэффициентов интенсивности напряжений основывается на следующих соображениях. Из уравнения (1.1) легко находится главный член асимптотики решения вне малой окрестности контура трещины (внешнее решение). Это решение определяет главный член потенциальной энергии деформации. Поскольку приращение потенциальной энергии деформации при вариации области трещины связано с коэффициентами интенсивности напряжений формулой Ирвина, которая остается справедливой и в случае наличия связей, можно по приращению энергии получить коэффициенты интенсивности напряжений. Если варьировать область трещины с помощью преобразования подобия, то в силу инвариантности вида уравнения (1.1) относительно этого преобразования приращение энергии выразится через саму энергию и ее производную по параметру $k$. Таким образом, по главному члену асимптотики решения внутри области трещины можно вычислить главный член асимптотики коэффициентов интенсивности напряжений.

Пусть область трещины задана и имеет характерные размеры порядка единицы, $k\gg1$ и к поверхностям трещины приложены однородные усилия $p=1$. Тогда главный член решения уравнения (1.1) вне малой окрестности контура трещины равен

$$u_a=\gamma/k \tag{3.1}$$

Решение, задаваемое формулой (3.1), соответствует перемещению поверхностей полупространств, соединенных винклеровским слоем. Исходя из (3.1) получим приближенное выражение для объема трещины ($S$ — площадь области $G$):

$$V=2\int_G u(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}\approx 2\gamma k^{-1}S=V_a \tag{3.2}$$

Отметим, что с помощью рассуждений, примененных в [2] для доказательства теорем сравнения, легко показать, что $u_a$ является также оценкой сверху решения уравнения (1.1). Поэтому величина $V_a$, задаваемая формулой (3.2), превосходит точное значение объема.

В случае, когда область $G$ является кругом единичного радиуса, из формулы (3.2) получаем, что $V_a=2\gamma k^{-1}\pi$, а величина $V_r$ при этом становится равной $V_r\approx0{,}75\pi/k$. Из сравнения асимптотического значения объема с полученным в [2] численным значением можно сделать следующие выводы. Как и предполагалось, для любого $k$ асимптотическое значение выше численного. С увеличением $k$ различие между ними уменьшается, однако для наибольшего из просчитанных в [2] значений $k$ это различие составляет около 12%, что говорит о достаточно медленном выходе решений на асимптотическое.

Для получения асимптотики коэффициентов интенсивности напряжений воспользуемся асимптотикой решения внутри области трещины (3.1), инвариантностью уравнения (1.1) относительно преобразования подобия и формулой Ирвина.

Обозначим $W$ потенциальную энергию деформации пространства с трещиной $W=\int\limits_G p(\mathbf{x})u(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. В случае однородной нагрузки единичной интенсивности из (3.2) следует, что для круговой трещины единичного радиуса асимптотическое выражение для потенциальной энергии деформации имеет вид

$$W_a=\gamma\pi k^{-1} \tag{3.3}$$

Поскольку для круговой области величина $W$ зависит от двух параметров: радиуса круга $R$ и $k$, будем ее записывать в виде $W(R, k)$. Воспользуемся приемом [12] для построения оценок коэффициентов интенсивности напряжений через энергетические характеристики решения. Запишем приращение потенциальной энергии деформации ($\delta W$) при переходе от круговой трещины $K_1$ единичного радиуса к круговой трещине $K_{1+\varepsilon}$ радиуса $1+\varepsilon$ двумя способами: с помощью формулы Ирвина и согласно определению. Отметим, что наличие младшего члена в уравнении (1.1) по сравнению со случаем отсутствия связей не влияет на справедливость и вид формулы Ирвина. В этом можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных примененным в [13] при выводе формул типа формулы Ирвина для некоторого класса псевдодифференциальных уравнений. Следовательно, в соответствии с [14] и в силу осевой симметрии имеем $\delta W=\gamma\pi N^2(1, k)\delta S$, где $N(R, k)$ — коэффициент интенсивности напряжений на контуре круговой трещины радиуса $R$ при жесткости связей, соответствующей параметру $k$, $\delta S$ — приращение площади трещины, которое в данном случае при малом $\varepsilon$ приближенно равно $2\varepsilon S=2\varepsilon\pi$. Таким образом

$$\delta W=2\varepsilon\pi^2\gamma N^2(1, k) \tag{3.4}$$

Обозначим $u_1(\mathbf{x}, k)$ и $u_2(\mathbf{y}, k)$ решения уравнения (1.1) в областях $K_1$ и $K_{1+\varepsilon}$ соответственно при значении параметра $k$. Согласно определению

$$\delta W=W(1+\varepsilon, k)-W(1, k)=\int\limits_{K_{1+\varepsilon}} u_2(\mathbf{y}, k)d\mathbf{y}-\int\limits_{K_1} u_1(\mathbf{x}, k)d\mathbf{x} \tag{3.5}$$

В уравнении (1.1) для области $K_{1+\varepsilon}$ сделаем замену переменных $\mathbf{y}=(1+\varepsilon)\mathbf{x}$. Обозначим $u_2(\mathbf{y}, k)=u_2((1+\varepsilon)\mathbf{x}, k)=v_\varepsilon(\mathbf{x}, k)$, $\mathbf{x}\in K_1$. Поскольку при преобразовании подобия уравнение (1.1) переходит в уравнение того же типа, легко видеть, что функция $v_\varepsilon(\mathbf{x}, k)$ удовлетворяет уравнению

$$p_{K_1}\Lambda v_\varepsilon(\mathbf{x}, k)^0+(1+\varepsilon)kv_\varepsilon(\mathbf{x}, k)=1+\varepsilon \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что $v_\varepsilon(\mathbf{x}, k)=(1+\varepsilon)u_1(\mathbf{x}, (1+\varepsilon)k)$. Поэтому

$$W(1+\varepsilon, k)=\int\limits_{K_{1+\varepsilon}} u_2(\mathbf{y}, k)d\mathbf{y}=(1+\varepsilon)^2\int\limits_{K_1} v_\varepsilon(\mathbf{x}, k)d\mathbf{x}= \tag{3.7}$$

$$=(1+\varepsilon)^3\int\limits_{K_1} u_1(\mathbf{x}, (1+\varepsilon)k)d\mathbf{x}\approx(1+3\varepsilon)\int\limits_{K_1}\left(u_1(\mathbf{x}, k)+\varepsilon k\frac{\partial u_1(\mathbf{x}, k)}{\partial k}\right)d\mathbf{x}\approx$$

$$\approx(1+3\varepsilon)W(1, k)+\varepsilon k\,\partial W(1, k)/\partial k$$

Воспользовавшись асимптотическим выражением (3.3) для функции $W(1, k)$ и предположив, что асимптотическое разложение допускает почленное дифференцирование, получим $k\partial W(1, k)/\partial k\approx -W(1, k)$. Тогда из (3.5) и (3.7) следует $\delta W=2\varepsilon W(1, k)$. Теперь с помощью (3.3), (3.4) получим $2\varepsilon\pi^2\gamma N^2(1, k)=2\varepsilon\gamma\pi k^{-1}$. Откуда

$$N(1, k)\approx 1/\sqrt{\pi k} \tag{3.8}$$

Учитывая связь между асимптотиками нормальных смещений и напряжений вблизи контура трещины, получим выражение для $u_1(\mathbf{x}, k)$ вблизи контура трещины $u_1(x, k) \approx 2\gamma N(1, k)\sqrt{s} \approx 2\gamma\sqrt{s}/\sqrt{\pi k}$, где $s$ — расстояние от точки x до контура трещины.

Поскольку $k$ — размерный параметр, степень жесткости связей определяет некоторая комбинация, составленная из $k$ и характерного размера трещины. В частности, для круговой трещины в качестве безразмерной величины можно выбрать произведение $Rk$. С помощью замены переменных легко показать, что между коэффициентами интенсивности напряжений для круговых трещин радиусов $R$ и 1 имеется следующая связь [2]:

$$N(R, k) = \sqrt{R}N(1, Rk) \tag{3.9}$$

Следовательно, при фиксированном $k$ и $R \to \infty$ величина $N(R, k)$ в соответствии с (3.8) стремится к

$$N_a(R, k) = 1/\sqrt{\pi k} \tag{3.10}$$

Таким образом, хотя величина $N(R, k)$ согласно доказанным в [2] теоремам сравнения растет с ростом $R$, однако в противоположность случаю отсутствия связей она растет лишь до конечного предела, определяемого (3.10).

Из формул (3.8), (3.9) следует также, что при фиксированном $R$ и $k \to \infty$ главный член асимптотики $N(R, k)$ не зависит от радиуса трещины. Этот факт в совокупности с теоремами сравнения и тем, что для любой точки гладкого контура, ограничивающего выпуклую область $G$, можно вписать в $G$ круг и описать вокруг $G$ круг так, чтобы они касались контура в заданной точке, позволяет сделать следующий вывод. Относительное различие между коэффициентами интенсивности напряжений вдоль гладкого контура, ограничивающего выпуклую область, при $k \to \infty$ стремится к нулю. Тенденция к уменьшению указанного различия была обнаружена выше на основании численных расчетов даже для сравнительно небольших значений $k$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Atkinson C.* An iterative scheme for solving problems relating to cracks opening under a displacement — dipendent internal stress // Intern. J. Fract. Mech. 1970. V. 6. No. 2. P. 193—197.
2. *Шифрин Е. И.* Плоская трещина нормального отрыва при наличии линейных связей между ее поверхностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 80—86.
3. *Шифрин Е. И.* О приближенном решении уравнений некоторых смешанных задач теории упругости // Механика деформируемого тела. М.: Наука. 1986. С. 154—164.
4. *Bažant Zdeněk P.* Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection of gradient singularity lines: a general numerical method // Intern. J. Engng Sci. 1974. V. 12. No. 3. P. 221—243.
5. *Morrison J. A., Lewis J. A.* Charge singularity at the corner of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 31. No. 2. P. 233—250.
6. *Keer L. M., Parihar K. S.* A note on the singularity at the corner of a wedgeshaped punch or crack // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 34. No. 2. P. 297—302.
7. *Weaver J.* Three-dimensional crack analysis // Intern. J. Solids and Struct. 1977. V. 13. No. 4. P. 321—330.
8. *Стадник М. М., Горбачевский И. Я.* Предельное равновесие хрупкого тела с прямоугольной трещиной // Физ.-хим. механика материалов. 1981. Т. 17. № 2. С. 66—70.
9. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Оценки и приближенные формулы в задаче теории упругости о плоской трещине нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 120—127.
10. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоскими трещинами нормального разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 68—79.
11. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин // Прикладные вопросы вязкости разрушения. М.: Мир. 1968. С. 64—142.
12. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Некоторые энергетические методы построения оценок в пространственных задачах теории упругости о плоских трещинах произвольного разрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 61—76.
13. *Шифрин Е. И.* Оценки решения задачи о плоской трещине нормального разрыва в материале со степенным упрочнением // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. № 4. С. 31—43.
14. *Баренблатт Г. И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3—56.



Москва

Поступила в редакцию 19.II.1986